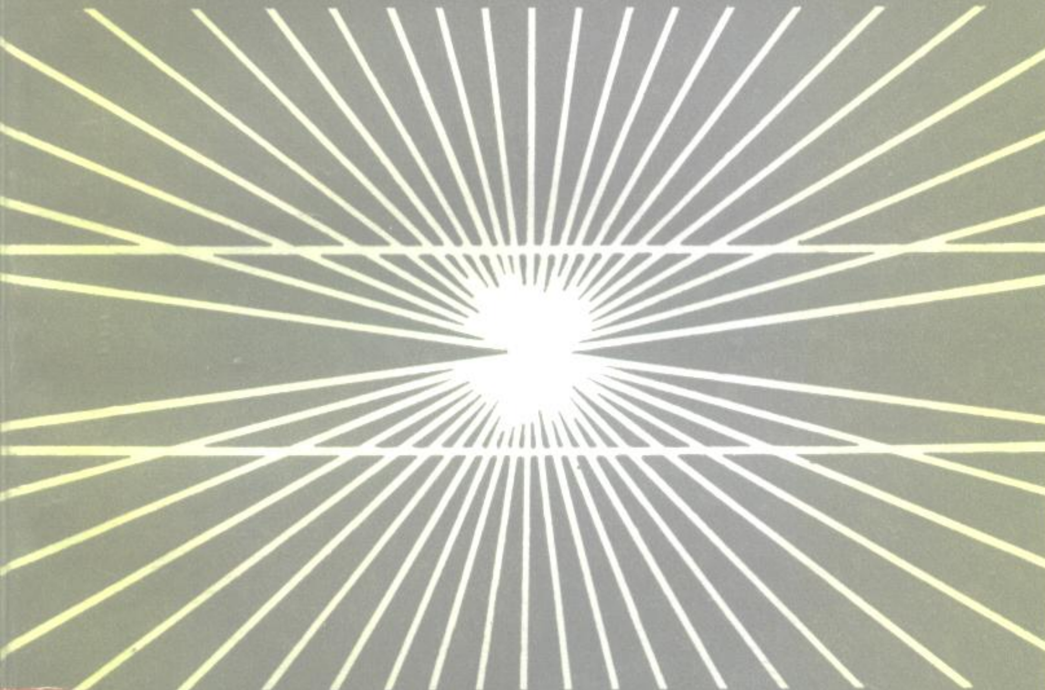
线性规划的新方法和应用

赵新泽 著



世界图书出版公司

线性规划的新方法和应用

赵新泽 著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安
1996

内 容 简 介

本书主要介绍作者多年研得的线性规划实用方法，其中包括运输和生产组织与计划中线性规划的一次最优法、等优元素法和积等优元素法，这些方法较形式化，易于理解。本书适用于数学及其应用专业的高校师生和技术人员。

线性规划的新方法和应用

赵新泽 著

世界图书出版公司北京公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京昌平百善印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1996 年 4 月第一次印刷　　印张：9.125

印数：0001－2000　　字数：18 万字

ISBN: 7－5062－2110－1/Z· 101

定价：9.70 元

前　言

线性规划，可以说是运筹学中最重要的部分，它是本世纪 40 年代迅速发展起来的一门非常重要的现代应用数学．在经济乃至军事科学等领域中，它都有着广泛的应用，并产生极大的经济效益．国际诺贝尔大奖、Fulkerson 奖和 Dantzig 奖，曾多次颁发给在线性规划方面作出重要贡献的学者，可见线性规划的重要性．

笔者对线性规划，特别是运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题，进行了 20 多年研究，从 1978 年以来，发表了一系列研究成果（见书后参考文献〔3〕—〔13〕）．尤其是 1988 年出版的著作《最佳管理数学方法》一书，阐述了本人所提出的新方法（但是未写理论证明）．

此专著是以过去已发表（或出版）的论著为基础，增加了一些新内容、新方法，并对定义、新方法和主要理论证明等，作了系统的叙述．本书包括以下三方面内容：

（一）运输问题．原来的解法是位势法（或闭回路法），本书提出了等优元素法（改进位势法而得），增加了一次最优法和多解求法，并将运输问题予以推广．由于实际问题的需要，提出了总约束与混合型运输问题的解法．

书中还新提出了发货量与收货量均为变量的运输问题，给出了初始解的两种求法和调整优化方法．

对于图上作业法，支路、单圈、多圈问题的解法，书中给出了解析性的证明，并增加了多解条件与求法．本书将我国 50 年代提出的图上作业法，从定义、定理、方法和多解等方面，进行了系统而完整的叙述．最后还提出了图上不平衡问题的求解方法．

（二）生产组织与计划中的线性规划问题．这是 Л.В. 康脱洛维奇最先提出来的，他提出的解法叫解乘数法（见书后参考文献〔18〕）．由于方法麻烦，难于推广使用，因此，这一类规划问题由于一直没有一种较好的解法，而几乎无什么发展，也很少得到实际应用．

本专著使这一类规划问题面目一新，予以全面系统的解决．书中提出的新解法主要是：① 一次最优法，② 积等优元素法，③ 多最优解求法．对于主要理论，本书作出了较为通俗易懂的解析性证明．总之，本书不仅在方法上全部予以解决，而且从定义、定理、方法和多解等方面，作了系统的描述．

书中还将 Л.В. 康脱洛维奇提出的这类规划问题，根据实际应用上的需要，进行了推广，提出了无约束，总约束，混合型规划问题和求最优解的方法．

（三）一般线性规划问题．介绍了图解法和单纯形法，第七章写入了一种比较简便的多项式解法：单纯形最佳主元法．该方法不发生同一个变量进基又出基或出基又进基的反复现象，求解速度最快，总迭代次数最少，最多只需迭代m(约束方程个数)次．计算表还可以大大简化（丹茨格也提出过此法，但未能推广）．

由于线性规划应用广，效果好，为了便于一般科技人员和广大的运筹学爱好者学习，本书尽力写得深入浅出，叙述比较详细，分析比较清楚，并列举了大量实用性例子，使读者好学易懂．

对于非专业读者和非研究人员，可以不读书中的理论证明部分，通过阅读方法和例子，便完全可以掌握这些方法和应用．

作者　1993 年 8 月 20 日

目　录

第二编　生产组织与计划中的线性规划问题

第三编　一般线性规划问题

绪　论

(一)

线性规划是运筹学最重要的一个分支，由于应用广泛，经济效益大，而得到很高的评价.

线性规划的主要内容包括：运输问题，生产组织与计划中的线性规划问题，一般线性规划问题等.

线性规划这门实用价值很大的学科，起源于1938年至1939年，是由前苏联著名数学家Л.В.康脱洛维奇从生产实践中首先提出了这方面的问题的.他发表了不少研究成果，尤其是在1937年出版的重要著作《生产组织与计划中的数学方法》一书（当时还没有线性规划这一提法）.在1941年，Л.В.康脱洛维奇又与美国F.L.西奇柯克共同发表了有关交通运输问题的文章.

由于Л.В.康脱洛维奇从实际中最早地提出了生产组织与交通运输中的线性规划问题，并给出了一些解决的方法，所以，运输问题（表上作业法）和生产组织与计划中的线性规划问题，又称为Л.В.康脱洛维奇问题.

运输问题中的图上作业法是我国独创的一种方法.1952年，我国东北计委会一个铁路运营小组，经过实践研究，首先提出了图上作业法，后来经过应用与完善，1958年得到了广泛的推广应用.

而一般线性规划问题，当美国数学家丹茨格（G.B. Dantzig）在1947年提出了单纯形法的解法以后，1948年他又与Koopmans共同研究，用了线性规划的说法，从此，该门学科正式命名为线

性规划.

丹茨格提出的单纯形法，虽然在理论上不是理想的多项式算法，但是，大量的实际应用证明，它是一种有效的好方法.

1979 年，前苏联学者哈奇扬（П.Г.Хачнян）提出了一种解法，叫椭球法．由于是多项式算法，在理论上有着很重要的意义，曾经轰动运筹学界，哈奇扬也因此在 1982 年获得了国际 Fulkerson 奖．但是，该方法应用起来，却很麻烦，还不如单纯形法简便.

1984 年，在美国工作的印度学者卡马卡（N.Karmarkar）提出另一种算法，命名为卡马卡法，不仅理论上是一种较好的多项式算法，而且，对于解决具有上千个变量以上的大型线性规划问题，明显地比单纯形法有效（计算时间少）．但是，对于变量较少的问题，以及用分块方法解决综合性的线性规划问题，单纯形法仍然显示了其它方法难于比拟的优越性.

(二)

笔者 20 多年来，主要对运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题——这两类特殊线性规划问题，进行了全面系统的研究，先后发表了一系列研究成果与论著．本书就是将研究的新方法，以及对旧方法的改进，结合具体实例，予以全面系统的叙述.

具体说来，这些新成果是:

一、运输问题

(1) 新提出了一次最优法．即对于规模较小的运输问题，提出了一次求得最优解（不必进行判别和调整）的简便方法;

(2) 提出了等优元素法．这是将原来的闭回路法、位势法加以改进而得的，此法要比前者简单;

(3) 将一般的运输问题，根据实际应用上的需要，加以推广，提出了总约束型与混合型运输问题的模型与解法；

(4) 对于表上作业法，在主要理论方面，给出了比较通俗的解析性理论证明；

(5) 将通常的最小解运输问题解法，结合实例，推广应用到工业生产、企业管理等方面的最大解运输问题上去；

(6) 对于我国独创的简便的图上作业法，给出了解析性的理论证明，并从定义、定理、方法等，对这一方法作出了全面、系统、完整的叙述；

(7) 对于表上作业法和图上作业法，均提出了多（最优）解的存在条件与求法；

(8) 第三章提出了发货量与收货量为变量的运输问题及其解法。实际上按照变收发量制订运输问题计划，效果更好，也更符合实际情况．本书给出了这类问题初始解的两种求法，以及进行检查优化，求近似最优解的方法．

二、生产组织与计划中的线性规划问题

本论著对于这一类线性规划问题，从理论到方法，全部都是新的．

(1) 提出了一次最优法。即一次求出最优解的方法；

(2) 提出了通用于解决这一类问题的一般方法：积等优元素法。此法易于程序化，用计算机求解；

(3) 推广了这一类规划问题，提出了生产组织与计划中无约束、总约束与混合型规划的模型、解法与应用；

(4) 提出了多（最优）解的条件与求法；

(5) 给出了全部方法解析性的主要理论证明．

三、一般线性规划问题

写进了一种好方法——单纯形最佳主元法，此方法迭代次数最少，求解速度最快．迭代次数不超约束方程个数 m，是一个简

便的多项式算法．它根除了循环现象，计算表还可以大为简化．

(三)

线性规划这门学科自从产生以来，就显示了极大的实用价值．如美国 1972 年统计了 107 个公司，在用各种方法解决公司的各种问题当中，有 19% 的问题，就是用线性规划的方法解决的．

我国在 50 年代，不仅把线性规划应用到生产实际中去，并创造性地提出了非常简便的图上作业法．尤其近十多年来，由于我国科学技术和文化教育飞速发展，使得线性规划和其它应用科学，都得到了更广泛、更深入、更大规模的应用，对我国的经济建设，起到了一定的优化促进作用．例如，我国机械工业部 1982 年对全国重点汽车制造厂的年生产计划，用线性规划的方法进行优化以后，仅年利润就比原计划增加三千多万元．

人类社会总是不断进步的，科学技术总是不断发展的，我们相信，随着这些进步和发展，线性规划在不断广泛应用与深入研究的过程中，肯定还会有新发现和新创造，线性规划这门重要学科，将越来越显得光辉灿烂．

第一编　运输问题

运输问题是制订最佳运输方案，使一批发点中的货物，运送到一批收点时，所花的总运费（或总吨公里）为最少．

其实，所谓运输问题，是Л.В.康脱洛维奇最先研究交通运输问题的解法而得名的（因此，运输问题也可称为Л.В.康脱洛维奇问题）．它的解法，除了主要用于解决交通运输中的线性规划问题外，还可用于工农业生产管理等各方面同类型的线性规划问题．

第一章　表上作业法

第一节　运输问题的数学模型

运输问题一般的描述是：设有一种货物，共有 m 个发货地点（简称发点）；A_1, A_2, …，A_m，发货量（简称发量）分别是 a_1, a_2, …，a_m；共有 n 个收货点（简称收点）：B_1, B_2, …, B_n, 而收货量（简称收量）分别为 b_1, b_2, …，b_n，设第 i 个发点 A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）对第 j 个收点 B_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的货物供应量为 x_{ij}（又叫解变数）．两地的距离（或运价）为 c_{ij}，如表 1.1 与表 1.2.

表 1.1　规划问题

距离或运价 / 发点＼收点	B_1,	B_2,	…,	B_n	发量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
收量	b_1	b_2	…	b_n	

表 1.2　解

解 / 发点＼收点	B_1,	B_2,	…,	B_n	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
收量	b_1	b_2	…	b_n	

则问题的解析数学模型为：求解 (x_{ij}) $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m, \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n, \\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1, 2, \cdots, m; \ j=1, 2, \cdots, n), \end{cases} \tag{1.1}$$

使目标函数（总运费或总吨公里）

$$\begin{aligned} S=&c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots \\ &+c_{2n}x_{2n}+\cdots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots+c_{mn}x_{mn} \end{aligned} \tag{1.2}$$

达到最小。其中，假设总发货量等于总收货量，即

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n, \tag{1.3}$$

称为运输规划问题的平衡条件，满足该条件的问题，称为平衡问题，否则，称为不平衡问题．

这便是运输问题的数学模型．此模型又可简写为：求解 (x_{ij}) $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \ (i=1, 2, \cdots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \ (j=1, 2, \cdots, n), \\ x_{ij}\geqslant 0 \ (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n), \end{cases} \tag{1.1'}$$

$$\min \ S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \ x_{ij} \tag{1.2'}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.3'}$$

凡满足约束条件（1.1′）的解（x_{ij}），称为可行解（应用上叫可行方案），只有既满足约束条件又使目标函数 S 达到最小的解（x_{ij}'），才是规划的最优解（应用上叫最优方案）.

解（x_{ij}）（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）中的每个数 x_{ij}，称为解变数．约束条件中共有 $n+m$ 个方程，但有一个平衡条件，理论上可以证明，约束方程组中变量系数矩阵和增广矩阵的秩均是 $m+n-1$，所以，从中可以解出 $m+n-1$ 个非零变数．也即，对于 m 行 n 列的运输问题，初始解与其它任一可行解中，应有 $m+n-1$ 个非零数，满足这个条件的问题，称为非退化问题，其可行解又称为基本可行解；否则，非零数少于 $m+n-1$ 个的可行解，称为退化解，对应的问题，称为退化问题.

对于任一运输问题，求最优解时都是对平衡情况讨论的，而不平衡问题，必须首先化为平衡情况，再求其解.

规划问题表 1.1 中的每个数（距离、运价、…）c_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）均称为元素，c_{ij} 的全体叫规划问题的元素表，可用矩阵（c_{ij}）表示.

线性规划运输问题，在交通运输中，一般是要求目标函数 S 达到最小，这种问题又称为最小值问题或最小解问题，其解叫最小解．而应用于工农业生产等管理方面属于此类型问题时，往往是要求目标函数 S 达到最大值，因此称这种问题为最大值问题或最大解问题，其解叫最大解．最小解和最大解又称为最优解.

由约束条件（1.1′）知，运输问题中共有 mn（$m, n\geqslant 2$）个变数．因系数矩阵与增广矩阵的秩为 $m+n-1$，只有 $m+n-1$ 个独立方程，而 $mn>m+n-1$（$m, n\geqslant 2$），故约束方程组有无穷多解．线性规划运输问题的实质，就是从约束线性方程组无穷多解中，求出使目标函数 S 取得最小值（对于最小解问题）或最大值

（对于最大解问题）的解，即最小解或最大解，也即最优解．

第二节　一次最优法

一次最优法就是一次求得问题最优解的方法，而无须判别和调整．

定义 1　设规划元素表 $M=(c_{ij})$ $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 中，存在元素 $c_{i_0j_0}$，使得所有 $i\neq i_0$, $j\neq j_0$；如图 1.1.

（1）对于最小解问题，

$$c_{i_0j_0}+c_{ij}\leqslant c_{i_0j}+c_{ij_0}; \qquad (1.4)$$

（2）对于最大解问题，

$$c_{i_0j_0}+c_{ij}\geqslant c_{i_0j}+c_{ij_0}. \qquad (1.5)$$

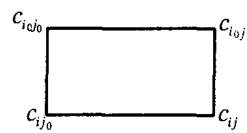


图 1.1

则称 $c_{i_0j_0}$ 为 $M=(c_{ij})$ 中的一个全优元素．

即，若元素 $c_{i_0j_0}$ 和表中其它元素为顶点构成包含 $c_{i_0j_0}$ 的全部矩形中，对于最小解问题，$c_{i_0j_0}$ 与对角元素 c_{ij} 的和，不大于另外两对角顶点元素之和；对于最大解问题，$c_{i_0j_0}$ 与 c_{ij} 的和，不小于另外两对角顶点元素的和，在这两种情况下，均称 $c_{i_0j_0}$ 为表上的全优元素．

引理　设 $c_{i_0j_0}$ 是规划元素表 $M=(c_{ij})$ 中的一个全优元素，则 $c_{i_0j_0}$ 对应的变数 $x_{i_0j_0}$ 是规划最优解 (x_{ij}) 中的一个解变数，而（对于唯一解）

$$x_{i_0j_0}=\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}. \qquad (1.6)$$

证　用反证法．设 $x_{i_0j_0}$ 不是规划最优解 (x_{ij}) 中的解变数，即 $x_{i_0j_0}\neq\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$。必有

$$x_{i_0j_0}<a_{i_0}, \quad x_{i_0j_0}<b_{j_0}.$$

那么在第 i_0 行与第 j_0 列上，必存在最优解 (x_{ij}) 中解变数 $x_{i_0j_1}>0$, $x_{i_1j_0}>0$.

现取　$\delta=\min\{x_{i_0j_1}, x_{i_1j_0}\}$ 为调整数作新解。令新解变数

$$x'_{i_0j_0}=x_{i_0j_0}+\delta,\quad x'_{i_0j_1}=x_{i_0j_1}-\delta,$$
$$x'_{i_1j_0}=x_{i_1j_0}-\delta,\quad x'_{i_1j_1}=x_{i_1j_1}+\delta。$$

其它解变数不变：$x'_{i_rj_r}=x_{i_rj_r}$ ($i_r\neq i_0$, i_1; $j_r\neq j_0$; j_1)，得新解 $X'=(x'_{ij})$，而调整前后的目标函数分别为

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+c_{i_0j_1}x_{i_0j_1}+c_{i_1j_0}x_{i_1j_0}+c_{i_0j_0}x_{i_0j_0}$$
$$+c_{i_1j_1}x_{i_1j_1}\ (i\neq i_0\ ,\ i_1;\ \ j\neq j_0,\ j_1).$$
$$S'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+c_{i_0j_1}x'_{i_0j_1}+c_{i_1j_0}x'_{i_1j_0}+c_{i_0j_0}x'_{i_0j_0}+c_{i_1j_1}x'_{i_1j_1}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+c_{i_0j_1}(x_{i_0j_1}-\delta)+c_{i_1j_0}(x_{i_1j_0}-\delta)$$
$$+c_{i_0j_0}(x_{i_0j_0}+\delta)+c_{i_1j_1}(x_{i_1j_1}+\delta)$$
$$=S+\delta(c_{i_0j_0}+c_{i_1j_1}-c_{i_0j_1}-c_{i_1j_0})。$$

因 $c_{i_0j_0}$ 是全优元素，而且对于唯一解，若是最小解问题，由定义 1 中（1.4）式知，S' 的第二项为负，得 $S'<S$；若为最大解问题，由（1.5）式知，S' 的第二项为正，得 $S'>S$．说明 $x_{i_0j_1}$ 与 $x_{i_1j_0}$ 不是最优解中的解变数．与假设相矛盾．故引理为真．

定理 1 设 $c_{i_1j_1}$ 是规划元素表 $M=(c_{ij})$ 中的一个全优元素，得变数

$$x_{i_1j_1}=\min\{a_{i_1},\ b_{j_1}\}$$

消去第 i_1 行元素（若 $x_{i_1j_1}=a_{i_1}$）或第 j_1 列元素（若 $x_{i_1j_1}=b_{j_1}$），在余下元素表中，又选出全优元素 $c_{i_2j_2}$，得变数

$$x_{i_2j_2}=\min\{a_{i_2},\ b_{j_2}\}$$

再消去第 i_2 行或第 j_2 列元素，……．直到最后，得变数

$$x_{i_{m+n-1},\ j_{m+n-1}}=a_{i_{m+n-1}}=b_{j_{m+n-1}}$$