同济大学数学辅导系列丛书

工程数学解题方法与同步训练（上册）

同济大学基础数学教研室 编

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书

工程数学解题方法与同步训练(上册)

同济大学基础数学教研室　编

同济大学出版社

责任编辑　李炳钊
封面装帧　潘向蓁

同济大学数学辅导系列丛书
工程数学解题方法与同步训练(上册)
同济大学基础数学教研室　编
同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号　邮编:200092)
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本:850×1168　1/32　印张:11.375　字数:326 千字
1999 年 1 月第 1 版　　1999 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—10000　　定价:15.00 元
ISBN-7-5608-1928-1/O·166

0394127

内容提要

本书是同济大学数学辅导系列丛书之一，内容包括线性代数和复变函数两部分，是为配合同济大学数学教研室编的《线性代数》（第二版）和西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》（第三版）编写而成．章节顺序、内容编排与上述教材一致．每章由基本要求与主要内容及基本习题与同步练习两部分构成．基本要求与主要内容的归纳既简洁又翔实，使读者明确要求，抓住要点；选编的例题和习题，基本而又典型，广泛而不重复，与教材紧密衔接，同步练习均给出解答，读者可在独立思考练习的基础上，进行对照参考．每一部分末还附有模拟考试试题，供读者自我测试．

本书可作为各类大专院校师生的教学参考书，对参加硕士研究生数学入学考试的考生也是一本很有帮助的复习参考书．

前　言

工程数学解题方法与同步训练分上、下两册，是同济大学数学辅导系列丛书之一，上册内容包括工程数学中线性代数和复变函数两部分．工程数学是高等院校数学基础课程，其中线性代数是硕士研究生入学考试数学试卷必考科目．为了适应广大读者学习和复习的需要，我们编写了这本书．

本书是根据原国家教委审定的高等工业学校"线性代数课程教学基本要求"和"复变函数课程教学基本要求"并分别按照同济大学数学教研室编的《线性代数》(第二版)和西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》(第三版)(均由高等教育出版社出版，以下称为两教材)的章节顺序编写．对超出基本要求的内容加了"*"号，这些内容对某些专业还是很基本和重要的．

本书编写体例与本系列其他丛书一致．每章由基本要求与主要内容及基本题型与同步练习两部分组成．本书旨在帮助、指导广大读者把握基本概念和掌握基本解题方法，在此基础上融会贯通；同时，本书的篇幅和内容须与相应课程的学时数相适应，因此，例题和练习题都是精心选编的，题型基本而又典型，广泛而不重复，与两教材紧密衔接，是课堂教学的补充和提高，但又完全不超出基本要求．同步练习均附有解答，供读者自查．本书强调基本概念和基本解题方法，强调与两教材的配合，内容的编排，章节的次序，定义定理的叙述，记号术语的使用均与两教材一致．编者相信，读者认真阅读本书，必会有不小裨益．

本书可供大专院校、电大、职大、夜大等广大学生学习线性代数和复变函数时阅读和参考(特别是使用两教材的)，对参加硕士研究生数学入学考试的学生也是一本很有帮助的复习参考书．

全书由徐建平同志策划；线性代数部分由胡志庠、徐建平、黄

临文同志编写并由胡志庠同志总撰定稿；复变函数部分由应明、蒋福民同志编写并由应明同志总撰定稿．他们集多年的教学实践的经验编写了这本书．本书的编写和出版得到了同济大学应用数学系诸多教师和同济大学出版社李炳钊副编审的关心和支持，编者在此表示衷心的感谢．由于编者水平，书中错误之处在所难免，恳切希望同行和广大读者批评指正．

编　者

1998年4月于上海

目　录

线性代数

第一章　行列式及其计算 ……………………………… (3)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (3)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (7)
第二章　矩阵及其运算 ……………………………… (33)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (33)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (36)
第三章　向量的线性相关性与矩阵的秩 ………………… (59)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (59)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (63)
第四章　线性方程组 ……………………………… (85)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (85)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (87)
第五章　相似矩阵及二次型 ……………………………… (105)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (105)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (109)
* **第六章　线性空间与线性变换** ……………………………… (138)
　一、基本要求与主要内容 ……………………………… (138)
　二、基本题型与同步练习 ……………………………… (141)
线性代数期终模拟考试(一) ……………………………… (160)
线性代数期终模拟考试(二) ……………………………… (167)

复变函数

第一章　复数与复变函数……………………………（177）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（177）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（180）

第二章　解析函数……………………………………（204）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（204）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（205）

第三章　复变函数的积分……………………………（221）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（221）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（224）

第四章　级　数………………………………………（245）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（245）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（247）

第五章　留　数………………………………………（267）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（267）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（273）

第六章　保角映射……………………………………（308）

一、基本要求与主要内容 ……………………………（308）

二、基本题型与同步练习 ……………………………（315）

复变函数期终模拟考试(一)…………………………（352）

复变函数期终模拟考试(二)…………………………（354）

线性代数

第一章　行列式及其计算

一、基本要求与主要内容

(一) 基本要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.

2. 熟练掌握行列式的性质,会利用行列式的性质化简及计算行列式.

3. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.

4. 会用克莱姆法则求解线性方程.

本章重点:行列式计算.

(二) 主要内容

1. n 阶行列式

n 阶行列式是一个数,表示 $n!$ 项的代数和,其定义为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,和号是对所有 n 级排列求和.

2. 行列式性质

(1) 行列式的行与列对调,行列式的值不变;对调行列式的两行(列),行列式仅改变符号.

(2) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等

于用数 k 乘以此行列式，或者行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

(3) 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例，则此行列式为零.

(4) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和.

比如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

3. 行列式按行(列)展开

(1) 把行列式中元素 a_{ij}所在第 i 行，第 j 列划去后所成的子行列式称为元素 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}. 而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式.

(2) 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应于它们的

代数余子式的乘积的和. 即 $D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$或 $D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$. 此性质也称为行列式按行(列)展开法则.

(3) 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j)$或$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j)$.

4. 克莱姆法则

考虑含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}, \tag{1.1}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,线性方程组(1.1)称为非齐次方程组,当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,线性方程组(1.1)则称为齐次方程组.

(1) 如果线性方程组(1.1)的系数行列式不等于零,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么线性方程组(1.1)有唯一解: $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$. 其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 i 列的元素用方程组(1.1)右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 如果线性方程组(1.1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则齐次线性方程组没有非零解；如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零.

5. 一些常见的行列式

(1) 对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.（未标明的元素均为零，下同）

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_{n-1} & & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) 上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(3) 范德蒙行列式

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j). \tag{1.2}$$

二、基本题型与同步练习

(一) 行列式计算

为了使说明更为简炼,我们使用以下记号:以 $r_i(c_i)$表示行列式第 i 行(列),交换 i,j 两行(列)记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;第 i 行(列)乘以 k,记为 $kr_i(kc_i)$;第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k(c_i\div k)$;以数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上. 记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 1 计算下列各行列式:

(1) $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 \div 100} 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - 3c_1} 100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \times (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \times 20 = 2000.$$

(2) $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$（其中 a, b, c, d, e, f 不为零）.

解 $D \xlongequal[r_3 \div f\ c_1 \div b]{r_1 \div a\ r_2 \div d} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abcdef \times 2 \times (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcdef.$$

(3) $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解 将 D_4 按第一列展开

$$D_4 = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_4\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

(4) $D_4=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$

解 $D_4 \xlongequal[(i=1,2,3)]{c_{i+1}-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=0.$$

(5) $D_4(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

解法 1 用类似于证明范德蒙行列式的方法,建立递推关系式.

$$D_4(a,b,c,d) \xlongequal[\substack{r_3-ar_2 \\ r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$