高等数学习题集

李晋明　柏金群　编著

海洋出版社

内 容 简 介

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会1996～2000年考试计划中，关于理、工类高等数学学习用书《高等数学讲义》而编写的配套习题集。全书分习题、答案、附录三部分内容，可供自学考试的读者，以及普通高等院校理、工科学生及辅导教师参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/李晋明，柏金群编著.-北京：海洋出版社，1996.8
ISBN 7-5027-4024-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②柏… Ⅲ.高等数学-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第12315号

海洋出版社　出版发行
（100860　北京市复兴门外大街1号）
北京燕山印刷公司印刷　新华书店发行所经销
1996年8月第1版　1996年8月北京第1次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：9.75
字数：240千字　　印数：0－6700册
定价：9.80元

前　言

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会1996～2000年考试计划中，关于理、工类高等数学(一)考试学习用书《高等数学讲义》(樊映川等编)上、下册而编写的一本配套习题集。

本习题集的章节次序完全是按《高等数学讲义》上、下册的内容进行编排的。

本习题集分习题、答案、附录等三部分内容。习题部分不仅包含了考试大纲中所要求的全部内容，并且还参照了近几年自学考试试题的相关内容。其中带*号部分(第二篇第十章、第十一章、第十四章的全部内容，以及第五章、第十三章的部分内容)，虽在考试大纲中并未纳入，但对考生今后的学习有所帮助。答案部分中对一些较难的题目还给出了一定的提示。附录部分是1991～1996年北京市高等教育自学考试《高等数学》试题及其参考答案。

本习题集在编写过程中，得到北京市高等教育自学考试委员会办公室的大力支持；北京商学院数学教研室的同志还为本书提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

本习题集不仅可供自学考试的读者使用，亦可供普通高等院校(包括广播电视大学、职工大学)理、工科学生及辅导教师参考使用。

限于作者的水平和经验，本习题集中的错误在所难免，恳请广大读者批评指正，以便今后进一步修改。

编者

1996年1月于北京

目　　次

第一篇　解析几何

第一章　行列式及线性方程组

行　列　式

1.1　计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 32153 & 32053 \\ 75284 & 75184 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

1.2　计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix}$.

1.3　行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & x & x \end{vmatrix} > 0$$

的条件是什么?

1.4 在怎样的条件下,下列等式成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

1.5 证明下列恒等式:

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} x + y & y + z & z + x \\ z + x & x + y & y + z \\ y + z & z + x & x + y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};$$

(3) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

线性方程组

1.6 解下列线性方程组:

(1) $$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x + 3y + 6z = 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 1, \\ 4x - 5y + 2z = 1; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} bx - ay = -2ab, \\ -2cy + 3bz = bc, \\ cx + az = 0. \end{cases}$$

1.7 求 a、b,使齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解,并求解.

1.8 求一个二次多项式 $f(x)$,使得 $f(1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(-3) = 28$.

第二章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

2.1　已知 $A(4,5)$，$B(1,2)$，$C(4,-1)$，求证三角形 ABC 是直角三角形.

2.2　求证 $A(a,b+c)$，$B(b,c+a)$，$C(c,a+b)$ 三点在一条直线上.

2.3　证明三角形两边中点所连的线段长等于第三边边长的一半。

2.4　已知五边形 $ABCDE$ 的顶点分别为 $A(0,0)$，$B(2,1)$，$C(3,2)$，$D(1,4)$，$E(-1,3)$，求五边形 $ABCDE$ 的面积 S.

2.5　求证到三角形的三个顶点的距离平方和为最小的点是这个三角形的重心.

2.6　对于 Ox 轴上的两点 P_1，P_2，其坐标分别为 $x_1=4$，$x_2=-2$，求线段$\overline{P_1P_2}$的定比分点 P 的坐标 x，其分比为 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

2.7　一质点的质量为 m_1，位于 Ox 轴上的点 P_1 处，P_1 的坐标为 x_1，另一质点的质量为 m_2，位于 Ox 轴上的点 P_2 处，P_2 的坐标为 x_2，求这两质点所形成的质点系的重心 P 的坐标.

2.8　求三角形均匀薄板的重心.

2.9　已知三角形 ABC 的顶点 $A(0,0)$，$B(4,8)$，$C(6,-4)$，点 M 内分 AB 所成的比是 3，点 P 是 AC 边上的一个点，且三角形 APM 的面积等于三角形 ABC 面积的一半，求点 P 分 AC 所成的比 λ.

2.10　设新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标为$(-2,3)$，求：

(1)　旧坐标系的原点 O 在新坐标系中的坐标；

(2)　旧坐标系内第一象限的等分角线 L 在新坐标系中的方程；

(3)　新坐标系内第一象限的等分角线 L' 在旧坐标系中的方程.

2.11　一曲线在旧坐标系中的方程为 $y=5x^2-4x-1$，问坐标系经过怎样的平移才能使曲线的方程化为最简形式.

2.12　已知新坐标轴是由旧坐标轴绕原点依反时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$得到的.

(1)　新旧坐标的互换公式为何？

(2)　一曲线在旧坐标系中的方程为 $xy=1$，问在新坐标系中它的方程为何？

第三章　直线与二元一次方程

3.1　已知直线方程为 $x+2y-3=0$，求此直线的斜率、倾角、x 轴截距、y 轴截距.

3.2　一直线过点$(2,1)$，且在两坐标轴上的截距相等，求直线方程.

3.3　一直线过点$(8,6)$，且截象限角所成三角形的面积等于 12，求此直线方程.

3.4　过点$(1,4)$引一直线，使其在两坐标轴上的截距为正，且截距之和为最小，试求这直线方程.

3.5　求下列直线方程，并作图：

(1)　过点$(-2,3)$，倾角为$\dfrac{\pi}{4}$；

(2)　过点$(4,2)$，平行于 x 轴；

(3) 过点(0,5),且和斜率为$\frac{1}{4}$的直线垂直;

(4) 斜率为 -3,在 y 轴上的截距为 -7;

(5) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 5 和 6;

(6) 过点(3,4)和原点.

3.6 求下列各对直线间的夹角 θ:

(1) $x - 2y = 0, 4x + 2y - 5 = 0$;

(2) $y = 2x - 3, 3x + y - 2 = 0$;

(3) $x - 2y - 4 = 0; 3x - 6y + 1 = 0$;

(4) $3x + 2y - 1 = 0, 5x - 2y + 3 = 0$.

3.7 试确定系数 a 和 b,使两直线:$ax - 2y - 1 = 0, 6x - 4y - b = 0$

(1) 有一个公共点; (2) 平行;

(3) 重合; (4) 垂直.

3.8 求下列各对直线的交点:

(1) $2x - 3y - 11 = 0, 3x + 4y + 9 = 0$;

(2) $2x - y + 2 = 0, 4x - 2y + 1 = 0$;

(3) $2x + y - 3 = 0, 4x + 2y - 6 = 0$;

(4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ (a > 0, b > 0), y = x$.

3.9 给定点 $A(2,3)$,$B(-4,5)$,求线段$\overline{AB}$的垂直平分线的方程.

3.10 在直线 $x + 3y = 0$ 上求一点,使这点和原点之间的距离等于这点和直线 $x + 3y - 2 = 0$ 之间的距离.

3.11 已知直线过点(2,3),它被两平行直线 $3x + 4y - 7 = 0$ 和 $3x + 4y + 8 = 0$ 所截得的线段长为 $3\sqrt{2}$,求该直线方程.

3.12 已知三角形的三条边的方程是 $18x + 6y - 17 = 0, 14x - 7y + 15 = 0, 5x + 10y - 9 = 0$,求三角形的三个内角.

3.13 过点(1,2)引一直线,使之与点(2,3)和点(4,−5)的距离相等,求此直线方程.

3.14 光线通过点(2,3)入射到直线 $x + y + 1 = 0$ 上后反射,反射光线通过点(4,1),试求入射线和反射线的方程.

3.15 求证三角形的三条高线交于一点.

3.16 求证三角形的三条中线交于一点.

3.17 求证三角形的三条内分角线交于一点.

3.18 k 为何值时,三直线 $x + y = 2, x + 3y = 4$ 和 $4x - ky = 3$ 交于一点.

3.19 一动点 P 和两定点 $(a,0)$、$(-a,0)$ 的联线总是互相垂直的,求动点 P 的轨迹.

3.20 已知正方形 $ABCD$ 的一个顶点 $A(2,-4)$,中心 $M(5,2)$,求各边的方程.

第四章　圆锥曲线与二元二次方程

圆

4.1　求下列圆的方程，已知：

(1)　圆心是$(2, -1)$，半径$R = 4$；

(2)　圆心是$(3, -2)$，圆通过原点；

(3)　圆通过三点$(1,1)$，$(1, -1)$，$(2,0)$；

(4)　圆切Ox轴于原点，并割Oy轴于点$(0,4)$.

4.2　试导出直线$Ax + By + C = 0$与圆$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$相切的条件.

4.3　从点$A(1,6)$向圆$x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$引切线，求切线方程.

4.4　圆$x^2 + y^2 + 5x = 0$的切线垂直于直线$4x - 3y + 7 = 0$，求切线方程.

4.5　已知直线$y = kx$与圆$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$，当k取何值时圆和直线的关系是：

(1)　相交；

(2)　相切；

(3)　相离.

4.6　求与两坐标轴都相切，且圆心在第一、第三象限内的圆的方程.

4.7　已知三角形ABC的三条边的方程分别是：$x + \sqrt{3}y - 2 = 0$，$x + 1 = 0$，$3x - 4y - 5 = 0$，求三角形ABC的内切圆方程.

4.8　已知圆$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$，求中心是$(5,4)$且与已知圆外切的圆的方程.

4.9　求经过两圆$x^2 + y^2 - 6x = 0$，$x^2 + y^2 = 4$的交点和点$(2, -2)$的圆的方程.

4.10　试证明$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$切于$x$轴的条件是$D^2 = 4F$.

椭　圆

4.11　求下列椭圆的方程，已知：

(1)　两焦点在Ox轴上，且关于原点对称，其长、短轴的长度分别是10与4；

(2)　长轴为26，两焦点是$(-10,0)$，$(14,0)$；

(3)　两焦点是$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$，$\left(2, -\frac{3}{2}\right)$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(4)　一焦点是$F(3,0)$，离心率为$\frac{1}{2}$，相应准线方程为$x + y - 1 = 0$.

4.12　在椭圆$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$上求一点，使它到右焦点的距离为14.

4.13　在椭圆$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$上求一点$M$，使得它与两焦点的连线所夹的角是直角.

4.14　试证：内接于椭圆的任意一个平行四边形一定是矩形.

4.15　求经过$A(3,0)$且与圆$x^2 + 6x + y^2 - 91 = 0$内切的圆的圆心轨迹.

4.16　已知两个定点$A(-a,0)$，$B(a,0)$，求直线MA的斜率与MB的斜率的乘积等于常数$(-k^2)$的动点M的轨迹.

4.17 求平行于直线 $2x-y+17=0$ 的椭圆 $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ 的切线.

4.18 求直线 $Ax+By+C=0$ 切于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的条件.

4.19 已知直线 $x-y-5=0$ 与两个焦点是 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$ 的椭圆相切，求椭圆方程.

4.20 地球的子午线为椭圆形，它的两半轴的比为 $\frac{299}{300}$，求地球子午线的离心率.

双曲线

4.21 求下列双曲线的方程，已知：

(1) 以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点为焦点，且离心率为 2；

(2) 焦点为 $F_1(-10,2)$，$F_2(16,2)$，两顶点间的距离为 24；

(3) 离心率为 $\frac{13}{12}$，焦点 $F(0,13)$ 和对应这焦点的准线方程是 $13y-144=0$；

(4) 两个焦点在 Ox 轴上，且关于原点对称，实轴、虚轴的长分别为 10 和 8.

4.22 已知双曲线二渐近线间的夹角为 $60°$，求其离心率.

4.23 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点到两渐近线的距离.

4.24 试证双曲线上的任一点到两条渐近线的距离的乘积是一定值.

4.25 试确定当 b 取何值时，直线 $y=\frac{5}{2}x+b$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 是：

(1) 相切；

(2) 相交；

(3) 相离.

4.26 给定两点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，移动 M，使 $\triangle AMB$ 的内角 B 常等于角 A 的两倍，求 M 的轨迹.

4.27 已知双曲线的对称轴重合于坐标轴，且它的两条切线是：$5x-6y-16=0$，$13x-10y-48=0$，求该双曲线方程.

4.28 设双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，求以点 $A(3,-1)$ 为中点的弦的方程.

4.29 已知双曲线的共轭直径间的夹角是 $45°$，它们的长度之比等于 $\frac{2}{3}$，求渐近线的夹角 θ.

4.30 k 为何值时，方程 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{16+k}=1$ 的图象是：

(1) 圆； (2) 椭圆； (3) 双曲线.

抛物线

4.31 求下列抛物线方程，已知：

(1) 焦点是 $F(0,-\frac{1}{2})$，准线方程是 $y=\frac{1}{2}$；

(2) 焦点是原点，焦点与顶点间的距离等于 3，对称轴为 y 轴；

(3) 顶点是$(3,4)$，准线是 y 轴；

(4) 准线为 $x+2y=1$，焦点是原点.

4.32 求下列抛物线的顶点 A，焦点 F 及准线方程：

(1) $y^2=4x-8$； (2) $x^2=2-y$.

4.33 炮弹的轨迹方程为抛物线，已知最大射程为 10 km，最大高度为 0.2 km，求轨迹方程.

4.34 若点 M 的横坐标为 7，试求 $y^2=20x$ 上点 M 的焦点半径.

4.35 当 k 为何值时，直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=4x$：

(1) 相交； (2) 相切； (3) 相离.

4.36 求抛物线 $y^2=2px$ 的焦点弦的中点的轨迹.

4.37 求抛物线 $y^2=4x$ 在点 $(4,-4)$ 处的切线与法线.

4.38 设直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 有两个交点，其横坐标分别为 x_1,x_2，而直线与 x 轴的交点的横坐标是 x_3，试证：$\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

4.39 已知抛物线的对称轴是 $3x+4y-1=0$，焦点 $(-1,1)$，且抛物线过点 $(3,4)$，求抛物线的准线方程及抛物线的方程.

4.40 从一点 M 向抛物线 $y^2=2px$ 引两条切线，设切点是 A 与 B，假设三角形 MAB 的面积为定值 S，求点 M 的轨迹.

一般二元二次方程的简化

4.41 化简下列各二元二次方程：

(1) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$；

(2) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$；

(3) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$；

(4) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$.

4.42 已知二次曲线为 $x^2-2xy+a_{22}y^2-4x-6y+3=0$，问 a_{22} 取什么值时，它表示

(1) 椭圆； (2) 抛物线；

(3) 双曲线； (4) 一对直线.

4.43 求通过 $(1,1)$，$(2,-1)$，$(1,-2)$，$(-1,1)$，$(3,0)$ 五点的二次曲线方程.

4.44 已知二次曲线通过 $(1,0)$，$(2,0)$，$(0,1)$，$(0,2)$，$(2,2)$ 五个点，求它的离心率.

第五章 极 坐 标

5.1 将下列曲线的直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $xy=a^2$； (2) $x^2+y^2=4x$；

(3) $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$； (4) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

5.2 将下列曲线的极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $r=5$； (2) $\theta=\frac{\pi}{3}$；

(3) $r=6\sec\theta$ (4) $r=\frac{6}{1+2\cos\theta}$.

5.3 已知三角形 OAB 的一个顶点在极点 O 点上，另两点的极坐标是 $A(5,\frac{\pi}{4})$，$B(4,\frac{\pi}{12})$，试计算三角形 OAB 的面积 S.

5.4 已知点 L 的极角为 φ，点 M 的极坐标为 (r,θ)，求点 M 关于 OL 线的对称点 M' 的极坐标。

5.5 求下列各对曲线的交点(极坐标)：

(1) $\begin{cases} r = 2 + 2\cos\theta, \\ r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} r = 4\sin\theta, \\ r = 2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} r\cos\theta = 4a, \\ r = 4a\cos\theta; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} r\cos\theta = 4, \\ r\cos(\theta - 60^\circ) = 2. \end{cases}$

5.6 已知圆锥曲线的极坐标方程：

(1) $r = \dfrac{25}{13 - 12\cos\theta}$； (2) $r = \dfrac{1}{3 - 3\cos\theta}$；

(3) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\theta}$； (4) $r = \dfrac{4}{\sqrt{5} - \cos\theta}$.

试求离心率 e 的值. 且当 $e \neq 1$ 时，求长短半轴或实虚半轴的长度；当 $e = 1$ 时，求焦参数 p 的值.

5.7 设圆的半径为 R，圆心在极点上，求圆的极坐标方程.

5.8 已知椭圆的长半轴为 a，短半轴为 b，当椭圆的中心作为极点，中心与焦点的连线作为极轴时，求椭圆的极坐标方程.

5.9 设抛物线的顶点为极点，对称轴为极轴，求抛物线的极坐标方程.

5.10 已知点 $A(r_1,\theta_1)$，$B(r_2,\theta_2)$，求直线 AB 的极坐标方程.

5.11 从圆锥曲线的焦点作两条相互垂直的弦，其长分别为 d_1 及 d_2，证明：$\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2}$ 为定值.

第六章 参数方程

6.1 将下列曲线的直角坐标方程，根据所给的条件，化成参数(t,φ,λ) 方程：

(1) $y^2 = 4x^2 - 5x^3$，令 $y = tx$；

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$，令 $x = a\cos^4\varphi$；

(3) $xy = a^2$，令 $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$；

(4) $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，令 $x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

6.2 将下列曲线的参数方程，化成直角坐标方程，并说明是什么曲线：

(1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = at, \\ y = at^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \sec t - 1, \\ y = \mathrm{tg}\, t + 2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 1, \\ y = t - 1. \end{cases}$

6.3 一圆以点 $M_0(x_0,y_0)$ 为圆心，R 为半径，求这圆的参数方程.

6.4 一直线过定点 $M_0(x_0,y_0)$，其倾角是 α，求此直线的参数方程.

6.5 抛射体的初速为v_0,抛射的方向与水平线所成的角为$\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.求抛射体的运动轨迹(空气阻力略去不计).

6.6 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程$(a>b)$.

6.7 一半径为R的圆沿一条直线滚动,求圆周上一定点A的运动轨迹.

6.8 求下列各对参数(t,θ)曲线的交点:

(1) $\begin{cases}x=2t,\\y=3-t,\end{cases}$与$y=x+\frac{1}{x}$;

(2) $\begin{cases}x=3t+1,\\y=2-t,\end{cases}$与$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\y=\sqrt{5}\sin\theta.\end{cases}$

6.9 设抛物线方程为$\begin{cases}x=at^2\\y=2at,\end{cases}$试证:由其上三点$t_1$、$t_2$、$t_3$所围成的三角形面积是经过这三点的切线所围成的三角形面积的两倍.

6.10 线段AB的端点A在x轴上滑动,端点B在y轴上滑动,当AB的长为定值$2a$时,求AB中点M的轨迹.

第七章　空间直角坐标与矢量代数

空间直角坐标

7.1 给出点$A(-3,4,1)$,$B(4,0,-2)$,$M(a,b,c)$,分别求出它们到各坐标平面、各坐标轴和原点的距离.

7.2 已知$A(4,1,9)$,$B(2,4,3)$,$C(10,-1,6)$,证明三角形ABC是等腰三角形.

7.3 已知一线段被$M_1(2,1,-1)$,$M_2(4,-3,-2)$三等分,求这线段的两个端点。

7.4 给定点$A(-1,7,4)$,$B(5,4,-5)$,求线段AB的中点和分线段成比$\lambda=2$的点的坐标.

7.5 求点$(7,-3,1)$关于点$(4,0,-1)$的对称点的坐标.

矢量代数

7.6 以从一点出发的三个不共面矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱作一平行六面体,求这六面体的对角线矢量.

7.7 已知三角形ABC中,点D、E、F分别是边BC、CA、AB的中点,求证:$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

7.8 已知$|\vec{a}|=11$,$|\vec{b}|=23$,$|\vec{a}-\vec{b}|=30$,求$|\vec{a}+\vec{b}|$.

7.9 $\vec{a}$与$\vec{b}$满足什么条件时,有下列事实成立:

(1) $\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$共线;

(2) $\vec{a}+\vec{b}$平分$\vec{a}$与$\vec{b}$之间的夹角;

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

7.10 设长度相等的三个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求每两个矢量之间的夹角.

7.11 设矢量与三坐标轴的夹角为 α,β,γ，已知 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

7.12 求证半圆内的圆周角都是直角.

7.13 设矢量 $\vec{R}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，求证 $\vec{R}$ 垂直于 $\vec{a}$.

7.14 已知 $(\vec{a}+3\vec{b})$ 垂直于 $(7\vec{a}-5\vec{b})$，而 $(\vec{a}-4\vec{b})$ 垂直于 $(7\vec{a}-2\vec{b})$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 间的夹角 θ.

7.15 设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$，而 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=4$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

7.16 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 中每两个矢量间的夹角都是 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=6,|\vec{c}|=2$，求 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$.

7.17 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为单位矢量，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

7.18 设矢量 $\vec{a}=\{3,-2,6\},\vec{b}=\{-2,1,0\}$，求下列各矢量的坐标：

(1) $\vec{a}+\vec{b}$；　　(2) $2\vec{a}$；

(3) $2\vec{a}+3\vec{b}$；　　(4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

7.19 已知矢量 $\vec{a}=\{2,-1,3\}$，求一矢量 $\vec{b}$，使 $\vec{b}\parallel\vec{a}$，且 $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$.

7.20 设矢量 $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k},\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$，且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，求 α 和 β.

7.21 设 $\vec{a}=\{1,-1,2\}$，求 $\vec{a}$ 的方向余弦.

7.22 已知一矢量 $\vec{a}$ 的两个方向余弦是 $\cos\alpha=\frac{2}{7},\cos\beta=\frac{3}{7}$，且 $\vec{a}$ 与 z 轴的夹角是钝角，求 $\cos\gamma$.

7.23 设矢量 $\vec{a}=\{1,-2,-4\}$，求与 $\vec{a}$ 同向的单位矢量.

7.24 已知一矢量的模长为2，且与 x 轴和 y 轴成等角，与 z 轴的夹角是它们的两倍，求这矢量.

7.25 已知点 $M_1(-5,7,-6),M_2(7,-9,9)$ 和 $\vec{a}=\{1,-3,1\}$，求矢量 $\vec{a}$ 在 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 上的投影.

7.26 设 $\vec{a}=\{1,-2,2\},\vec{b}=\{-3,6,2\}$，求：

(1) $\vec{a}^2$；　　(2) $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$；

(3) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；　　(4) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.

7.27 已知三角形的三个顶点为 $A(-1,-1,1),B(1,0,-1),C(4,2,5)$，求三角形的三内角.

7.28 设矢量 $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$，求矢量 $\vec{x}$，使其与 z 轴垂直，且满足 $\vec{x}\cdot\vec{a}=9,\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$.

7.29 设一质点位于 $A(1,2,-1)$ 处，在力 $\vec{F}$ 的作用下沿直线运动到 $B(2,5,-1+3\sqrt{2})$ 处，已知力 $\vec{F}$ 的方向角为 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$，大小为100，求此力 $\vec{F}$ 所做的功 W.

7.30 已知 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，求证：$\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线.

7.31 求垂直于 $\vec{a}=\{1,-1,2\}$ 和 $\vec{b}=\{2,-2,2\}$ 的单位矢量.

7.32 已知矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，又 $|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=5$，求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

7.33 已知 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 26, |\vec{a} \times \vec{b}| = 72$,求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

7.34 证明:$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$.

7.35 若 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$,证明:$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

7.36 已知 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$,试证三矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

7.37 已知三角形的顶点为 $A(1, -1, 2)$,$B(5, -6, 2)$,$C(1, 3, -1)$,求顶点 B 到 AC 边上高的长度 h.

7.38 证明:三矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面的充要条件是存在三个不全为零的数 α、β、γ,使得

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}.$$

7.39 利用矢量证明三角形的余弦定理.

7.40 设三角形 ABC 的边长分别为 a、b、c,用矢量的方法证明三角形 ABC 的面积为

$$S = \sqrt{d(d-a)(d-b)(d-c)},$$

其中 $d = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

第八章　曲面方程与曲线方程

曲面方程

8.1 一动点与二定点 $A(2, -3, 2)$ 及 $B(1, 4, -2)$ 等距离,求动点轨迹的方程.

8.2 求三个坐标平面的方程.

8.3 方程 $z = 2$ 表示什么曲面?

8.4 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,半径为 R 的球面的方程.

8.5 设点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$,求线段 AB 的垂直平分面的方程.

8.6 方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y = 0$ 表示怎样的曲面?

8.7 方程 $\frac{z^2}{4} + \frac{x^2}{1} = 1$ 表示什么柱面?

空间曲线方程

8.8 试求在 xy 平面上以坐标原点为圆心的单位圆在空间直角坐标系中的方程.

8.9 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示什么曲线?

8.10 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2 \end{cases}$ 表示什么曲线?

8.11 已知两球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$,求它们的交线在 xOy 面上的投影方程.

8.12 设一个立体,由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成,求它在 xOy 平面上的投影.

第九章　空间的平面与直线

空间的平面方程

9.1　一平面通过 x 轴和点 $M_0(4,-3,-1)$，求它的方程.

9.2　一平面通过两点 $M_1(8,-3,1)$，$M_2(4,7,2)$，且垂直于平面 $3x+5y-7z+21=0$，求此平面的方程.

9.3　求过三点 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$，$M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

9.4　设一平面与 x、y、z 轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$ 三点，求这平面的方程(其中 $a\neq 0$、$b\neq 0$、$c\neq 0$).

9.5　设平面方程为 $2x-2y+z=0$，求其法式方程.

9.6　设原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 d，试证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$.

9.7　求两平面 $4x-5y+3z-1=0$ 和 $x-4y-z+9=0$ 的夹角 θ.

9.8　求从点 $(4,3,-5)$ 到平面 $x-2y+2z+18=0$ 的距离 d.

9.9　过点 $(2,0,-8)$ 作一平面，使其同时与两个平面 $x-2y+4z-7=0$ 及 $3x+5y-2z+3=0$ 垂直，求该平面方程.

9.10　作一平面，使其通过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

空间的直线方程

9.11　求过一点 $(1,0,-2)$ 且垂直于平面 $2x-y+3z=0$ 的直线的标准方程、参数方程和一般方程.

9.12　一直线过点 $(0,0,1)$，且平行于矢量 $\vec{i}+\vec{j}$，求此直线的标准方程及一般方程.

9.13　已知直线的一般方程 $\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\3x+y-2z-2=0\end{cases}$，求这直线的标准方程.

9.14　试证三点 $M_1(1,0,2)$、$M_2(-2,1,1)$ 和 $M_3(4,-1,3)$ 在同一条直线上.

9.15　求通过点 $M(2,1,3)$，且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

9.16　设点 $M_1(4,3,10)$ 与点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 对称于直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$，求点 M_2 的坐标 (x_2,y_2,z_2).

9.17　求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $L\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+z-3=0\end{cases}$ 的距离 d.

9.18　求过原点且与已知直线 $\begin{cases}x+2y+3z+4=0\\2x+3y+4z+5=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程，并求垂足.

9.19　求点 $(3,1,-4)$ 关于直线 $\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$ 的对称点.

9.20　求过点 $(1,0,7)$ 平行于平面 $3x-y+2z-15=0$ 且与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=z$ 共面的直线的方程.

第十章　二次曲面

10.1　若平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的切平面，问系数应满足什么条件？

10.2　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，试证明：以 AB 为直径的球面方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

10.3　求曲线 $\begin{cases} y=kx \\ z=0 \end{cases}$，绕 Ox 轴旋转的旋转曲面的方程.

10.4　求直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ 绕 x 轴旋转所得的曲面方程.

10.5　已知曲面的方程是

$$ax^2+by^2+cz^2+2px+2qy+2rz+d=0,$$

求证：当 $\dfrac{p^2}{a}+\dfrac{q^2}{b}+\dfrac{r^2}{c}=d$ 时，曲面是一个锥面；并求锥面的顶点坐标.

10.6　设圆锥面的轴线的方程是 $x=y=z$，且圆锥面包含直线 $2x=3y=-5z$，求圆锥面的方程.

10.7　已知圆柱面的轴线的方程是 $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-2t-2 \\ z=t+2 \end{cases}$，圆柱面通过点 $(2,-1,1)$，求圆柱面方程.

10.8　求曲线 $\begin{cases} x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ 在 xOz 坐标平面上的投影.

10.9　求直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 与双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$ 的交点.

10.10　验证：平面 $8x-6y-z=5$ 与抛物面 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=z$ 相切，并求切点 M 的坐标.