现代管理教育与培训系列教

航空工业出版社

宁宣熙 编

线性规划在管理中的应用

XIANDAI GUANLI JIAOYU YU PEIXUN

线性规划
在管理中的应用

宁宣熙　编

航空工业出版

1989

内 容 提 求

在本书的第一章、简要地介绍了线性代数的基础知识，它是为学习线性规划的基本理论专门选编的，内容简要浓缩。第二章介绍了线性规划的基本原理和算法、使读者从基本概念上对线性规划有系统的了解。第三章通过讲解六个实例来说明线性规划模型建立的过程和步骤，第四章介绍了运输规划和指派问题。最后一章向读者简要介绍了线性规划的最新发展——目标规划。在每章的后面都附有少量的习题以供读者自己复习和检查。

本书可作为高等院校以及职大、电大、函大等相应管理专业的教材或参考书；也可供经济管理部门、公司、企业和事业单位的中层以上领导干部和基层各类专业管理人员，作为自学或试行大专《专业证书》教育与岗位职务培训的教材或参考书；对热心于学习现代管理知识的青工、部队战士等也都是较好的读物。

299/69

线性规划在管理中的应用

宁宣熙 编

航空工业出版社出版发行
（北京市和小里小关东里14号）
—邮政编码：100013—
全国各地新华书店经售
同兴印刷厂印刷

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：6
印数：1—1800　字数：134 千字
ISBN 7-80046-188-2/Z·047
定价：1.45元

《现代管理教育与培训系列教材》编委会

《现代管理教育与培训系列教材》

1. 管理学发展概要
2. 管理经济学基础
3. 工业经济管理概论
4. 企业战略管理*
5. 现代企业经营管理
6. 现代企业生产管理
7. 质量保证与质量控制
8. 企业科技管理
9. 现代企业人事管理
10. 现代企业劳动管理
11. 现代企业物资管理
12. 现代设备综合管理
13. 现代企业环保管理
14. 工业统计基础
15. 外向型经济概论
16. 国际贸易实务
17. 国际金融概论
18. 税收基础
19. 经济法概要
20. 经济调节原理
21. 管理心理学
22. 线性规划在管理中的应用
23. 网络计划在管理中的应用
24. 管理决策分析实用方法
25. 常用管理数学方法及应用程序

注：带 * 者为再版书

前　言

党的十一届三中全会揭开了我国改革与开放的序幕。随着经济体制改革的不断深化，各部门、各行业及其所属企业的经营与管理，在科学化、现代化的道路上迈出了新的步伐。但是，“技术落后，管理更落后”的被动局面仍很突出，按照十三大提出的“国家调节市场，市场引导企业”的新经济运行机制进行管理，向管理要效益，已成为促进改革深化和保证现代化建设事业顺利进行的关键性环节。对此，各级政府管理部门、各级领导、管理学者和专家以及广大在职管理人员，都意识到此时此刻自身所肩负的历史责任，并切身体验到，要从根本上全面提高我国的经营管理水平，以适应改革开发和发展商品经济的需要，尽快培养和造就一支水平高，素质好，胸怀大志，远见卓识，乐于献身，富有韬略，开拓进取，勇于创新，既懂商品经济又会经营的管理大军，是刻不容缓的当务之急。

这里我们向读者提供的这套《现代管理教育与培训系列教材》，其目的就是要为各类管理专业的学生、教师、提供紧密结合改革开放实践，具有较强时代气息的教材或参考书；同时，也是为全国各地、各部门、各行业以及企事业单位的成人教育机构正在开办的管理干部岗位职务培训和试行的管理干部大专《专业证书》教育提供专业对口，适用配套的实用教材，以求在普及管理现代化教育方面做一点切切实实的工作。

该套教材的编写要求是：联系实际，面向改革，按需施教，讲究实效，既强调理论的系统性和方法的科学性，更注重教材的针对性和实用性。为了拓宽适用范围，便于更多的专业人员选用，在总体设计上采取了一书一专题的办法，各用书单位和个人可按公共课，必修课和选修课，依据教学计划的要求，灵活选用，组合配套。

该套教材既可作为高等院校以及职大、电大、函大等相应管理专业的教材或参考书；也可供经济管理部门、公司、企业和事业单位的中层以上领导干部和基层各类专业管理人员，作为大专《专业证书》教育与岗位职务培训的教材或参考书；对热心于学习现代管理知识的青工、部队战士等也都是较好的读物。

该套教材是由航空工业管理教育协作组（包括北京航空航天大学管理学院，郑州航空工业管理学院，南京航空学院和西北工业大学的管理系等）和中国航空学会管理科学专业委员会，会同航空工业出版社共同组织编写出版的。自始至终得到了航空航天工业部领导，教育司、财会司，体改司等司局的大力支持和帮助。在该套教材出版之际，谨向所有支持过我们工作的部门、单位和个人表示诚挚的谢意。

本书是该套教材的第22本。本书是为具有中等教育水平读者编写的关于线性规划的基本原理及其应用的入门读物，内容系统而又深入浅出，侧重于应用。

由于时间较紧，调查研究不够，虽然作了较大努力，但书中难免仍有不妥不当之处，敬希读者指正。

《现代管理教育与培训系列教材》

编　委　会

1989年元月

目　录

第一章　线性规划的数学基础知识

本章主要介绍行列式，线性代数方程组和矩阵的基本线性代数知识，它是学习线性规划的必备数学基础。

§1　行列式

一、二阶行列式

行列式是一个两边划有直线的方形数表，它代表一个数值。

定义：　二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (1\text{-}1)$$

例1-1

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\times 3 - 2\times 4 = 7$$

二、三阶行列式

1．定义：　三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$(1-2)$$

为了便于记忆，我们可按图 1-1所示的虚线及箭头方向进行计算（只限于二阶及三阶行列式），称为“对角线展开法”。

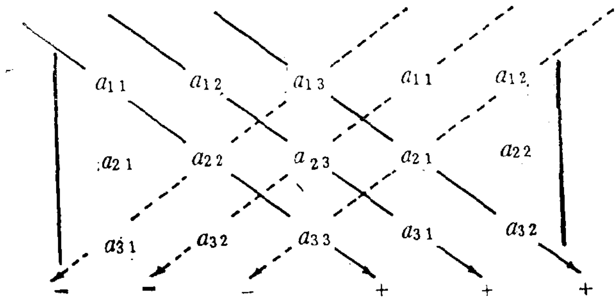

图 1-i

例1-2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)\times(-1)+1\times2\times1+3\times2\times4-3\times(-1)\times1-2\times2\times2-(-1)\times4\times1=27$$

2。三阶行列式求值的一般方法

（1）定义：将三阶行列式的元素 a_{ij} 所在的行和列划去后，剩下的元素按原有次序构成的二阶行列式，叫做 a_{ij} 所对应的余子式，记为 M_{ij}。

例有三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

当划去第一行和第一列后，得到元素 a_{11} 的对应余子式

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理可得，a_{23}的对应余子式为$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

a_{22}的对应余子式为$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

（2）定义：将a_{ij}的余子式M_{ij}乘以（-1）的（$i+j$）次幂，即$(-1)^{i+j}$，所得到的式子，叫做a_{ij}的代数余子式。记为A_{ij}。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad i、j=1,2,3$$

例 1-3 写出$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$的第三列各元素的对应余子式和代数余子式

解：$M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=9$，$M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$

$M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-6$

与它们对应的代数余子式是

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=9$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-3$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-6$$

（3）三阶行列式的求值法：

定理：三阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$的值等于它任意一行（或列）的所有元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik}\quad i=1,2,3 \tag{1-3}$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}\quad j=1,2,3 \tag{1-4}$$

其中（1-3)式表示将行列式D按行展开，而（1-4）式是将行列式D按列展开。不论按行展开，还是按列展开，行列式的值不变。我们称（1-3），（1-4）式为拉普拉斯展开式（证明从略）。

值得注意的是，当将行列式D的第i行（或列）各元素与第j行（或列）各元素对应的代数余子式相乘并求和时，其值为0，即

$$D=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0\quad (i=1,2,3;j=1,2,3;\ i\neq j) \tag{1-5}$$

例 用第三列展开下列行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

$$=3\times 9+2\times(-3)+(-1)\times(-6)=27$$

用其它行或列展开可以得到同样的结果。

三、n阶行列式的概念与计算

定义：将n^2个数$a_{ij}(i=1,2\cdots\cdots n;j=1,2\cdots\cdots n)$排列成如下的正方表，并用两条竖线把它们夹起来，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做n阶行列式，其值定义为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1-6}$$

其中 A_{1j}为元素$a_{1j}(j=1,2\cdots\cdots n)$ 的代数余子式（它是一个$n-1$阶行列式）。即

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2,j-1}a_{2,j+1}\cdots\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\cdots\cdots a_{3,j-1}a_{3,j+1}\cdots\cdots a_{3n} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{n,j-1}a_{n,j+1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据这个定义可以证明：n 阶行列式的值等于它的任一行（或列）的诸元素与它们的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

（依行展开） (1-7)

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

（依列展开） (1-8)

其中A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ $(i=1,2\cdots\cdots n)$

$(j=1,2\cdots\cdots n)$

（1-7）和（1-8）式称为n阶行列式的拉普拉斯展开式。

这样，n阶行列式的计算可归结为$n-1$阶行列式的计算，而$n-1$阶行列式的计算又归结为$n-2$阶行列式的计算……。最后归结为三阶或二阶行列式的计算。

应当指出的是，用这样的方法来计算高阶行列式还是很麻烦的，下面研究一下行列式的基本性质，利用这些性质我们可以简化行列式的计算。

定义：将行列式D的行与列互换后所得到的行列式叫做D的转置行列式。

如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则D的转置行列式记为

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的性质：

1. 行列式转置后其值不变，即$D=D'$

2. 若D中有一行或一列的元素均为0，则$D=0$

3. 两行（或两列）的元素互换，则行列式的值仅改变符号，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

4. 若某一行（或列）的各元素有公因子，则可将公因子提出行列式记号之外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5．若某一行（或列）的各元素是两项之和（或差）。则可以将这个行列式写成两个行列式之和(或差)。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6．若行列式中有两行(或两列）的对应元素成比例，则行列式的值为0。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

7．将行列式某一行（或列）中的每个元素乘以相同的常数后，加到另一行（或列）的对应元素上去，行列式的值不变。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这是简化行列式计算的最有效性质。

例1-4

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overline{\overline{②+①}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overline{\overline{③-2\times①}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-42+15)=27$$

例1-5

$$\begin{array}{c|cccc|} & [1] & [2] & [3] & [4] \\ ① & 3 & 1 & -1 & 2 \\ ② & -5 & 1 & 3 & -4 \\ ③ & 2 & 0 & 1 & -1 \\ ④ & 1 & -5 & 3 & -3 \end{array} \xrightarrow{[4]+[3]} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+①} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{array}{|ccc|} [1] & [2] & [3] \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{array}$$

$$\xrightarrow[{[3]+[1]}]{{[2]+[1]}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2\times1\times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 2(8+12)=40$$

§2 线性代数方程组

一、基本概念

在客观世界，很多问题的解决可以归结为线性代数方程组的求解。

设有n个未知数，m个方程，则下列一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-9}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2\cdots\cdots m) \tag{1-10}$$

当b_i不全为0时称为n元非齐次线性方程组，其中x_j是变量（未知数），a_{ij}称为方程组的系数，b_i为常数项。

如果$b_i=0,(i=1,2\cdots\cdots m)$则称为n元齐次线性方程组。当$m=n$时，称为$n$阶线性方程组。

二、解n阶线性方程组的克莱姆法则

本节只讨论方程的个数与未知变量个数相等（即m＝n）的情况。

我们先来求解一个只有两个未知变量x_1，x_2的二阶线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases} \tag{1-11}$$