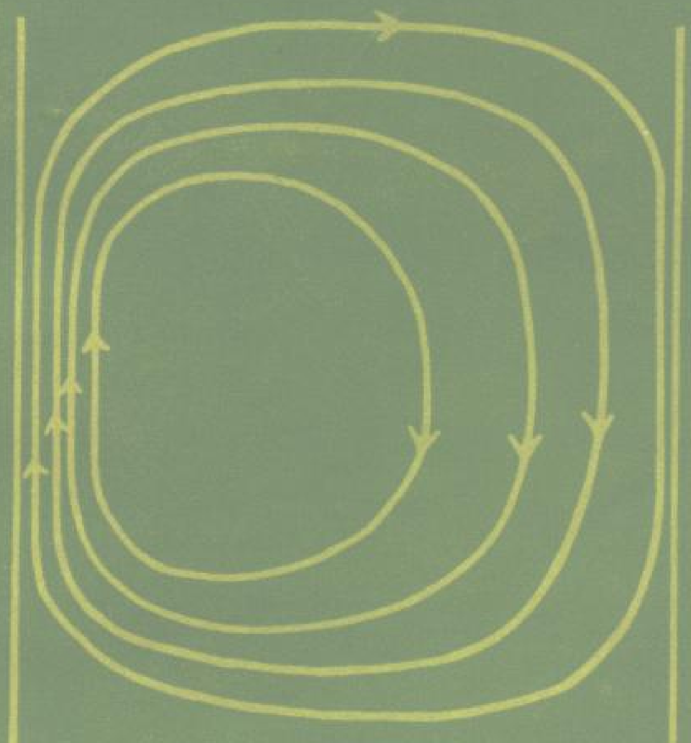
地球物理流体动力学数学理论导论

S. 弗里德兰德 著



科学出版社

地球物理流体动力学数学理论导论

地球物理流体动力学数学理论导论

S. 弗里德兰德 著

魏 毅 译

余宙文 校

科 学 出 版 社

1985

内 容 简 介

本书介绍的是地球物理流体动力学的数学理论。作者在简单论述流体动力学的基本概念之后，系统地论述了地球物理流体动力学的数学理论和物理概念，并介绍了有关理论的实验、应用和研究成果。全书共 16 章。第一至第三章是预备性知识；第四至第九章讨论均匀、旋转流体；第十至第十六章讨论层化、旋转流体。在附录中介绍了分析奇异摄动问题的边界层方法。书中附有习题，不但有助于概念的理解，而且对于如何应用所学理论也颇有启发。

本书可供海洋学、气象学、工程学和应用数学方面的科技工作者和大专院校师生参考。

S. Friedlander

AN INTRODUCTION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF GEOPHYSICAL FLUID DYNAMICS

North-Holland Publishing Company, 1980

地球物理流体动力学

数学理论导论

S. 弗里德兰德 著

魏 毅 译

余宙文 校

责任编辑 赵徐懿 谭卫嵛

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1985年 5 月第一次印刷 印张：6 3/8

印数：0001—3,000 字数：141,000

统一书号：13031 · 2905

本社书号：4053 · 13—15

定价： 1.50 元

中译本前言

地球物理流体动力学研究的是包括海洋和大气在内的地球上流体的大尺度运动。众所周知，海洋和大气与人类的生活是密切相关的。在人类文明高度发达的今天，海洋和大气更是有待人们进行开拓的广阔的领域。近年来，海洋和大气的和平利用以及它们在国防上的重要性日益受到世界各发达国家的重视，我国也在这些方面投入了大量的人力和物力，并把开发海洋提到了重要的议事日程上。作为一门边缘学科，地球物理流体动力学在较短的时间内发展很快。我国要迎头赶上先进国家，除了需要广大地球物理工作者结合本国实际努力探索外，还应该广泛吸取国外的先进经验。为此，我们翻译了这本地球物理流体动力学数学理论导论。希望它在有关的教学和科研中能具有一定的参考价值。

本书作者 Susan Friedlander 是美国芝加哥的伊利诺斯大学数学系教授。他在本书中侧重论述了地球物理流体动力学的数学理论，具有逻辑性强，简明易懂的特点。由于国内有关地球物理流体动力学的教材甚少，特别是缺少从数学角度系统地研究地球物理流体动力学的专著，我们特意为地球物理学科的科技工作者和大专院校师生翻译了这本书。对原书中的一些错误我们在译文中作了订正并在必要之处加了注解。

译文错误或不当之处，请读者批评指正。

译者

1984年3月于青岛

序　　言

本书是根据著者在美国芝加哥的伊利诺斯大学和英国牛津大学教授的研究生课教材编写而成的。其用意不仅是作为海洋学、气象学和工程学专业学生的补充读物，而且是为应用数学专业的研究生提供一本基础教材。书中假定读者熟悉流体动力学的基础知识。对渐近分析知识有所了解的读者在阅读本书时会更顺利一些。作为一门课，书中内容的选择在一定程度上反映了作者本人的偏爱。关于非线性旋转流体动力学方面的问题将不在本书中讨论。然而，为了使读者更易于掌握理论地球物理流体动力学的基本内容，书中从原理上对它们作了介绍。

L. Nachbin 教授曾细心审阅了全文； V. Barcilon, F. Busse, E. Isaacson, N. Lebovitz 和 W. Siegmann 等教授对本书提出过宝贵的意见；在写作过程中，作者还得到了牛津大学数学院的支持和美国国家科学基金会 MCS 78-01167 和 MCS 79-01718 的资助。对此一并深表谢意。

最后，作者感谢 Shirley Roper 夫人出色地完成了本书的打字工作。

S. 弗里德兰德
芝加哥伊利诺斯大学
1980年1月

目　　录

引　论

许多世纪以来，为了预报周围环境中水和大气的运动，人们在了解海洋和大气的属性方面做了种种尝试。在古代，这方面的知识几乎完全来源于对实际观察的记载。然而，在上个世纪中，用来研究这一重要科学分支的理论、数值方法和实验技术等各方面都得到了很大的发展。

广义地说，地球物理流体动力学研究的是地球上流体的运动。本书的宗旨则是从数学上描述其中的一类现象。在我们将研究的问题中，运动的长度尺度是足够大的，以致地球的旋转对流体的运动有显著的影响。因此，我们不准备探讨许多重要的小尺度问题（如与表面张力有关的问题），只讨论描述海洋和大气运动基本模式的数学问题。由于在这些问题中常常出现的偏微分方程具有不寻常的、重要的性质，因此我们的问题不仅与地球物理学有关，而且对数学家也颇有吸引力。

在本书中，我们通过介绍求解旋转流体运动的数学理论来研究地球物理流体动力学的有关理论问题。在后面的一些章节中讨论了海洋或大气特有的现象，即重力作用下非均匀流体的运动，这种问题显然也属于地球物理流体动力学的范畴。所以，本书前半部讨论旋转的均匀流体，而后半部则处理同时受旋转和层化作用的流体运动。

我们循序渐进地研究所涉及的数学理论。首先考虑描述最简单的物理现象的数学方程，即均匀、无粘、旋转流体偏离平衡状态时的小扰动方程。接着，我们在问题的数学模型中进一步引入有关的物理因素，从而在原来的基础上逐步增加

数学问题的复杂性。我们将在合适的章节中介绍演示旋转流体特征现象的实验室实验。由于受内容范围的限制，我们没有讨论数学在地球物理学中许多应用的细节。但是，我们将提到有关的一些问题，并对三个具有代表性的例子进行较为深入的讨论。在海洋方面的例子中，用边界层理论说明大西洋西部湾流的存在。在气象方面我们将指出：与大气受热纬向变化有关的不稳定性对气旋波的产生有着决定性的作用。我们还比较详细地介绍了天体物理学方面的一个应用问题，即合理地提出一个偏微分方程和适当的边界条件，用它们所构成的数学问题的解，阐明太阳旋转减弱这一争论已久的难题。

为了使初学者了解问题的本质，本书详细地介绍了建立每个数学模型的基本方法和过程。不仅如此，本书还为想深入探讨个别论题的读者提供了相当广泛的参考文献。在参考文献中不仅包括某些领域里新近的发展，而且包括一些基本教材、早期开创性的论文以及近来对已有成果的概括。我们列出下列基本教材供选择使用。学生们会发现，在学习地球物理流体动力学时，它们都是很好的参考书。

流体动力学	Batchelor	[5]
	Lamb	[40]
旋转流体	Greenspan	[27]
	Carrier	[8]
分层流体	Howard	[33]
	Yih	[74]
地球物理流体动力学	Pedlosky	[51],[52]
海洋学	Kamerkovich	[37]
	Krauss	[39]
	Pillips	[59]

在附录中我们简单介绍了边界层方法在研究奇异摄动问题中的应用。关于渐近分析这一分支学科的详细说明，读者可参阅文献[60]和[70]。

第一章 运动方程

我们要研究的问题之特征是地球旋转对流体运动具有显著的作用。为了了解地球旋转在地球物理学中的意义，我们来考察下列数据

$R \sim 6 \times 10^8$ 厘米　　（地球半径），

$\Omega \sim 7.3 \times 10^{-5}$ 秒$^{-1}$　　（角速度）。

由此可知，赤道地区的物体相对于地球转轴的旋转线速度之量级为 4×10^4 厘米 · 秒$^{-1}$。这样的速度与大气中典型风速相比是非常大的（例如，飓风速度的量级是 10^4 厘米 · 秒$^{-1}$）。同时，由地球旋转产生的涡度（涡度是度量流体运动中流体元自转程度的物理概念）比起海洋或大气中典型的大尺度运动的涡度也是非常大的。因而，当运动的水平长度尺度可与地球半径相比时，必须考虑地球旋转的影响。

研究旋转流体的运动时，用旋转坐标系表示运动方程往往是方便的。下面，我们来简要地考察一下旋转流体的二维运动。若一平面以不变的角速度 Ω 绕 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 轴旋转，令 $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ 表示惯性参照系的笛卡儿单位矢量，$(\hat{\boldsymbol{i}}', \hat{\boldsymbol{j}}', \hat{\boldsymbol{k}}')$ 表示旋转参照系的笛卡儿单位矢量。

在 t 时刻这些单位矢量满足下列关系

$$\hat{\boldsymbol{i}}' = \hat{\boldsymbol{i}} \cos \Omega t + \hat{\boldsymbol{j}} \sin \Omega t, \tag{1.1}$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}' = -\hat{\boldsymbol{i}} \sin \Omega t + \hat{\boldsymbol{j}} \cos \Omega t。 \tag{1.2}$$

令 d/dt 表示跟随质点的微商*，$\boldsymbol{A}$ 为一矢量并可记作

---

* 绝对微商。——译者注

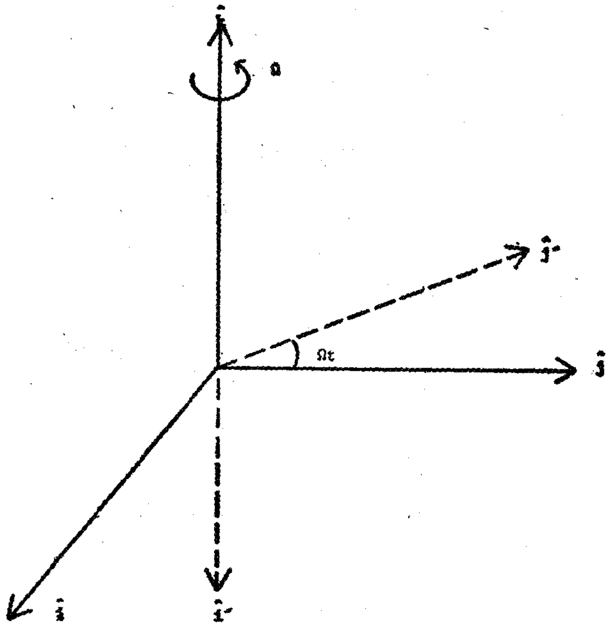


图 1 惯性坐标系和旋转坐标系

$$\boldsymbol{A} = A_1\hat{\boldsymbol{i}} + A_2\hat{\boldsymbol{j}} + A_3\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \text{（惯性参照系）}$$
$$= A_1'\hat{\boldsymbol{i}}' + A_2'\hat{\boldsymbol{j}}' + A_3'\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \text{（旋转参照系）。}$$

于是

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{dA_1'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dA_2'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + A_1'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + A_2'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt}$$
$$= \frac{dA_1'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dA_2'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \Omega(A_1'\hat{\boldsymbol{j}}' - A_2'\hat{\boldsymbol{i}}')\text{。}$$

在得到后一等式时利用了(1.1)和(1.2)式。特别地，若取 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 是由共同坐标系原点量起的质点的矢量半径，便有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_I} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt_R} + \Omega\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{r}\text{。}$$

其中 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_I}=\boldsymbol{q}_I$ 是质点在惯性参照系中的速度，$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_R}=\boldsymbol{q}_R$ 是质点在旋转参照系中的速度(注意,若质点固定在旋转坐标系上,则 $\boldsymbol{q}_R=0$, $\boldsymbol{q}_I=\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{r}$)。

现令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{q}_I$，可得两个参照系中加速度的关系

$$\frac{d\boldsymbol{q}_I}{dt_I}=\frac{d}{dt_R}[\boldsymbol{q}_R+\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{r}]+\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times[\boldsymbol{q}_R+\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{r}]$$

$$=\frac{d\boldsymbol{q}_R}{dt_R}+2\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{q}_R+\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times(\Omega\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{r})。\qquad(1.3)$$

在后一等式右边,第一项是旋转坐标系中的加速度;第二项称为科氏加速度;第三项称为向心加速度*。稍做推导，我们可以用一般曲线坐标表示(1.3)式的一般形式。

下面,让我们回忆一下支配粘性流体运动的主要方程,即 Navier-Stokes 方程和连续方程。在惯性参照系中，它们可由下列两个矢量方程表示

$$\frac{d\rho}{dt_I}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{q}_I=0,$$

(这是质量守恒方程。它给出了下述事实的数学描述,即在没有源或汇的情况下,不论各个流体质点如何运动,流体的总质量保持不变。)

$$\rho\frac{d\boldsymbol{q}_I}{dt_I}=-\nabla P+\rho\nabla G+\mu\nabla^2\boldsymbol{q}_I+\frac{\mu}{3}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{q}_I。$$

[这是动量守恒方程。它是牛顿运动定律(力 = 质量×加速度)在流体系统上运用的结果]。

由此,我们可以在匀速旋转坐标系中将 Navier-Stokes 方程和连续方程表示为

$$\frac{d\rho}{dt_R}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{q}_R=0,\qquad(1.4)$$

---

* 原书误为离心加速度。——译者注

$$\rho\left[\frac{d\boldsymbol{q}_R}{dt_R}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{q}_R\right]$$

$$=-\nabla P+\rho\nabla\left(G+\frac{\Omega^2r^2}{2}\right)+\mu\nabla^2\boldsymbol{q}_R$$

$$+\frac{\mu}{3}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{q}_R。\tag{1.5}$$

[这里要提醒读者注意，在惯性坐标系和旋转坐标系中，只有矢量的时间导数是不同的，标量的时间导数以及各量的空间导数(如梯度、散度)是相同的。] 上面两式中各符号的意义如下。

$\rho=$ 密度，

$P=$ 压强，

$G=$ 地球引力势，

$\mu=$ 动力学粘性系数。

我们看到，离心力可用某个标量的梯度表示，因此它仅对有效引力作微小的修正。科氏力则不然。我们将说明科氏力在决定运动方程的性质方面起着相当重要的作用。为简单起见，去掉下标 R。在下面各章里我们将利用(1.4)和(1.5)式构成的方程组，对地球物理流体动力学的问题进行研究。此方程组支配着粘性流体在以匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的旋转坐标系中的运动。

为了得到封闭方程组，我们必须在上述方程中加上状态方程

$$\rho=\rho(P,T)\qquad(\text{其中 }T\text{ 是温度})$$

以及由热力学第一定律导出的关于 T 的方程。在本书的前半部，仅考虑均匀流体的简单情况，即 ρ 和 T 是常量。这当然会导致方程(1.4)和(1.5)的部分简化。在后面的章节里，我们引进流体层化的作用，这对地球物理学的某些问题将产生重

要的影响。然而，考虑到所研究问题的类型，本书不采用普通的状态方程和热力学方程，而是利用最简单而合理的关系来近似表示流体(如水或空气)的这些方程。我们假设密度与温度成线性关系

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \alpha (T - T_0), \tag{1.6}$$

并设内能 e 正比于温度：$e = cT$。从物理上讨论可知(在流体内无热源时)，T 满足方程

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{c} \nabla^2 T + \text{非线性项}, \tag{1.7}$$

其中 k 是热扩散系数。注意，在采用简单关系(1.6)和(1.7)时，忽略了流体的某些物理性质，但保留了对多数地球物理问题有意义的流体层化的特征。