



高等学校教材

现代控制系统 综合与设计

西南交通大学 肖建 编著

现代控制系统综合与设计



中国铁道出版社

TP273

X38

高等学校教材

现代控制系统综合与设计

西南交通大学 肖建 编著
西南交通大学 李治 主审

中国铁道出版社

2000年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

DU50/23

控制系统广泛应用于国民经济的各个领域。本书对现代控制系统的综合与设计方法作了全面系统、深入浅出地阐述。全书包括线性系统的分析与综合、最优控制、系统辨识和自适应控制等四篇,共十五章。取材注重基础性、代表性和新颖性,力求反映现代控制领域的最新成果,并着重介绍控制系统各种综合与设计方法的工程背景和物理概念。各篇后附有参考文献,各章后附有习题。

本书可作为高等学校电气信息类专业本科生和研究生的教材,也可供广大工程技术人员、科研人员和大专院校其它专业师生学习现代控制理论分析与设计方法时参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制系统综合与设计/肖建编著. - 北京:中国铁道出版社,2000.2

高等学校教材

ISBN 7-113-03510-8

I. 现… II. 肖… III. ①自动控制系统-系统综合-高等学校-教材
②自动控制系统-系统设计-高等学校-教材 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61173 号

书 名:现代控制系统综合与设计

著作责任者:西南交通大学 肖 建

出版·发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:方 军

封面设计:马 利

印 刷:北京彩桥印刷厂

开 本:787×1092 1/16 印张:21 字数:524 千

版 本:2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷

印 数:1—2000 册

书 号:ISBN7-113-03510-8/TP·403

定 价:26.40 元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

前 言

自动控制技术对工农业生产、交通运输、国防建设和空间技术等各个领域都具有极其重要的作用。随着科学技术的发展,自动控制系统越来越趋向大型化、复杂化和综合化,同时对控制品质的要求也日益提高。经典控制理论日益难以满足这样的控制系统分析与设计的需要,从而现代控制理论应运而生。现代控制理论以严谨的数学结构和对设计指标的明确的描述方式,为控制工程实践提供了解析的设计手段。近年来蓬勃发展的自适应控制、鲁棒控制、 H_∞ 控制和智能控制等新的控制方法,更加开辟了现代控制理论和技术的新纪元。

本书试图从工程实践角度出发,系统地介绍现代控制系统的分析、综合与设计方法,使读者对这些方法有较全面的了解和认识,并能正确地运用这些方法去解决工程中的实际问题。

全书共分四篇。第一篇介绍了线性系统的分析与综合的一些主要方法,包括线性系统运动特性和结构特性的分析;极点配置、状态观测器、解耦控制和渐近跟踪鲁棒调节器等控制系统综合方法;线性系统复频域分析与设计方法等。第二篇介绍最优控制的内容,包括变分法、最小值原理和动态规划等在最优控制系统综合与设计中的应用,重点介绍了二次型最优控制这一广泛采用的控制系统设计方法,并从工程实际出发,介绍了 H_∞ 控制这一最新成果。系统辨识是第三篇的主题,在这里,我们介绍了非参数辨识方法、最小二乘类辨识方法和极大似然法,并重点介绍了系统辨识中的一些实际问题如实验设计、模型结构的选择和闭环系统辨识等。最后,第四篇介绍了参考模型自适应控制和自校正控制等两类自适应控制系统的设计方法。

本书为铁道部重点教材,是根据铁道部专业教学指导委员会拟定的教学计划,结合作者多年来从事现代控制系统综合与设计这一课程教学工作的经验和在这一领域的科研成果,参考大量文献资料并加以总结、提高编著而成。在编著的过程中力求反映现代控制理论和技术发展的水平,注重基础性内容的训练,以培养读者独立解决实际工作中控制系统综合与设计问题的能力,并了解现代控制系统分析与设计这一领域的学科前沿。

本书可以作为电气信息类专业高年级学生和研究生教材,也可以供广大工程技术人员和大专院校其他专业师生自学现代控制理论分析与设计方法的参考。

本书由西南交通大学肖建编著,西南交通大学李治主审。杜中华、王远波、温诚忠、唐磊、张友刚等为本书付出了辛勤的劳动。本书所涉及的作者部分科研成果,得到了国家自然科学基金和国家教委归国留学人员资助基金的资助。作者在此一并致以衷心的感谢。

限于水平,书中难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

作者
1999年8月

目 录

第一篇 线性系统的分析与综合

概 述	1
第一章 线性系统状态空间分析	2
§ 1.1 状态空间描述	2
§ 1.2 线性系统的运动分析	9
§ 1.3 离散时间系统	13
§ 1.4 线性系统的能控性和能观测性	19
§ 1.5 能控规范型和能观测规范型	26
§ 1.6 线性系统的结构分解	35
§ 1.7 线性系统的稳定性	44
习 题	48
第二章 线性反馈系统的状态空间综合	51
§ 2.1 反馈控制结构及其对系统特性的影响	51
§ 2.2 单输入系统的极点配置	55
§ 2.3 多输入系统的极点配置	62
§ 2.4 镇定问题	69
§ 2.5 状态观测器	73
§ 2.6 带状态观测器的状态反馈控制系统的特性	80
§ 2.7 解耦控制	82
§ 2.8 渐近跟踪鲁棒调节器	91
习 题	100
第三章 反馈控制系统的复频域分析与设计	103
§ 3.1 反馈控制系统的基本结构	103
§ 3.2 反馈控制系统的性能	107
§ 3.3 极点配置的复频域设计	111
§ 3.4 极点配置控制器的参数化	116
§ 3.5 传递函数矩阵的互质分解与稳定控制器的参数化表示	120
习 题	126
参考文献	127

第二篇 最优控制

概 述	129
第四章 最优控制问题与变分法	130
§ 4.1 最优控制问题的数学描述	130

§ 4.2 泛函与变分	133
§ 4.3 对控制变量无约束的最优控制问题	139
习 题	149
第五章 最小值原理	151
§ 5.1 连续时间系统的最小值原理	151
§ 5.2 离散时间系统的最小值原理	157
§ 5.3 时间最优控制	162
习 题	171
第六章 线性二次型的最优控制	173
§ 6.1 二次型性能指标	173
§ 6.2 有限时间状态调节器问题	175
§ 6.3 无限时间状态调节器问题	180
§ 6.4 输出调节器问题	184
§ 6.5 跟踪问题	188
习 题	196
第七章 动态规划	198
§ 7.1 最优性原理	198
§ 7.2 离散时间线性二次型问题	204
§ 7.3 连续动态规划与哈密顿—雅可比方程	207
§ 7.4 动态规划与变分法和最小值原理的关系	209
习 题	212
第八章 H_∞ 控制	213
§ 8.1 数学基础	213
§ 8.2 H_∞ 性能指标	222
§ 8.3 单输入单输出情况下 H_∞ 问题的解	227
§ 8.4 直接状态空间方法	231
习 题	235
参考文献	235

第三篇 系统辨识

概 述	237
第九章 建模与系统辨识	238
§ 9.1 数学模型	238
§ 9.2 辨识实验输入信号	240
习 题	242
第十章 非参数辨识方法	244
§ 10.1 阶跃响应法	244
§ 10.2 相关分析法	246
习 题	249
第十一章 最小二乘辨识	250

§ 11.1 最小二乘估计的批处理算法·····	250
§ 11.2 最小二乘估计的统计特性·····	252
§ 11.3 递推最小二乘估计·····	254
§ 11.4 广义最小二乘法·····	259
§ 11.5 扩充最小二乘法·····	262
§ 11.6 辅助变量法·····	263
习 题·····	265
第十二章 极大似然估计 ·····	267
§ 12.1 极大似然估计原理·····	267
§ 12.2 极大似然估计算法·····	268
§ 12.3 预报误差法·····	272
习 题·····	274
第十三章 系统辨识中的实际问题 ·····	276
§ 13.1 辨识试验信号的设计·····	276
§ 13.2 采样周期和试验长度的选择·····	279
§ 13.3 数据的预处理·····	280
§ 13.4 模型结构的确定·····	281
§ 13.5 模型检验·····	285
§ 13.6 闭环系统辨识·····	286
习 题·····	288
参考文献·····	289

第四篇 自适应控制

概 述 ·····	291
第十四章 参考模型自适应控制系统 ·····	293
§ 14.1 基于局部参数最优化技术的设计方法·····	293
§ 14.2 基于李雅普诺夫稳定性理论的设计方法·····	298
§ 14.3 基于超稳定性理论的设计方法·····	302
习 题·····	307
第十五章 自校正控制 ·····	309
§ 15.1 最小方差自校正控制·····	309
§ 15.2 广义最小方差自校正控制·····	315
§ 15.3 极点配置自校正控制·····	320
习 题·····	323
参考文献·····	323
附录 向量与矩阵的导数·····	325

第一篇 线性系统的分析与综合

概 述

自本世纪初,特别是第二次世界大战以来,自动控制技术得到了迅速的发展。20 世纪 50 年代中期,古典控制论已经发展成熟和完备,并成功地应用在工程技术和军事等领域。古典控制论采用传递函数来描述单输入单输出系统,利用频率响应法来实现控制系统的分析与综合。但是,古典控制论具有明显的局限性,它只能处理单输入—单输出系统,并且难以揭示系统的更深刻的特性。

1960 年前后一段时间,现代控制理论开始蓬勃发展,其重要标志之一就是美国著名学者 R.E. Kalman 提出了控制系统的状态空间理论。与古典的传递函数法仅描述了系统的外部输入输出特性不同,状态空间法是系统的内部描述,从而使系统的分析和综合过程建立在严格的理论基础上,在很大程度上促进了控制理论与技术的发展。状态空间法可以同时适用于单输入—单输出系统和多输入—多输出系统,线性定常系统和线性时变系统等,并且使得我们可以直接在时间域内进行系统的分析和综合。计算机科学和技术的发展,又为这种分析和综合方法提供了强有力的工具。

自 20 世纪 70 年代以来,在状态空间法的基础上,又发展了采用复频域的系统描述和计算方法来分析综合线性控制系统的多变量复频域方法。其中包括利用多项式矩阵分式或互质分解表示作为线性多变量系统的数学模型而建立起来的线性多变量系统的复频域分析与综合方法;并将多输入多输出系统化为一系列单输入单输出系统来处理,并把古典频率法的许多行之有效的设计技术和方法推广到多变量系统设计中的多变量频域设计方法。

目前,对于线性系统的分析和综合还在不断地向前发展,随着采用的数学工具和对系统的描述方法不同,已形成各种学派,并且得到了各自成体系和有价值的结论。

线性系统的分析与综合方法是自动控制理论中最为成熟和完善的一个组成部分,它是最优控制、最优估计、随机控制、自适应控制、鲁棒控制和非线性系统分析和综合等控制理论各分支的基础。

第一章 线性系统状态空间分析

§ 1.1 状态空间描述

为了分析和研究控制系统,首先必须建立系统的数学模型。描述控制系统的数学模型的形式不止一种,它们各有特长和最适用的场合,并且它们之间也有紧密的联系。通常由系统的一种数学描述可以推出它的另一种数学描述。

系统的数学模型或称为系统的数学描述通常可分为以下两种类型:一种称为系统的外部描述,即输入—输出描述,这种描述将系统看成是一个“黑箱”,只从系统的输入—输出的因果关系中获悉系统特性。古典控制论所采用的对系统的传递函数描述就是属于系统的外部描述。从传递函数本身无法了解系统的内部结构,两个内部结构完全不同的系统可以有相同的传递函数描述。另一种则称为系统的内部描述,它是系统的完全描述,完整地表征了系统的动力学特征。现代控制理论中普遍采用的状态空间描述就是属于这一类。

1.1.1 状态空间描述

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的。状态和状态空间概念早就在古典力学中就得到广泛的应用,但随着将它们引入到系统和控制理论中来,使之适合于描述系统的运动行为,才使这些概念有了更一般的含义。

状态和状态空间是这样来定义的。在描述系统运动的所有变量中,必定可以找到数目最少的一组变量,它们足以描述系统的全部运动。组成这个变量组的变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 称为系统的状态变量,其中 $t \geq t_0, t_0$ 为初始时刻。由状态变量构成的列向量

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq t_0$$

称为系统的状态向量,简称状态。状态向量取值的空间叫状态空间。系统在任一时刻的状态,都可以用状态空间中的一个点来表示。

在以上定义中,所谓足以描述系统的全部运动,是指:只要确定了这组变量在某一初始时刻 $t = t_0$ 的值,并且确定了从这一初始时刻起 ($t \geq t_0$) 的系统输入,则系统的全部变量在 $t \geq t_0$ 时刻的运动行为也就随之完全确定了。而状态变量组的最小性体现在:状态变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必须的系统变量的最少个数。减少变量数将破坏表征的完全性,而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的。

状态变量是一组数学变量,它并不一定是在物理上可测量的或可观察的量。不表示物理量的变量,以及不可测量或不可观察的物理量也可选作状态变量。对同一个系统,状态变量的选取并不是唯一的。选取状态变量的这种自由性是状态空间法的一个优点。但是,从实用上讲,我们应当尽可能地选取容易测量的量作为状态变量。

系统状态方程描述的结构图如图 1.1 所示。输入引起状态的变化是一个动态过程。列写每个状态变量的一阶导数与所有状态变量和输入变量的数学方程称为状态方程。而描述状态与输入一起引起输出的变化是一个代数方程,称为输出方程。考虑最一般的情况,连续系统的状态方程描述为:

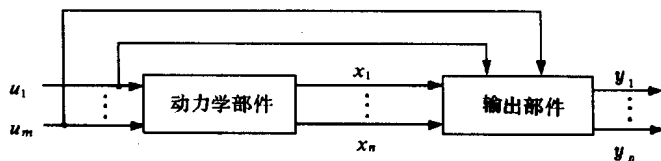


图 1.1 系统状态空间描述的基本结构

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

引入向量及矩阵符号,令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

分别为状态向量,控制向量(输入向量)和输出向量,引入向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}$$

则可写出向量形式状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

若系统是线性的,状态空间描述可表为更加明显的一般形式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

对于线性定常连续时间系统,以上状态空间描述中各系数矩阵均不是 t 的函数,即可写成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别是 n 维状态向量, m 维输入向量和 p 维输出向量; $\mathbf{A}$ 是 $(n \times n)$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $(n \times m)$ 矩阵, $\mathbf{C}$ 是 $(p \times n)$ 矩阵, $\mathbf{D}$ 为 $(p \times m)$ 矩阵。为简单起见,式(1.1)所示的状态方程也可简记为 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。

【例 1.1】 在图 1.2 所示的电路中,有 u_{c1} , u_{c2} , i_1 和 i_2 等四个内部变量。根据电路分析的知识我们知道,该电路可用 2 阶微分方程描述,因而状态变量的个数必定是 2。若选 u_{c1} 和 u_{c2} 为状态变量,则由 u_{c1} 即可确定 i_1 ,而根据 u_{c1} 和 u_{c2} 两者的电位差还可以由欧姆定律确定 i_2 ,

从而可确定系统的全部内部变量。如果令 u_{c2} 为输出, 根据电路定律, 立即可得到系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}\dot{u}_{c1} &= -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} u_{c1} + \frac{1}{C_1 R_2} u_{c2} + \frac{u}{C_1 R_1} \\ \dot{u}_{c2} &= \frac{1}{C_2 R_2} u_{c1} - \frac{1}{C_2 R_2} u_{c2} \\ y &= u_{c2}\end{aligned}$$

写成矩阵形式得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix}$ 为状态向量。

可以验证, u_{c1} 和 i_2 也是一组状态变量, 因为若 u_{c1} 和 i_2 确定了, 则系统中其它的变量也就唯一确定了。如果令状态向量

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ i_2 \end{bmatrix}$$

同样令 u_{c2} 为系统输出, 则也可以得出系统的状态空间描述为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 1 \\ -\frac{1}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{C_2 + 1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_1 R_1 R_2} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -R_2] \mathbf{z} \end{cases}$$

在该例题中, i_1 和 u_{c1} 不能选作状态变量, 因为在某一时刻, 仅根据 i_1 和 u_{c1} 的值, 不能确定系统其余的变量。

由以上例题中可以看出, 对同一系统, 若选不同的变量作为状态变量, 则系统的状态方程具有不同的形式。但是, 在今后的分析中我们可以知道, 系统的传递函数或传递函数矩阵却是不变的。

采用状态空间描述可以揭示处于系统内部的状态信息, 并加以利用, 而采用向量和矩阵形式表示, 当各种变量数目增加时, 并不增加数学表达式的复杂性, 从而可适用于单变量或多变量, 线性或非线性, 定常或时变, 确定性或随机性等各类系统的描述。最后, 一阶微分方程组比高阶微分方程更适宜于在计算机上求解。

1.1.2 由系统微分方程或传递函数建立状态方程

设单输入单输出线性定常连续时间系统可以由以下微分方程描述。

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1.2)$$

式中 u, y 分别为系统的输入, 输出变量。它的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1.3)$$

为了得到微分方程式(1.2) 或传递函数式(1.3) 所示系统的状态空间描述, 首先必须选择

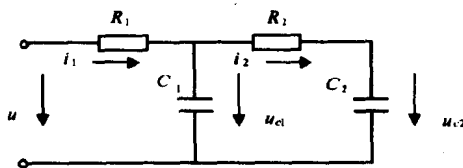


图 1.2 [例 1.1] 的电路图

适当的状态变量,以保证能得到式(1.1)形式的状态方程。在此过程中,必须注意,在 n 个状态方程表达式中,每个方程最多只能含有状态变量的一阶导数项,而不能含有更高阶的导数项,另外方程中不能含有输入变量的导数项。

1. 能控标准型状态方程

引入中间变量 $Z(s)$,将式(1.3)所示的 $G(s)$ 分解成两部分,即令

$$Z(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} U(s) \quad (1.4)$$

则由式(1.3)可知,成立

$$Y(s) = G(s)U(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0)Z(s) \quad (1.5)$$

根据拉氏变换的有关定理,若令 $z(t)$ 为拉氏变换象函数 $Z(s)$ 的原函数,则式(1.4)和式(1.5)对应的微分方程为:

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{z} + a_0z = u \quad (1.6)$$

$$y = b_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{z} + b_0z \quad (1.7)$$

若选择状态变量

$$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \cdots, x_n = z^{(n-1)}$$

则根据式(1.6)可得状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= z^{(n)} = -a_0z - a_1\dot{z} - \cdots - a_{n-1}z^{(n-1)} + u \\ &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

根据式(1.7)可得输出方程

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + \cdots + b_{n-1}x_n$$

写成矩阵形式,可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{b}_c u \\ y = \mathbf{C}_c \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$(1.8b)$$

其中

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]$$

称具有以上形式的状态空间方程为能控标准型, $\mathbf{A}_c$ 形式的矩阵称为友矩阵。

【例 1.2】 给定系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{160s + 720}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640}$$

利用式(1.8)立即可以得到它的状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [720 \quad 160 \quad 0] \mathbf{x}$$

2. 能观测规范型

对于式(1.2)形式的高阶微分方程所表示的系统,按以下规则选择状态变量:

$$\begin{cases} x_i = \dot{x}_{i+1} + a_i y - b_i u & i = 1, \dots, n-1 \\ x_n = y \end{cases} \quad (1.9)$$

将式(1.9)展开可得

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_{n-1}y - b_{n-1}u = \dot{y} + a_{n-1}y - b_{n-1}u \\ x_{n-2} &= \dot{x}_{n-1} + a_{n-2}y - b_{n-2}u = \ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} - b_{n-1}\dot{u} + a_{n-2}y - b_{n-2}u \\ &\vdots \\ x_2 &= \dot{x}_3 + a_2y - b_2u \\ &= y^{(n-2)} + a_{n-1}y^{(n-3)} - b_{n-1}u^{(n-3)} + a_{n-2}y^{(n-4)} - b_{n-2}u^{(n-4)} + \\ &\quad \dots + a_2y - b_2u \\ x_1 &= \dot{x}_2 + a_1y - b_1u \\ &= y^{(n-1)} + a_{n-1}y^{(n-2)} - b_{n-1}u^{(n-2)} + a_{n-2}y^{(n-3)} \\ &\quad - b_{n-2}u^{(n-3)} + \dots + a_1y - b_1u \end{aligned}$$

故有:

$$\dot{x}_1 = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} - b_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} - b_{n-2}u^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{y} - b_1\dot{u}$$

与式(1.2)相比较,得

$$\dot{x}_1 = -a_0y + b_0u = -a_0x_n + b_0u$$

总结以上推导,可得状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0x_n + b_0u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n + b_1u \\ \dots \quad \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_{n-2}x_n + b_{n-2}u \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n + b_{n-1}u \end{cases}$$

输出方程为:

$$y = x_n$$

写成矩阵形式,可得:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u \quad (1.10a)$$

$$y = \mathbf{c}_0 \mathbf{x} \quad (1.10b)$$

其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c_0 = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1]$$

具有式(1.10)形式的状态空间方程称为能观测规范型。

【例 1.3】 设系统的传递函数与[例 1.2]相同,求系统的能观测规范型的状态空间方程。

显然,[例 1.2]传递函数 $G(s)$ 所对应的高阶微分方程为:

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 720u$$

根据式(1.10),立即可以写出它的能观测规范形状态空间方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -640 \\ 1 & 0 & -194 \\ 0 & 1 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 720 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

以上我们所讨论的传递函数都是严格真的,即 $G(s)$ 的分母多项式的阶次大于分子多项式的阶次。如果 $G(s)$ 为真,但不是严格真,即当 $G(s)$ 的分母多项式与分子多项式的阶次相等时,可以先用多项式除法,将 $G(s)$ 化成一个严格真的有理函数与一个常数之和的形式,然后再利用前面的结论得到系统的状态空间方程,如下面[例 1.4]所示。

【例 1.4】 给定系统的高阶微分方程描述为:

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194\dot{y} + 640y = 4u^{(3)} + 160\dot{u} + 720u$$

它所对应的传递函数描述为

$$G(s) = \frac{4s^3 + 160s + 720}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640}$$

利用多项式除法可得:

$$G(s) = \frac{-64s^2 - 616s - 1840}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640} + 4$$

若令

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &= \frac{-64s^2 - 616s - 1840}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640} \\ \tilde{Y}(s) &= \tilde{G}(s)U(s)\end{aligned}$$

则由 $Y(s) = G(s)U(s) = (\tilde{G}(s) + 4)U(s) = \tilde{Y}(s) + 4U(s)$ 可知,若求得关于系统 $\tilde{Y}(s) = \tilde{G}(s)U(s)$ 的状态空间方程后,立即可得关于系统 $Y(s) = G(s)U(s)$ 的状态空间方程。根据以上分析,可以得到关于 $G(s)$ 所描述系统的状态空间方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [-1840 \quad -616 \quad -64] \mathbf{x} + 4u\end{aligned}$$

1.1.3 由状态空间描述导出传递函数矩阵

考虑式(1.1)所示的多输入多输出线性定常连续系统的状态空间方程,其中 $\mathbf{x}$ 是 n 维状态向量; $\mathbf{u}$ 是 m 维输入向量, $\mathbf{y}$ 是 p 维输出向量。为简便起见,我们简记式(1.1)的状态空间方程为 $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。对式(1.1)两边取拉氏变换得:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

即

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.11)$$

以及

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (1.12)$$

若初始条件 $x(0) = 0$, 则成立

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (1.13)$$

仿照古典控制论中关于单输入单输出系统传递函数的定义, 我们定义

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.14)$$

为传递函数矩阵。在这里 $G(s)$ 是 $(p \times m)$ 维有理函数矩阵。记 $G(s)$ 中的 ij 元素为 $g_{ij}(s)$, 则 $g_{ij}(s)$ 表示系统的第 j 个输入变量至第 i 个输出变量之间的传递函数。显然, 对于单输入单输出系统, 传递函数矩阵就是传递函数。

当 $G(s)$ 中所有元素的分子多项式的次数均大于或等于分子多项式的次数时, 称 $G(s)$ 为真; 特别是当 $G(s)$ 中所有元素的分子多项式次数均大于分子多项式次数时, 称 $G(s)$ 为严格真。可以证明, 若 $D = 0$, 则 $G(s)$ 为严格真, 这时成立

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

若 $D \neq 0$, 则 $G(s)$ 为真, 这时成立

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D$$

【例 1.5】 已知系统状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

求系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 。

为利用式(1.14), 先求 $(sI - A)^{-1}$

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}$$

于是有:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然 $G(s)$ 为严格真。

1.1.4 坐标变换

前面我们已经指出, 描述系统内部运动的状态变量的选取不是唯一的。对同一个系统, 如

果选取不同的状态变量组构成状态向量,则最后所得到的状态空间方程也不一样。但是这些不同的状态向量之间,必定能通过一种叫做坐标变换的非奇异线性变换而互相联系。例如,若 x 和 $\bar{x}$ 均是描述同一系统的内部运动的不同状态向量,那么它们之间应通过非奇异坐标变换矩阵 P 相联系,即

$$x = P\bar{x} \quad (1.15)$$

利用式(1.15)所示的坐标变换,还可以将系统的状态空间方程化成某些规范形式,以便能明显地揭示系统的某些重要特性,如能控性,能观测性和稳定性等。

设坐标变换前系统的状态空间方程为 $\sum(A, B, C, D)$ 变换后系统的状态空间方程为 $\sum(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 。下面我们来看看这两者之间的关系。

对式(1.15)两边求导,并考虑到式(1.1),有

$$\dot{x} = P\dot{\bar{x}} = Ax + Bu$$

即

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= P^{-1}Ax + P^{-1}Bu \\ &= P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= Cx + Du = CP\bar{x} + Du \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned}$$

因此,对变换前后的状态空间方程,成立

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP, \quad \bar{D} = D \quad (1.16)$$

通过坐标变换,可以使状态空间方程具有某种规范型结构,并且保持系统的许多固有特性不变。

首先是变换前后系统的特征值不变,这是由于

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A}) &= \det(P^{-1}sIP - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(sI - A)P] \\ &= \det P^{-1} \det(sI - A) \det P = \det(sI - A) \end{aligned} \quad (1.17)$$

式(1.17)表明变换前后的系统特征多项式相同,因而特征值不变。

坐标变换前后,系统的传递函数矩阵不变,即

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \end{aligned} \quad (1.18)$$

上式表明,虽然状态变量选取不同,但系统输入输出特性是相同的。由于这些原因,我们称坐标变换前后的两个系统是代数上等价的。

若取坐标变换 $\bar{x} = P^{-1}x$, 则与式(1.15)对照,成立: $\bar{P} = P^{-1}$, 因此,式(1.16)可另写为:

$$\bar{A} = \bar{P}A\bar{P}^{-1}, \quad \bar{B} = \bar{P}B, \quad \bar{C} = C\bar{P}^{-1}, \quad \bar{D} = D \quad (1.19)$$

从状态空间的观点来看,坐标变换的实质就是状态空间的基底的变换。

§ 1.2 线性系统的运动分析

考虑线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

根据微分方程理论,若 A, B 均为有界矩阵,则方程式(1.20)满足 Lipschitz 条件,对给定的初始

条件 $\mathbf{x}_0$ 和分段连续的输入 $\mathbf{u}(t)$, 方程式(1.20) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 是唯一确定的, 且连续地依赖于初始条件 $\mathbf{x}_0$ 。

1.2.1 齐次状态方程的解

为简单起见, 首先考虑外部输入 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时, 系统的自由运动, 这时对应的状态方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad t \geq t_0 \quad (1.21)$$

称为齐次状态方程。

仿照标量情况下指数函数 e^{at} 的台劳展开式

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(at)^k$$

我们定义矩阵指数函数

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k \quad (1.22)$$

根据定义可以很容易证明 $e^{\mathbf{A}t}$ 具有以下一些基本性质:

- (1) $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$
- (2) $e^{\mathbf{A}(t+\tau)} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}\tau} \cdot e^{\mathbf{A}t}$
- (3) $e^{\mathbf{A}t}$ 为非奇异, 且 $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$
- (4) $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$
- (5) 若 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}$, 则 $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{P}$

给定矩阵 $\mathbf{A}$, 可以根据许多方法求出 $e^{\mathbf{A}t}$, 下面我们仅介绍拉氏变换法。先求 $e^{\mathbf{A}t}$ 的拉氏变换, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathcal{L}(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \frac{k!}{s^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

用 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 左乘式(1.23) 可得:

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{k+1}}{s^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

因此, 有:

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

并可得出计算 $e^{\mathbf{A}t}$ 的拉氏变换法

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (1.24)$$

其中对有理矩阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 求拉氏反变换, 即为对它的各个元素分别求拉氏反变换。