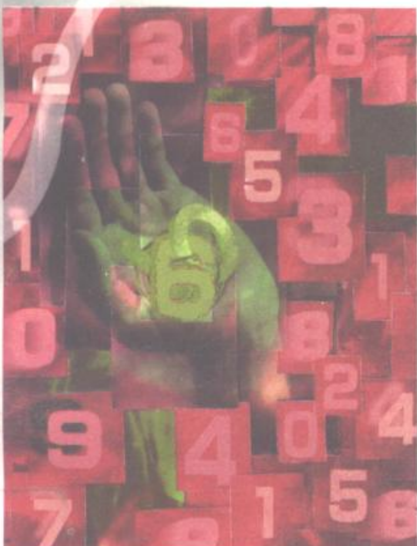
北京大学计算机科学与技术系教材

数理逻辑

离散数学第一分册

王捍贫 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学计算机科学与技术系教材

数 理 逻 辑

离散数学一分册

王捍贫 编著

北 京 大 学 出 版 社
北 京

内 容 提 要

本书是离散数学第一分册，即数理逻辑部分，主要内容有：命题演算、一阶谓词演算、Herbrand 定理和直觉主义逻辑。本书适合作为高等院校计算机专业及相关专业本科生或研究生的教材或教学参考书，也可供计算机软件专业人员参考。

本书体系严谨，内容丰富，密切结合计算机科学实践，配有大量的习题。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 第一分册：数理逻辑/王捍贫编著．—北京：北京大学出版社，1997.8

ISBN 7-301-03490-3

Ⅰ．离… Ⅱ．王… Ⅲ．①离散数学-高等学校-教材②数理逻辑-高等学校-教材 Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 15533 号

书　　名：数理逻辑　离散数学一分册
著作责任者：王捍贫
责 任 编 辑：张豫夫　郭佑民
标 准 书 号：ISBN 7-301-03490-3/TP・355
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部　62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　8.75 印张　230 千字
1997 年 12 月第一版　1997 年 12 月第一次印刷
定　　　价：15.00 元

前 言

离散数学是研究离散量的结构及相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支；它在计算机科学与技术领域中有着广泛的应用。因此，离散数学是计算机专业学生的一门极为重要的专业基础课程。通过本课程的学习，可以使学生掌握、处理离散结构的描述工具与方法，并能培养学生的抽象思维和严格的逻辑推理能力。

一般来说，离散数学包含数理逻辑、集合论、图论、代数结构、组合数学等内容，我们将以上内容分成三个分册出版；第一分册为数理逻辑，第二分册为集合论与图论，第三分册为代数结构和组合数学。本套教材体系严谨，内容丰富，配有大量的例题与习题，并与计算机科学的理论及实践紧密结合。它适用于计算机及相关专业的本科生或研究生，也可供计算机专业科技人员使用或参考。

本书为第一分册，即数理逻辑部分，该分册系统介绍了数理逻辑的基本内容。第一章是预备知识，介绍今后需要用到的有关朴素集合论的基本知识，包括映射、函数、势等概念。第二、三章是数理逻辑的基本内容，分别介绍命题演算、谓词演算。第四章介绍定理机器证明的理论基础——Herberand 定理。第五章介绍一种非古典逻辑——直觉主义逻辑。第四章与第五章可以视教学时间选择讲解或全部讲解。

作者在编写本书过程中参阅了多种离散数学教材及有关资料，在此向有关作者表示衷心的感谢。

在这里，我们还要特别感谢北大出版社和北大计算机系领导，他们对本套教材的出版给予了大力支持与帮助。

最后，我们诚恳地期待读者对本套教材提出宝贵意见。

作　者

1996 年 12 月于北大

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　预 备 知 识

本章主要介绍与本书内容有关的朴素集合论[①]的一些基本知识，包括集合的基本运算、映射、关系、函数、集合的势等. 为了今后叙述的方便，我们将形式系统也用集合论的术语表述出来.

§1.1　集合论的基本概念

“集合”是数学中最基本的概念之一. 在朴素集合论中，“集合”这个概念是一个不定义的概念，即不是以更简单概念来定义的，而仅仅是给出其描述，就像几何中的“点”、“线”等概念一样. 一般给集合以如下的描述：一些对象的整体就称为一个集合，这个整体中的每个对象称为这个集合的一个元素. 这种仅仅给出描述的定义方式有时会产生问题，它可以产生悖论. 为消除悖论，将集合“公理化”就产生了公理集合论. 我们不涉及公理集合论，但承认集合论公理系统 ZFC.

常以英文大写字母 A,B,C 等来表示集合，以英文小写字母 a，b,c 等来表示集合的元素.

$a\in A$ 表示：a 是 A 的元素.

$a\notin A$ 表示：a 不是 A 的元素.

$A\subseteq B$ 表示：A 是 B 的子集，即：若 $a\in A$，则 $a\in B$.

$A\supseteq B$ 表示：$B\subseteq A$.

$A=B$ 表示：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

---

① 用“朴素集合论”一词是为了区分“公理集合论”.

$A\subset B$ 表示：$A\subseteq B$，但存在 $b\in B$ 使 $b\notin A$.

$A\supset B$ 表示：$B\subset A$.

ϕ 表示空集，即 ϕ 中没有任何元素.

特别地，我们以 N,Z,Q,R,C 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

约定：$0\in N$.

$P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$，称为 A 的幂集，即 A 的所有子集组成的集合，有时也记为 2^A.

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的并.

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的交.

$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，称为 A 与 B 的差.

对于无限多个集合的交与并，我们类似定义如下：设 $A_i(i\in I)$ 是一簇集合，

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{存在 } i\in I \text{ 使得 } x\in A_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{对任意 } i\in I \text{ 都有 } x\in A_i\}.$$

$f:A\to B$ 表示从集合 A 到 B 的映射，即 f 表示一种对应规则，使得：对每个 $a\in A$，通过这个规则唯一确定一个 $b\in B$，此时记为 $f(a)=b$ 或者 $f:a\mapsto b$. A 称为 f 的定义域，记为 $\mathrm{Dom}(f)$，B 称为 f 的值域，记为 $\mathrm{Rang}(f)$，b 称为 a 在 f 下的象，a 称为 b 在 f 下的一个原象.

设 $f:A\to B$，$A'\subseteq A$，$B'\subseteq B$，$b\in B$，记：

$f(A')=\{f(a)\mid a\in A'\}$，称为 A' 的象集；

$f^{-1}(b)=\{a\in A\mid f(a)=b\}$，称为元素 b 的原象集；

$f^{-1}(B')=\bigcup_{b\in B'}f^{-1}(b)=\{a\in A\mid f(a)\in B'\}$，称为集合 B' 的原象集.

显然，$f^{-1}(b)=f^{-1}(\{b\})$.

设 $f_i:A_i\to B_i(i=1,2)$ 是两个映射，则 $f_1=f_2$ 当且仅当 $A_1=$

$A_2, B_1=B_2$，且对任意 $a\in A_1, f_1(a)=f_2(a)$.

设 A 是一个集合，映射

$$1_A: A\to A,\quad 1_A(a)=a\quad (任意\ a\in A)$$

称为 A 上的恒等映射或单位映射.

设 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 是两个映射，如下映射 h：

$$h: A\to C,\quad h(a)=g(f(a))\quad (任意\ a\in A)$$

称为 f 与 g 的合成或复合，记为 $g\circ f$.

易证：(1) 若 $f: A\to B$，$g: B\to C$，$h: C\to D$，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$；

(2) 对任意映射 $f: A\to B$，$1_B\circ f=f\circ 1_A=f$.

设 $f: A\to B$ 是一个映射，$A_0\subseteq A$，定义映射 $f\restriction_{A_0}: A_0\to B$ 如下：

$$f\restriction_{A_0}(a_0)=a_0\quad (任意\ a_0\in A_0),$$

称 $f\restriction_{A_0}$ 为 f 在 A_0 上的限制.

设 $f: A\to B$ 为一个映射.

(1) 称 f 为单射，如果对任意 $a_1, a_2\in A$，若 $a_1\neq a_2$，就有 $f(a_1)\neq f(a_2)$.

(2) 称 f 为满射，如果对任意 $b\in B$，存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$.

(3) 称 f 为双射(或一一对应)，如果 f 既是单射也是满射.

(4) 若存在映射 $g: B\to A$ 使得 $g\circ f=1_A$，则称 f 为左可逆映射，g 称为 f 的一个左逆映射.

(5) 若存在映射 $g: B\to A$ 使得 $f\circ g=1_B$，则称 f 为右可逆映射，g 称为 f 的一个右逆映射.

(6) 若 f 既是左可逆映射，又是右可逆映射，则称 f 为可逆映射.

定理 1.1 设 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 是映射，若 f, g 都是单(满，双)射，则 $g\circ f$ 也是单(满，双)射.

证明 只就单射情形证明，其余情形的证明类似.

任意 $a_1,a_2\in A$，若 $(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$，则 $g(f(a_1))=g(f(a_2))$，由于 g 是单的，故 $f(a_1)=f(a_2)$，由于 f 是单的，故 $a_1=a_2$. 从而 $g\circ f$ 也是单的. ▌

定理 1.2 若 $f: A\to B, g_1: B\to A, g_2: B\to A$ 满足 $g_1\circ f=1_A$，$f\circ g_2=1_B$，则 $g_1=g_2$.

证明 $g_1=g_1\circ 1_B=g_1\circ(f\circ g_2)=(g_1\circ f)\circ g_2=1_B\circ g_2=g_2$. ▌

推论 1.1 若 f 为可逆映射，则 f 的所有左逆映射、右逆映射都相等. ▌

称可逆映射 f 的唯一的左(右)逆映射为 f 的逆映射，记为 f^{-1}.

显然，(1)若 f 可逆，则 f^{-1} 也可逆，且 f 与 f^{-1} 互为逆映射，即 $(f^{-1})^{-1}=f$；

(2) 若 f 可逆，则 f^{-1} 存在，且 $f\circ f^{-1}=1_B$，$f^{-1}\circ f=1_A$.

定理 1.3 设 $f: A\to B$ 是一个映射，则：

(1) f 为单射当且仅当 f 是左可逆的；

(2) f 为满射当且仅当 f 是右可逆的；

(3) f 为双射当且仅当 f 是可逆的.

证明 (1) ($\Rightarrow$)若 f 为单射，则对任意 $b\in B$，至多只有一个(可能没有)$a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 任选定 $a_0\in A$，作映射 $g: B\to A$ 如下：对任意 $b\in B$，

$$g(b)=\begin{cases} a, & \text{若存在 } a\in A \text{ 使得 } f(a)=b, \\ a_0, & \text{否则}. \end{cases}$$

易证：$g\circ f=1_A$，即 f 是左可逆的.

($\Leftarrow$) 设 f 是左可逆的，令 $g: B\to A$ 是 f 的一个左逆映射. 任意 $a_1,a_2\in A$，若 $f(a_1)=f(a_2)$，则 $g(f(a_1))=g(f(a_2))$，从而 $(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)$，$1_A(a_1)=1_A(a_2)$，$a_1=a_2$，故 f 为单射.

(2) ($\Rightarrow$) 设 f 为满射，则对每个 $b\in B$，存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=$

b，这样的 a 可能很多，任取定其中的一个，记为 a_b，则 $f(a_b)=b$. 作映射 $g: B\to A$ 为：对任意的 $b\in B$，$g(b)=a_b$. 则 g 为 f 的一个右逆映射.

(⇐) 设 f 是右可逆的，$g: B\to A$ 是 f 的一个右逆映射，$f\circ g=1_B$. 对任意 $b\in B$，$b=1_B(b)=(f\circ g)(b)=f(g(b))$，而 $g(b)\in A$，故 f 为满射.

(3) 综合(1)和(2)立得. ▌

§1.2 关系和函数

设 A,B 是两个集合，$a\in A,b\in B$，称集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 为 a 与 b 的一个有序对，记为 $\langle a,b\rangle$.

设 $\langle a_1,a_2\rangle$ 与 $\langle b_1,b_2\rangle$ 是两个有序对，易证：

$$\langle a_1,a_2\rangle=\langle b_1,b_2\rangle \text{当且仅当 } a_1=b_1,\text{ 且 } a_2=b_2.$$

有序对的概念可推广到 n 个元素的情形($n\in N,n>2$)：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，$a_1\in A$，$a_2\in A_2$，$\cdots$，$a_n\in A_n$，令：

$$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=\langle\langle a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle.$$

由归纳法易证：$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$ 当且仅当 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$\cdots$，$a_n=b_n$.

对 $n(n\in N,n\geqslant 2)$ 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，令

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle \mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\},$$

称 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的卡式积. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，记 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为 A^n.

自然地，我们约定 $A^0=\phi$，$A^1=A$.

卡式积和映射具有内在的联系：A_1,A_2 的卡式积 $A_1\times A_2$ 与下列集合 F 具有一一对应关系：

$$F=\{f \mid f:\{1,2\}\to A_1\cup A_2,\ f(1)\in A_1, f(2)\in A_2\}.$$

事实上，令：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\tau: F \to A_1 \times A_2,\ \tau(f) = \langle f(1), f(2) \rangle \quad (\text{任意 } f \in F),$$

则 τ 即为与 F 与 $A_1 \times A_2$ 间的一个双射.

卡式积与映射之间的这种内在联系使得我们可以把卡式积概念推广到无限多个集合情形，下面就来进行这样的推广.

设 $A_i(i \in I)$是一簇集合，直观上看，$A_i(i \in I)$的卡式积应为：对每个集合$\{a_i \mid i \in I\}$ $(a_i \in A_i, i \in I)$，将其中的所有元素排成有序列，则这些有序列就构成了 $A_i(i \in I)$的卡式积. 但这种可能无限的集合的有序性不好直接表示(因为 I 中元素没有有序性)，我们采用"映射表示"的方法来表达此种有序性. 此类映射为 $f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$，且满足：$f(i) \in A_i$(任意 $i \in I$). 由此，我们作如下定义：

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i,\ f(i) \in A_i,\ \text{任意 } i \in I\},$$

称 $\prod_{i \in I} A_i$ 为 $A_i(i \in I)$的卡式积. 这是上述集合 F 的一种自然推广.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n \in N, n \geqslant 1)$是 n 个集合，卡式积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的一个子集 R 就称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 间的一个 n 元关系. 对于$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，若$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle \in R$，则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有关系 R，记为 $R(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，否则，称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不具有关系 R.

特别地，(1) 当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，若 $R \subseteq A^n$，则称 R 为 A 上的一个 n 元关系.

(2) 当 $n=2$时，对 $R \subseteq A_1 \times A_2$，即 R 为 A_1, A_2间的一个二元关系，若 a_1, a_2具有关系 R，则将其记为 $a_1 R a_2$，否则记为 $a_1 \overline{R} a_2$.

映射与具有某种性质的二元关系可以互相确定，记

$$\mathscr{F} = \{f \mid f: A \to B \text{ 是映射}\};$$

$$\mathscr{R} = \{R \subseteq A \times B \mid \text{任意 } a \in A, \text{存在唯一 } b \in B, \text{使得} \langle a, b \rangle \in R\}.$$

则

$$\tau: \mathscr{F} \to \mathscr{R},\ \tau(f) = \{\langle a, f(a) \rangle \mid a \in A\} \ (\text{任意 } f \in \mathscr{F})$$

是一个一一对应. 就是说，A 到 B 的映射可看作是具有性质：

$$\text{任意 } a\in A\text{，存在唯一 } b\in B \text{ 使得} \langle a,b\rangle\in R$$

的 A 与 B 间的一个二元关系，从而可以将 A 到 B 的映射看作是 A 与 B 间的一种特殊二元关系. 反之也成立.

下面是几种常见的二元关系.

例1.1 设 A 是一个非空集合，令 $E=\{\langle a,a\rangle|a\in A\}\subseteq A^2$，则 E 是 A 上的一个二元关系. 对任意 $\langle a,b\rangle\in A^2$，$aEb$ 当且仅当 $a=b$，即 E 为 A 上的相等关系.

例1.2 记 R 为实数集，令 $S=\{\langle a,b\rangle|a,b\in R,a\leqslant b\}\subseteq R^2$，则 S 为 R 上的一个二元关系. 易知：对任意 $\langle a,b\rangle\in R^2$，$aSb$ 当且仅当 $a\leqslant b$，即 S 为实数间的“不大于”关系.

例1.3 记 N 为自然数集，令 $D=\{\langle m,n\rangle\in N^2|\ m|n\}\subseteq N^2$. 易知：$D$ 为自然数间的整除关系.

设 R 是集合 A 上的一个二元关系，

(1) 若任意 $a\in A$，aRa，则称 R 具有自反性；

(2) 如果任意 a，$b\in A$，当 aRb 时就有 bRa，则称 R 具有对称性；

(3) 如果任意 a，$b\in A$，当 aRb 且 bRa 时有 $a=b$，则称 R 具有反对称性；

(4) 如果任意 $a,b\in A$，当 aRb 且 bRc 时有 aRc，则称 R 具有传递性；

(5) 若 A 上二元关系 R 具有自反性、对称性和传递性，则称 R 为 A 上的一个等价关系；

(6) 若 R 具有自反性、反对称性和传递性，则称 R 为 A 上的一个偏序关系，此时称 (A,R) 为一个偏序集.

设 $\sim$ 是 A 上的一个等价关系，$a\in A$，

记 $\overline{a}=\{b\in A|b\sim a\}$，称 $\overline{a}$ 为 a 关于 $\sim$ 所在的等价类；

记 $A/\sim=\{\overline{a}|a\in A\}$，称为 A 关于 $\sim$ 的商集.

易证：(1) 任意 $a,b\in A$，$\overline{a}=\overline{b}$ 或者 $\overline{a}\cap\overline{b}=\phi$；

(2) $\bigcup_{a\in A}\overline{a}=A$.

例1.4 易知：例1.1中的 E 是 A 上的等价关系，此时，对任意 $a\in A,\overline{a}=\{a\},A/E=\{\{a\}|a\in A\}$. 例1.2和例1.3中的 S,D 都不是等价关系. E,S,D 分别为 A,R,N 上的偏序关系.

当 R 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 间的一个 n 元关系时，任意 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 或者具有关系 R，或者不具有，即 $R(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或者成立，或者不成立. 如果我们把 $R(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 看成是表达了某种判断，则此判断或为正确的，或为错误的，二者必居其一，且只居其一. 以后我们也称 n 元关系为 n 元谓词，这种名称在以后常用到.

称映射 $f: A^n\to A$ 为 A 上的一个 n 元函数(或 n 元运算)，注意，对于 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in A^n$，虽然 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 只代表 A 中一个元素，即某个个体，不代表任何判断，但对 f 本身，我们知道，它是某种特殊的 A 上的 $n+1$元关系，从这个角度来看，函数和谓词没有本质的区别，这一点对以后的理解将有帮助.

若 $B\subseteq A^n$，则映射 $f: B\to A$ 称为 A 上的一个 n 元部分函数，或 n 元部分运算.

§1.3 集合的势

直观地说，集合的势就是该集合中所含元素的个数. 对于只含有限多个元素的所谓有限集来说，这种说法易于理解，但对于含有无限多个元素的所谓无限集来说，这种说法使得我们难以比较它们的“势”，因为这需要比较所谓“无穷数”的大小. 因而我们需要更精确地定义“势”的概念，采用的办法是进行元素对应，即使用“映射”的概念. 在本书中，我们只用到有限集与最小无限集的“势”的概念.

称集合 A 与 B 是等势的，若存在 A 到 B 的双射 $f: A\to B$，记为 $|A|=|B|$. 称 A 的势小于或等于 B 的势，若存在 A 到 B 的单射 $f: A\to B$，记为 $|A|\leqslant|B|$.

注意：这个定义还没有定义集合的势，而只是定义了集合上的两个二元关系.

定理1.4 (1) 集合的"等势"关系是集合间的一个等价关系；

(2) 若 $|A|=|B|$，则 $|A|\leqslant|B|$ 且 $|B|\leqslant|A|$；

(3) 若 $|A|\leqslant|B|$ 且 $|B|\leqslant|C|$，则 $|A|\leqslant|C|$.

证明 (1) $1_A: A\to A$ 是双射，故 $|A|=|A|$. 若 $|A|=|B|$，则存在双射 $f: A\to B$，从而 $f^{-1}: B\to A$ 存在，且也是双射，故 $|B|=|A|$. 又若 $|A|=|B|$ 且 $|B|=|C|$，则存在双射 $f: A\to B$ 及 $g: B\to C$，则 $g\circ f: A\to C$ 也是双射，从而 $|A|=|C|$.

(2) 显然成立.

(3) 仿(1)之传递性证明立得. ▌

事实上，定理1.4(2)之逆命题也成立.

定理1.5(Cantor-Bernstein 定理) 若 $|A|\leqslant|B|$ 且 $|B|\leqslant A$，则 $|A|=|B|$.

证明 设 $f: A\to B$ 和 $g: B\to A$ 都是单射.

(1) 首先证明：存在 A 的子集 A_1 和 A_2 及 B 的子集 B_1 和 B_2 使得 $A_1\cap A_2=\phi, B_1\cap B_2=\phi$, $A=A_1\cup A_2, B=B_1\cup B_2, f(A_1)=B_1$, $g(B_2)=A_2$.

对任意 $Z\subseteq A$，记 $Z^*=A-g(B-f(Z))$，则：

(1.1) 如果 $Z_1\subseteq Z_2\subseteq A$，则 $Z_1^*\subseteq Z_2^*$. 事实上，$Z_1\subseteq Z_2\Rightarrow f(Z_1)\subseteq f(Z_2)\Rightarrow B-f(Z_1)\supseteq B-f(Z_2)\Rightarrow g(B-f(Z_1))\supseteq g(B-f(Z_2))\Rightarrow A-g(B-f(Z_1))\subseteq A-g(B-f(Z_2))$，即 $Z_1^*\subseteq Z_2^*$.

(1.2) 令 $M=\{Z\subseteq A\,|\,Z^*\subseteq Z\}\subseteq P(A)$. 因 $A\in M$，故 $M\neq\phi$. 设 $A_1=\bigcap\limits_{Z\in M}Z$，则 $A_1=A_1^*$，这是因为对任意的 $Z\in M$，$A_1\subseteq Z$，由(1.1)

知：$A_1^* \subseteq Z^* \subseteq Z$，从而 $A_1^* \subseteq \bigcap\limits_{Z\in M} Z = A_1$. 另一方面，再由(1.1)知 $(A_1^*)^* \subseteq A_1^*$，故 $A_1^* \in M$，从而 $A_1 \subseteq A_1^*$，即 $A_1 = A_1^*$.

(1.3) 设 $B_1 = f(A_1)$，$B_2 = B - f(A_1) = B - B_1$，$A_2 = g(B_2)$. 由(1.2)知 $A_1 = A_1^* = A - g(B - f(A_1)) = A - g(B_2) = A - A_2$，从而 A_1, A_2, B_1, B_2 即为所求.

(2) 再来证明：$|A| = |B|$.

由于 f, g 都是单射，故 $f\restriction_{A_1}: A_1 \to f(A_1) = B_1$ 和 $g\restriction_{B_2}: B_2 \to g(B_2) = A_2$ 都是双射，从而 $(g\restriction_{B_2})^{-1}: A_2 \to B_2$ 也为双射，作 $h: A \to B$ 如下：

$$h(a) = \begin{cases} (f\restriction_{A_1})(a) = f(a), & \text{当 } a \in A_1 \text{ 时}, \\ (g\restriction_{B_2})^{-1}(a), & \text{当 } a \in A_2 \text{ 时}. \end{cases} \quad \text{(见图1.1)}$$

则 h 为双射，故 $|A| = |B|$. ▌

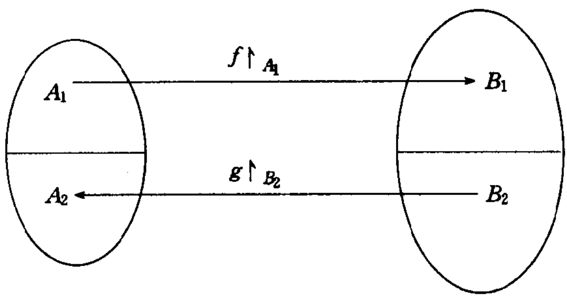


图 1.1

由定理1.4和定理1.5不难证明，势的"小于或等于"关系是集合间的一个偏序关系.

若 $A = \phi$ 或存在自然数 n 使得 $|A| = |\{0, 1, 2, \cdots, n\}|$，则称 A 为一个有限集，不是有限集的集合称为无限集. 若 A 与自然数集 N 等势，则称 A 为可列集，有限集与可列集统称为可数集.

由定理1.4的(1)易知：所有可列集等势，以后我们以 ω 或 $\aleph$ 来

表示可列集的势. 若 A 为可列集，则存在双射 $f: N \to A$，从而 $A = f(N) = \{f(0), f(1), f(2), \cdots\}$. 若记 $a_n = f(n)(n \in N)$，则 $A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，即可将 A 的全部元素按某种顺序排列出来，称为枚举 A 的元素.

对于有限集，我们也有类似的性质.

引理1.1 有限集不能与其任一真扩集同势，也不能与其任一真子集同势.

证明 设 A 为一个有限集.

(1) A 不能与其任一真扩集同势. (*)

(1.1) 当 $A = \phi$ 时，若 $A \subset B$，则 $B \neq \phi$，从而存在 $b \in B$. 对于任意映射 $f: A \to B$，b 关于 f 在 A 中没有原象，从而 f 不能为满射，更不能为双射，故 $|A| \neq |B|$.

(1.2) 当 $A \neq \phi$ 时，则存在自然数 n 和双射 $g: \{0, 1, 2, \cdots, n\} \to A$，故 $A = \{g(0), g(1), g(2), \cdots, g(n)\} = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中 $a_i = g(i)$，$0 \leqslant i \leqslant n$.

下面对 n 归纳证明(*)成立.

(1.2.1) 当 $n = 0$ 时，若存在集合 B 使得 $A \subset B$ 且 $|A| = |B|$，则存在双射 $f: A \to B$，此时，$A = \{a_0\}$，$B = f(A) = \{f(a_0)\}$. 由于 $A \subset B$，故存在 $b \in B$，$b \notin A$. 由于 $b \in B$，故 $b = f(a_0)$. 又由于 $a_0 \in A \subset B$，故 $a_0 = f(a_0)$，从而 $b = a_0 \in A$，矛盾.

(1.2.2) 假设(*)对 $n-1(n \geqslant 1)$ 成立，考察(*)对 n 情形. 此时，$A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. 由归纳假设：$\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 不与其任一真扩集同势.

若存在 A 的真扩集 B 使 $|B| = |A|$，则存在 $b \in B$，但 $b \notin A$，从而 $b \neq a_i$，$0 \leqslant i \leqslant n$，且存在双射 $f: A \to B$. 设 $f(a_n) = b' \in B$.

(a) 若 $b' = b$，则 $f\restriction_{A-\{a_n\}}: A - \{a_n\} \to B - \{b\}$ 是双射，从而 $|A - \{a_n\}| = |B - \{b\}|$. 又由于 $A \subset B$ 且 $a_n \neq b$，故 $B - \{b\}$ 是 $A - \{a_n\}$ 的一个真扩集，但 $A - \{a_n\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$，与归纳假设矛盾.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com