

电子学研究所

804

高等数学手册

M. H. 維戈茨基著

李永梅译



本手册是根据高等工业学校的数学教材，联合教本与手册的特点编写而成。

本手册除了具备一般手册应有的特点之外，还有其他许多特点。

手册中详细地解释了許多基本概念，用大量实例说明定理的内容，规则的适用范围。关于数学的历史知识，其概念的产生和发展有不少叙述。还提到許多著名数学家的简历。

本手册不同于一般手册，数学定理和公式有的有证明；但也不同于教本，大多数证明是不够严格和完整的。作者特别着重于介绍具体计算，如微分、积分的计算方法叙述得很多和很详细。

本手册可作为高等工业学校学生、工程技术人员的参考书。因手册中有大量例题，大多数定理、规则都用几何图形来说明，基本概念的叙述清楚易懂，特别适合于自学高等数学的读者系统学习这门课程时的参考。

高等数学手册

M. JI. 維戈茨基著

李永梅譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可证书字第054号)

民族印刷厂印刷 新华书店发行

统一书号 15010·704 开本 787×1092¹/₃₂ 印张 23¹/₈ 总页数

字数 673,000 印数 00001—17,000 定价 (G) 2.30 (含邮)

1959年12月第1版 1959年12月北京第1次印刷

目 录

在这本手册里能找到些什么 1

平面解析几何

§ 1. 解析几何学概念.....	3
§ 2. 坐标.....	4
§ 3. 直角坐标系.....	4
§ 4. 直角坐标.....	5
§ 5. 象限.....	5
§ 6. 斜角坐标系.....	6
§ 7. 曲线方程.....	7
§ 8. 线 与 点 的 相 互 位 置.....	8
§ 9. 两曲线的相互位置.....	9
§ 10. 两点间的距离.....	9
§ 11. 按定比分割线段.....	10
§ 11a. 线段的二等分.....	11
§ 12. 二阶行列式.....	11
§ 13. 三角形的面积.....	12
§ 14. 直线·就纵坐标解出的方程(斜截式).....	13
§ 15. 平行于坐标轴的直线.....	14
§ 16. 直线的一般方程.....	15
§ 17. 按直线方程作图.....	16
§ 18. 两直线平行的条件.....	17
§ 19. 两直线的相交.....	19
§ 20. 两直线垂直的条件.....	20
§ 21. 两直线的夹角.....	21
§ 22. 三点在一条直线上的条件.....	24
§ 23. 过两点的直线的方程.....	25

§ 24.	直線束	26
§ 25.	通过已知点且平行于已知直線的直線的方程	28
§ 26.	通过已知点且垂直于已知直線的直線的方程	29
§ 27.	直線与两定点的相互位置	30
§ 28.	点至直線的距离	30
§ 29.	直線的极参数	32
§ 30.	直線的法綫式方程	34
§ 31.	化直線方程成法綫式	35
§ 32.	坐标軸上的截距	36
§ 33.	直線的截距式方程	37
§ 34.	坐标的变换(問題的提出)	38
§ 35.	原点的平移	38
§ 36.	軸的旋轉	40
§ 37.	代数曲綫及其阶	41
§ 38.	圓周	43
§ 39.	圓周的圓心和半徑的求法	44
§ 40.	橢圓	46
§ 41.	橢圓的另一个定义	48
§ 42.	根据橢圓的軸作橢圓	50
§ 43.	双曲綫	51
§ 44.	双曲綫的形状·頂点和軸	53
§ 45.	根据双曲綫的軸作双曲綫	55
§ 46.	双曲綫的漸近綫	55
§ 47.	共軛双曲綫	56
§ 48.	拋物綫	57
§ 49.	按已知参数 p 作拋物綫	58
§ 50.	方程形式如 $y = ax^2 + bx + c$ 的拋物綫	58
§ 51.	橢圓和双曲綫的准綫	61
§ 52.	橢圓、双曲綫和拋物綫的共同定义	63
§ 53.	圓錐曲綫	65
§ 54.	圓錐曲綫的直徑	67

§ 55.	橢圓的直徑	67
§ 56.	雙曲線的直徑	69
§ 57.	拋物線的直徑	71
§ 58.	二階曲綫	72
§ 59.	一般二次方程	74
§ 60.	二次方程的化簡·概論	74
§ 61.	二次方程的初步變換	75
§ 62.	二次方程的結束變換	77
§ 63.	關於二次方程化簡的方法	84
§ 64.	二階曲綫可分解的判別法	85
§ 65.	求構成可分解的二階曲綫的直綫	86
§ 66.	二次方程的不變式	89
§ 67.	二階曲綫的三種類型	92
§ 68.	有心和無心二階曲綫	95
§ 69.	有心二階曲綫中心的求法	96
§ 70.	有心二階曲綫方程的化簡	98
§ 71.	方程形式為 $y = \frac{k}{x}$ 的等邊雙曲綫	100
§ 72.	方程形式為 $y = \frac{mx+n}{px+q}$ 的等邊雙曲綫	101
§ 73.	極坐標	104
§ 74.	極坐標與直角坐標的關係	106
§ 75.	阿基米德螺綫	108
§ 76.	直綫的極坐標方程	109
§ 77.	圓錐曲綫的極坐標方程	110

立體解析幾何

§ 78.	矢量和數量的概念	112
§ 79.	幾何學中的矢量	112
§ 80.	矢量代數	113
§ 81.	共綫矢量	113
§ 82.	零矢量	113

§ 83.	矢量的相等	114
§ 84.	化向量成有公起点的向量	115
§ 85.	相反的向量	115
§ 86.	向量加法	115
§ 87.	几个向量的和	117
§ 88.	向量减法	118
§ 89.	用一数乘或除向量	119
§ 90.	共线向量的相互关系	120
§ 91.	点在轴上的投影	121
§ 92.	向量在轴上的投影	122
§ 93.	向量投影的基本定理	123
§ 94.	空间直角坐标系	125
§ 95.	点的坐标	126
§ 96.	向量的坐标	127
§ 97.	用分量及坐标表示向量的公式	128
§ 98.	坐标为已知的向量的运算	129
§ 99.	用向量的起点和终点矢径表示向量的公式	129
§ 100.	向量的长度	130
§ 101.	坐标轴与向量的夹角	130
§ 102.	判定向量共线(平行)的准则	131
§ 103.	按定比分割线段	132
§ 104.	两向量的数量积	133
§ 104a.	数量积的物理意义	134
§ 105.	数量积的性质	134
§ 106.	基本向量的数量积	136
§ 107.	用向量坐标表示数量积的公式	137
§ 108.	两向量垂直的条件	138
§ 109.	两向量的夹角	138
§ 110.	三个向量的右旋系统和左旋系统	139
§ 111.	两向量的矢量积	141
§ 112.	矢量积的性质	143

§ 113.	基本矢量的矢量积	144
§ 114.	用矢量的坐标表示矢量积的公式	145
§ 115.	共面矢量	147
§ 116.	混合积	147
§ 117.	混合积的性质	148
§ 118.	三阶行列式	149
§ 119.	用矢量的坐标表示混合积的公式	152
§ 120.	共面性的坐标判别式	153
§ 121.	平行六面体的体积	153
§ 122.	双重矢量积	154
§ 123.	平面方程	154
§ 124.	坐标系中平面位置的特殊情形	156
§ 125.	平面平行的条件	157
§ 126.	平面垂直的条件	157
§ 127.	两平面的夹角	158
§ 128.	通过已知点且平行于已知平面的平面	159
§ 129.	通过三点的平面	159
§ 130.	坐标轴上的截距	160
§ 131.	平面的截距式方程	160
§ 132.	通过两点且垂直于已知平面的平面	161
§ 133.	通过一已知点且垂直于两平面的平面	162
§ 134.	三平面的交点	163
§ 135.	平面与两定点的相互位置	161
§ 136.	一点至平面的距离	164
§ 137.	平面的极参数	165
§ 138.	平面的法线式方程	167
§ 139.	将平面方程化成法线式	168
§ 140.	空间直线的方程	170
§ 141.	两个一次方程能代表直线的条件	172
§ 142.	直线与平面的相交	173
§ 143.	方向矢量	174

§ 144.	直线与坐标轴的夹角	175
§ 145.	两直线的夹角	176
§ 146.	直线与平面的夹角	177
§ 147.	直线与平面平行和垂直的条件	177
§ 148.	平面束	178
§ 149.	直线在坐标平面上的投影	180
§ 150.	直线的对称方程	182
§ 151.	将直线方程化为对称式	184
§ 152.	直线的参数方程	185
§ 153.	平面与由参数式给定的直线的交点	186
§ 154.	通过两已知点的直线方程	187
§ 155.	通过已知点且垂直于已知直线的平面方程	187
§ 156.	通过已知点且垂直于已知平面的直线方程	188
§ 157.	通过已知点和已知直线的平面方程	188
§ 158.	通过一已知点且平行于两已知直线的平面方程	189
§ 159.	通过一已知直线且平行于另一已知直线的平面方程	190
§ 160.	通过已知直线且垂直于已知平面的平面方程	190
§ 161.	自定点至已知直线的垂线方程	191
§ 162.	自已知点至已知直线的垂线长度	192
§ 163.	两直线相交或在一个平面上的条件	193
§ 164.	两已知直线的公垂线方程	195
§ 165.	两直线间的最短距离	197
§ 165a.	右旋直线对与左旋直线对	199
§ 166.	坐标的变换	200
§ 167.	曲面的方程	201
§ 168.	母线与某坐标轴平行的柱面	202
§ 169.	曲线的方程	204
§ 170.	曲线在坐标平面上的投影	205
§ 171.	代数曲面和它们的阶	207
§ 172.	球面	207
§ 173.	椭球面	208

§ 174.	单叶双曲面	212
§ 175.	双叶双曲面	214
§ 176.	二阶锥面	215
§ 177.	椭圆抛物面	217
§ 178.	双曲抛物面	219
§ 179.	二阶曲面表	220
§ 180.	二阶曲面的直母线	223
§ 181.	迴轉曲面	225
§ 182.	二阶与三阶行列式	226
§ 183.	高阶行列式	229
§ 184.	行列式的性质	231
§ 185.	计算行列式的实用方法	234
§ 186.	应用行列式研究和解方程组	236
§ 187.	两个二元方程	237
§ 188.	两个三元方程	239
§ 189.	两个三元齐次联立方程	241
§ 190.	三个三元方程	242
§ 190a.	n 个 n 元联立方程	247

数学分析的基本概念

§ 191.	引言	250
§ 192.	有理数	251
§ 193.	实数	252
§ 194.	数轴	253
§ 195.	变量与常量	253
§ 196.	函数	253
§ 197.	给定函数的方法	255
§ 198.	函数的定义域	257
§ 199.	区间	259
§ 200.	函数的分类	261
§ 201.	基本初等函数	262

§ 202.	函数的記号	262
§ 203.	数列的极限	264
§ 204.	函数的极限	266
§ 205.	函数极限的定义	268
§ 206.	常量的极限	268
§ 207.	无穷小量	269
§ 208.	无穷大量	269
§ 209.	无穷大量与无穷小量間的关系	270
§ 210.	有界量	270
§ 211.	极限概念的推广	271
§ 212.	无穷小量的基本性质	272
§ 213.	极限的基本定理	273
§ 214.	数 e	275
§ 215.	$\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限	276
§ 216.	等价无穷小量	277
§ 217.	无穷小量的比較	278
§ 217a.	变量的增量	280
§ 218.	函数在点上的連續性	281
§ 219.	在点上連續的函数的性质	282
§ 219a.	单側极限 · 函数的跃度	283
§ 220.	函数在閉区間上的連續性	284
§ 221.	在閉区間上連續的函数的性质	284

微 分

§ 222.	引言	286
§ 223.	速度	286
§ 224.	导数的定义	288
§ 225.	切綫	290
§ 226.	几个最簡單的函数的导数	291
§ 227.	导数的性质	292
§ 228.	微分	293

§ 229.	微分的力学解释	295
§ 230.	微分的几何解释	295
§ 231.	可微函数	295
§ 232.	几个最简单的函数的微分	298
§ 233.	微分的性质	299
§ 234.	表示式 $f'(x)dx$ 的不变性	299
§ 235.	用微分表示导数的公式	300
§ 236.	函数的函数(复合函数)	301
§ 237.	复合函数的微分	301
§ 238.	复合函数的导数	302
§ 239.	乘积的微分法	304
§ 240.	商(分式)的微分法	305
§ 241.	反函数	306
§ 242.	自然对数	307
§ 243.	对数函数的微分法	309
§ 244.	对数微分法	311
§ 245.	指数函数的微分法	312
§ 246.	三角函数的微分法	313
§ 247.	反三角函数的微分法	314
§ 247a.	几个供参考的例子	316
§ 248.	近似计算中的微分	318
§ 249.	微分在估计公式的误差中的应用	320
§ 250.	隐函数的微分法	322
§ 251.	曲线的参数式给定法	324
§ 252.	函数的参数式给定法	326
§ 253.	旋轮线	328
§ 254.	平面曲线的切线方程	329
§ 254a.	二阶曲线的切线	331
§ 255.	法线方程	331
§ 256.	高阶导数	333
§ 257.	二阶导数的力学意义	334

§ 258.	高阶微分	335
§ 259.	用微分表示高阶导数的公式	338
§ 260.	以参数式給定的函数的高阶导数	339
§ 261.	隐函数的高阶导数	340
§ 262.	莱布尼兹規則	341
§ 263.	罗耳定理	343
§ 264.	拉格朗日中值定理	344
§ 265.	有限增量公式	346
§ 266.	广义中值定理(科希定理)	348
§ 267.	$\frac{0}{0}$ 型不定式的决定	351
§ 268.	$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的决定	354
§ 269.	其他类型的不定式	355
§ 270.	关于泰罗公式的历史知識	357
§ 271.	泰罗公式	361
§ 272.	泰罗公式在計算函数值中的应用	364
§ 273.	增函数与减函数	373
§ 274.	判定一点上函数增和减的准則	374
§ 274a.	判定区間上函数增和减的准則	376
§ 275.	极大值与极小值	376
§ 276.	极大值与极小值的必要条件	377
§ 277.	极大值和极小值的第一个充分条件	278
§ 278.	求极大值与极小值的規則	379
§ 279.	极大值和极小值的第二个充分条件	383
§ 280.	函数的最大值与最小值的求法	386
§ 281.	平面曲綫的凸性· 拐点	393
§ 282.	凹形	394
§ 283.	求拐点的規則	395
§ 284.	漸近綫	396
§ 285.	平行于坐标軸的漸近綫的求法	397
§ 286.	不平行于纵軸的漸近綫的求法	399
§ 287.	作图法	402

§ 288.	方程的解·通論	407
§ 289.	方程的解·弦綫法	408
§ 290.	方程的解·切綫法	411
§ 291.	弦綫切綫联合法	413

积 分

§ 292.	引言	415
§ 293.	原函数	417
§ 294.	不定积分	418
§ 295.	积分的几何解釋	420
§ 296.	根据初始条件計算积分常数	423
§ 297.	不定积分的性质	424
§ 298.	积分表	425
§ 299.	直接积分	428
§ 300.	換元法(利用輔助变量的积分)	429
§ 301.	分部积分法	433
§ 302.	某些三角表达式的积分	436
§ 303.	三角代換	440
§ 304.	有理函数	442
§ 304a.	整部的取出	443
§ 305.	关于积分有理分式的方法	443
§ 306.	最簡單有理分式的积分	445
§ 307.	有理函数的积分(一般方法)	449
§ 308.	关于多項式的因式分解	456
§ 309.	关于以初等函数积出的可能性	458
§ 310.	几个含根式的积分	458
§ 311.	二項式微分的积分	460
§ 312.	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型积分	462
§ 313.	$\int R(\sin x, \cos x)dx$ 型积分	465
§ 314.	定积分	466

§ 315.	定积分的性质	470
§ 316.	定积分的几何解释	472
§ 317.	定积分的力学解释	473
§ 318.	定积分值的估计	475
§ 318a.	布尼雅科夫斯基不等式	476
§ 319.	积分的中值定理	477
§ 320.	定积分作为上限的函数	478
§ 321.	积分的微分	481
§ 322.	微分的积分·牛顿-莱布尼兹公式	482
§ 323.	利用不定积分计算定积分	485
§ 324.	定积分的分部积分法	486
§ 325.	定积分的换元法	487
§ 326.	关于广义积分	492
§ 327.	无穷限积分	493
§ 328.	不连续函数的积分	498
§ 329.	关于积分的近似计算	501
§ 330.	矩形公式	504
§ 331.	梯形公式	507
§ 332.	辛卜森公式(抛物线梯形公式)	508
§ 333.	直角坐标系中的图形面积	510
§ 334.	列定积分公式的方法	513
§ 335.	极坐标系中的图形面积	514
§ 336.	利用横截面计算体积法	516
§ 337.	迴轉体的体积	518
§ 338.	平面曲线的弧长	519
§ 339.	弧的微分	521
§ 340.	极坐标系中的弧长及其微分	522
§ 341.	迴轉曲面的面积	524
关于平面曲线和空间曲线的基本知识		
§ 342.	曲率	526

§ 343.	平面曲线的曲率中心、曲率半径和曲率圆	527
§ 344.	平面曲线的曲率、曲率半径和曲率中心的公式	528
§ 345.	平面曲线的渐屈线	532
§ 346.	平面曲线的渐屈线的性质	534
§ 347.	平面曲线的渐伸线	535
§ 348.	空间曲线的参数式	536
§ 349.	螺旋线	537
§ 350.	空间曲线的弧长	539
§ 351.	空间曲线的切线	540
§ 352.	法面	542
§ 353.	变数的矢函数	543
§ 354.	矢函数的极限	544
§ 355.	矢函数的导数	545
§ 356.	矢函数的微分	547
§ 357.	矢函数的导数与微分的性质	548
§ 358.	密切面	550
§ 359.	主法线·伴随三面形	552
§ 360.	曲线与平面的相互位置	553
§ 361.	伴随三面形的基本矢量	554
§ 362.	空间曲线的曲率中心、曲率轴和曲率半径	555
§ 363.	空间曲线的曲率、曲率半径和曲率中心的公式	556
§ 364.	关于曲率的正负号	559
§ 365.	挠率	560

级 数

§ 366.	引言	563
§ 367.	级数的定义	563
§ 368.	收敛级数和发散级数	564
§ 369.	级数收敛的必要条件	566
§ 370.	级数的余部	569
§ 371.	级数的最简单运算	570

§ 372.	正項級数	572
§ 373.	正項級数的比較	572
§ 374.	正項級数的达朗倍尔准則	575
§ 375.	收斂性的积分判別法	577
§ 376.	交錯級数·萊布尼茲准則	579
§ 377.	絕對收斂与条件收斂	580
§ 378.	适合于任何級数的达朗倍尔准則	582
§ 379.	級数的項的排列	583
§ 380.	級数的項的并組	584
§ 381.	級数的乘法	586
§ 382.	級数的除法	590
§ 383.	函数項級数	592
§ 384.	函数項級数的收斂域	592
§ 385.	关于一致收斂和非一致收斂	595
§ 386.	一致收斂与非一致收斂的定义	598
§ 387.	一致收斂与非一致收斂的几何解釋	598
§ 388.	一致收斂的准則·正規級数	599
§ 389.	級数和的連續性	600
§ 390.	級数的积分	602
§ 391.	級数的微分	606
§ 392.	幂級数	607
§ 393.	幂級数的收斂区間和收斂半徑	608
§ 394.	收斂半徑的求法	609
§ 395.	按 $x - x_0$ 的幂排列的級数的收斂域	612
§ 396.	阿貝尔定理	613
§ 397.	幂級数的运算	614
§ 398.	幂級数的微分和积分	616
§ 399.	泰罗級数	619
§ 400.	函数的幂級数展开式	620
§ 401.	初等函数的幂級数展开式	623
§ 402.	級数在积分計算中的应用	628

§ 403.	双曲线函数	630
§ 404.	反双曲线函数	633
§ 405.	双曲线函数名称的来源	636
§ 406.	关于复数	637
§ 407.	实自变量复数值函数	638
§ 408.	复数值函数的导数	640
§ 409.	正数的复数次方	641
§ 410.	欧拉公式	643
§ 411.	三角级数	644
§ 412.	关于三角级数的历史知识	645
§ 413.	函数系 $\cos nx, \sin nx$ 的正交性	646
§ 414.	欧拉-富里埃公式	648
§ 415.	富里埃级数	651
§ 416.	连续函数的富里埃级数	652
§ 417.	偶函数和奇函数的富里埃级数	655
§ 418.	不连续函数的富里埃级数	660

多元函数的微分与积分

§ 419.	二元函数	664
§ 420.	三元及三元以上的函数	665
§ 421.	给定多元函数的方法	666
§ 422.	多元函数的极限	668
§ 423.	关于多元函数无穷小量的阶	670
§ 424.	多元函数的连续性	672
§ 425.	偏导数	673
§ 426.	二元函数的偏导数的几何解释	674
§ 427.	全增量与偏增量	674
§ 428.	偏微分	675
§ 429.	关于用微分表示偏导数的公式	676
§ 430.	全微分	677
§ 431.	二元函数全微分的几何解释	678