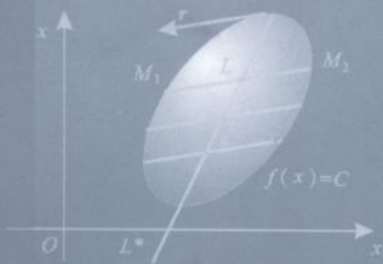
浙江大学出版社



数值分析引论

易大义 陈道琦 编

数值分析引论

易大义　陈道琦　编

浙江大学出版社

DV69/13

内 容 简 介

本书系统地介绍了科学和工程计算中近代的、常用的计算方法，概念及应用，着重培养学生的科学计算能力。主要内容有：插值法、函数与数据的逼近、数值积分与数值微分、解方程组的直接法、解大型稀疏线性方程组的迭代法、非线性方程(组)数值解法、常微分方程数值解法、矩阵特征值的计算方法等。

书中主要计算方法都写有算法或计算步骤，同时书内还配有较多的数值计算例子。

本书可作为高等理工院校研究生的计算方法教材，也可作为大学生、工程技术人员学习计算方法的参考书。

数值分析引论

易大义 陈道琦 编

责任编辑 贾吉柱

*

浙江大学出版社出版

(杭州玉古路20号 邮政编码310027)

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

浙江大学出版社电脑排版中心排版

浙江大学华家池印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*

850×1168 32开 16印张 430千字

1998年9月第1版 2000年4月第2次印刷

印数：1001—3000

ISBN 7-308-02054-1/O·228 定价：18.00元

前　言

随着计算机技术的发展和科学技术的进步，科学与工程计算（简称科学计算）的应用范围已扩大到许多学科领域，已形成了一些边缘学科，例如，计算物理、计算力学、计算化学等。目前，实验、理论、计算已成为人们进行科学活动的三大方法。对从事工程与科技工作的人员，学习和掌握计算方法（数值分析）是非常必要的。

本书是为理工科院校工学硕士研究生学习计算方法（数值分析）而编写的。内容为数值分析的基本概念及理论，介绍科学计算中近代的、常用的、有效的解各种数学问题的计算方法，通过学习与实习培养学生的科学计算能力。

对于大学（本科）中未学过计算方法的读者，可选学书中未带星号部分内容，学过计算方法（简单的）读者，可选学书中部分内容（包括带星号的内容）。

本书每一章的主要方法都写有算法或计算步骤，可供读者学习、应用时参考。书内还配有较多的数值例子，便于读者自学。

学习本书需要具备微积分、线性代数、常微分方程的基础知识，本书还可作为工程技术人员学习计算方法的参考书。

本书第一、二、三、五、六、九章由易大义编写，第四、七、八章由陈道琦编写。

书中缺点和错误敬请读者批评指正。

易大义　陈道琦

1996 年 8 月于浙大求是园

目　　录

第一章　数值计算引论

§1　数值分析研究对象

随着计算机技术的发展，科学技术的进步，科学与工程计算（简称 科学计算）的应用范围已扩大到许多学科领域，形成一些边缘学科，例如计算物理、计算化学、计算力学等。目前，实验、理论、计算已成为人类进行科学活动的三大方法。

为了解某科学与工程实际问题，首先是依据物理、力学规律建立问题的数学模型，这些模型一般为代数方程、微分方程等。科学计算的一个重要方面就是要研究解这些数学问题的数值计算方法（适合计算机计算的计算方法），然后通过计算软件在计算机上计算出实际需要的结果。数值分析内容包括：函数的插值与逼近方法，微分与积分计算方法，线性方程组与非线性方程组计算方法，常微分与偏微分数值解等。

本书将介绍数值分析的基本概念、理论及解各种数学问题的有效计算方法。

§2　误差来源及种类

在工程和科学计算中需要估计计算结果的精确度，而下述几种误差可能影响计算结果的精确度。

1. 模型误差

由实际问题建立数学模型，要忽略一些次要因素的影响，要简化许多条件。因此，数学模型是实际问题理想化、简化得到的，是实际问

题的近似。把实际问题的解与数学模型的解之间的误差称为模型误差。

2. 观测误差

数学模型中包含有一些物理量(例如时间、温度、长度、电压等)(初始数据)大多都是由观察、测量得到的。由于受到测量工具的限制，测量的数据只能是近似的，称测量值与真值之间误差为观测误差。

3. 截断误差

在求解某数学问题时，用有限的过程代替无限过程所产生的误差称为截断误差(或方法误差)。

例1 用 $f(x)$ 的 Taylor 展开计算 $f(x)$ 函数值。

设有 $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x_0 与 x 之间。

当我们用近似公式来代替 $f(x)$ 进行计算时，即

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$ (当 $|x - x_0|$ 较小时)

则数值方法的截断误差为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

4. 舍入误差

有了求解数学问题的计算公式后，用计算机进行数值计算时，由于计算机字长的位数有限，原始数据只能用有限位数表示，即要舍入。且当两数进行算术运算时，其结果也要进行舍入，这种由舍入产生的误差称为舍入误差。

例如，$\pi = 3.1415926\cdots$

如用 3.1416 代替 π,则产生的舍入误差

$$\pi - 3.1416 = -0.0000073\cdots$$

数值分析主要研究截断误差、舍入误差对计算结果的影响。

§3 误差的基本概念

3.1 绝对误差和相对误差

定义 1

(1) 设某量的准确值为 x,x^* 是 x 的近似值,称 $e(x) = x^* - x$ 为 x^* 的绝对误差(简称误差)。如果 $|e(x)| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon$,称 ε 为 x^* 的绝对误差限,即 $x^* - \varepsilon \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon$,在应用上常记为 $x = x^* \pm \varepsilon$。

(2) 绝对误差与准确值比值,即

$$e_r(x) = \frac{x^* - x}{x} = \frac{e(x)}{x}$$

称为 x^* 的相对误差,如果 $|e_r(x)| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \leqslant \delta$,称 δ 为 x^* 的相对误差限。

例 2 设 $\pi = 3.1415926\cdots$,用四舍五入方法取 4 位小数得近似数 $\pi^* = 3.1416$,求 π^* 绝对误差限。显然有,

$$|e(\pi)| = |\pi - \pi^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

例 3 设 $x_1 = 1.234, x_2 = 0.002$

$$x_1^* = 1.233, x_2^* = 0.001$$

估计近似数 x_1^*, x_2^* 的绝对误差及相对误差。

解 显然 $|e(x_1)| = |x_1^* - x_1| = 10^{-3}$,

$$|e(x_2)| = |x_2^* - x_2| = 10^{-3}$$

这两个近似数绝对误差都是 10^{-3},但 x_1^* 是 x_1 一个较好的近似值,而 x_2 本身就很小,而 x_2^* 绝对误差较小不能说明 x_2^* 是 x_2 的一个较好的

近似值，两数的相对误差为：

$$|e_r(x_1)| = \frac{10^{-3}}{1.234} \approx 8.1 \times 10^{-4} = 0.81\%$$

$$|e_r(x_2)| = \frac{10^{-3}}{0.002} = 0.5 = 50\%$$

由此可见，要确定一个量的近似数的精确度，除了要看近似数绝对误差大小之外，还必须考虑该量本身的大小。因此近似数的相对误差是近似数精确度的基本度量，一个近似数 x^* 的相对误差越小，说明近似数越精确。

相对误差是个无名数，它没有量纲。在实际计算中，由于准确值 x 一般是不知道的，通常将

$$e_r^*(x) = \frac{x^* - x}{x^*} = \frac{e(x)}{x^*}$$

作为 x^* 相对误差。事实上，当 $|e_r^*(x)| = |\frac{e(x)}{x^*}|$ 较小时有

$$\frac{e(x)}{x} - \frac{e(x)}{x^*} = \frac{e^2(x)}{xx^*} = \frac{e^2(x)}{x^*(x^* - e(x))} = \frac{(\frac{e(x)}{x^*})^2}{1 - \frac{e(x)}{x^*}} \approx 0$$

3.2 有效数字

定义 2 设 x 为准确值，x^* 为 x 的近似值且 x^* 表示为

$x^* = \pm (0.a_1a_2\cdots a_n)10^m$（$m$ 为整数）

其中 $a_1 \neq 0$，$a_1 \sim a_n$ 为 $0,1,\cdots,9$ 中一个数字。如果 x^* 误差满足

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2}10^{m-n}$$

即 x^* 误差不超过某位的半个单位。称该位到 x^* 的第一位非零数字为 x^* 的有效数字，即 x^* 有 n 位有效数字。或者说 x^* 准确到该位。

1. 当 x^* 是 x 的 a_{n+1} 按四舍五入原则得到的近似数，则 x^* 具有 n 位有效数字。设

$x = \pm (0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots)10^m$，其中 $a_1 \neq 0$

x^* 是 x 的 a_{n+1} 按四舍五入原则得到的近似数，则有