有限元素法問題詳解

R. H. 加拉格爾　原著

林輝政　譯著

曉 園 出 版 社

世界图书出版公司

内 容 简 介

本书系 R. H. 加拉格尔著 "Finite Element Analysis" 一书的习题详解。

有限元素法问题详解

R. H. 加拉格尔原著

林辉政 译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1994 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1994 年 4 月第一次印刷　　印张：7.25

印数：0001－600　　字数：17.4 万字

ISBN:7－5062－1759－7/O.114

定价：10.90 元（W_B9311/14）

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉著習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徵的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

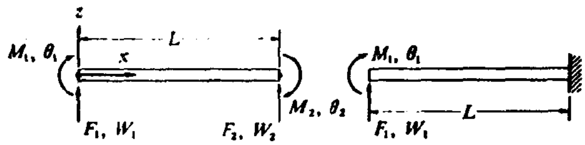
有限元素法問題詳解

（目　　錄）

第二章　定義及基本元素應用

2-1　試建立樑元素之力——變位的混合關係式〔式(2.3)〕。

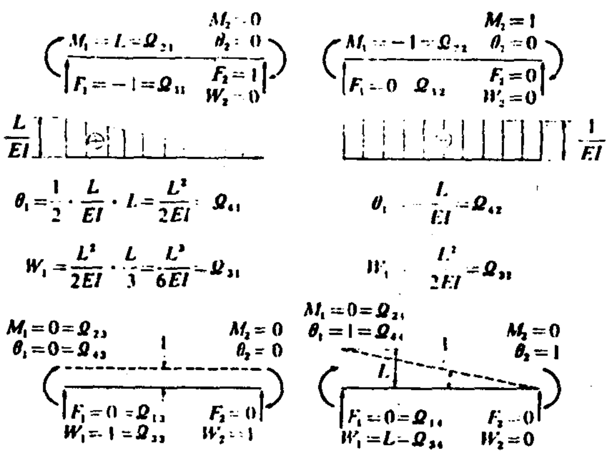
解



解法(1)：使用基本的物理關係。力——變位的混合關係式可寫成如下之形式：

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ \cdots \\ W_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ \cdots \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

上式之矩陣〔Ω〕可參考上圖如下求得之根據面積力矩法（共軛樑法）



$$\therefore \qquad [\Omega]=\left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ L & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline \frac{L^2}{6EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 1 & -L \\ \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

解法(2)：由柔度矩陣及勁度矩陣之關係知（課本 p.40 ）

$$[\Omega]=\left[\begin{array}{c:c} [R]^{-1} & 0 \\ \hdashline [f][R]^{-1} & -[R]^{T} \end{array}\right]$$

對一懸臂樑元素，其柔度矩陣關係式為

$$[f]=\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

節點 1 及節點 2 間力之關係為

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

所以

$$[R]=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \qquad [R]^{T}=\begin{bmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad [R]^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \end{bmatrix}$$

$$[f][R]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

將以上結果代入矩陣［ Ω ］中，可得與解法(1)相同的結果。

2-2 下圖所示之樑元素，其柔度矩陣如下式所示

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}=\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

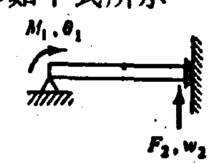


圖 p.2.2

試證明其補應變能與簡支樑元素相同。

解　由課本 p.35 式 (2.4b) 知補應變能之定義為

$$U_1^* = \frac{1}{2}\lfloor F_f \rfloor [f] \{F_f\}$$

(a)　右上圖樑元素之補應變能

$$U_1^* = \frac{1}{2}\lfloor F_f \rfloor [f] \{F_f\}$$

$$= \frac{1}{2}\lfloor F_2 M_1 \rfloor \left(\frac{L}{6EI}\right) \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{L}{12EI}\lfloor (2L^2F_2-3LM_1)(-3LF_2+6M_1) \rfloor \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{L}{6EI}(L^2F_2^2-3LM_1F_2+3M_1^2)$$

(b)　簡支樑元素之補應變能同(a)中之計算方法，可得

$$U_2^* = \frac{L}{6EI}(M_1^2+M_2^2-M_1M_2)$$

其中，

$$\frac{M_1+M_2}{L} = F_2$$

$$M_2 = F_2L - M_1$$

$\therefore$

$$U_2^* = \frac{L}{6EI}[M_1^2+(F_2L-M_1)^2-M_1(F_2L-M_1)] = U_1^*$$

2-3　三角形平面應力元素（圖 p.2.3　）之柔度矩陣如下式所示。試求此元素之勁度矩陣，並與圖 5.4 所示之元素勁度矩陣比較之。

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{Etx_2y_3} \begin{bmatrix} x_2^2 & x_2x_3 & -\mu x_2y_3 \\ x_2x_3 & 2(1+\mu)y_3^2+x_3^2 & -\mu x_3y_3 \\ -\mu x_2y_3 & -\mu x_3y_3 & y_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}$$

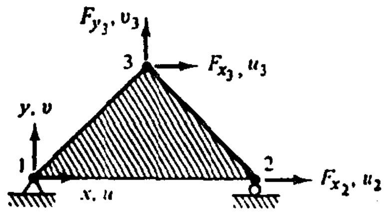


圖 p.2.3

解　由課本 p.39 式 (2.24) 知，元素之勁度矩陣可表爲

$$[k]=\left[\begin{array}{c:c}[f]^{-1} & [f]^{-1}[R]^T \\ \hdashline [R][f]^{-1} & [R][f]^{-1}[R]^T\end{array}\right]$$

現已知柔度矩陣爲

$$[f]=\frac{2}{Et x_2 y_3}\begin{bmatrix} x_3^2 & x_2 x_3 & -\mu x_2 y_3 \\ x_2 x_3 & 2(1+\mu)y_3^2+x_3^2 & -\mu x_3 y_3 \\ -\mu x_2 y_3 & -\mu x_3 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix}$$

柔度矩陣的行列式値及其反矩陣各項 F_{ij} 分別爲

$$|f|=\frac{4(1-\mu^2)(1+\mu)x_2 y_3}{Et}$$

$$F_{11}=2(1+\mu)\left[y_3^2+\frac{(1-\mu)}{2}x_3^2\right]$$

$$F_{12}=-(1-\mu^2)x_2 x_3=F_{21}$$

$$F_{13}=2\mu(1+\mu)x_2 y_3=F_{31}$$

$$F_{22}=(1-\mu^2)x_2^2 \qquad F_{23}=0=F_{32}$$

$$F_{33}=2(1+\mu)x_2^2$$

$$\therefore\quad [f]^{-1}=\frac{Et}{2(1-\mu^2)x_2 y_3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\quad(u_2)\quad & \quad(u_3)\quad & \quad(v_3)\quad\end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c} y_3^2+\frac{1-\mu}{2}x_3^2 & -\frac{1-\mu}{2}x_2 x_3 & \mu x_3 x_3 \\ \hdashline -\frac{1-\mu}{2}x_2 x_3 & \frac{1-\mu}{2}x_2^2 & 0 \\ \hdashline \mu x_2 y_3 & 0 & x_2^2 \end{array}\right]\end{array}$$

由圖p 2.3 知，反力（ F_{x1} , F_{y1} ， F_{y2} ）及外力（ F_{x2} ， F_{x3} ， F_{y3} ）之關係爲

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -y_3/x_2 & -(x_2-x_3)/x_2 \\ 0 & y_3/x_2 & -x_3/x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \qquad [R] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -y_3/x_2 & -(x_2-x_3)/x_2 \\ 0 & y_3/x_2 & -x_3/x_2 \end{bmatrix}$$

因此

$$[R][f]^{-1} = \frac{Et}{2(1-\mu^2)x_2y_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad\qquad (u_2) \qquad\qquad & \qquad (u_3) \qquad & \qquad (v_3) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c} -y_3^2+\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)x_3 & -\frac{1-\mu}{2}x_2(x_2-x_3) & -\mu x_2y_3 \\ \hdashline \frac{1-\mu}{2}x_3y_3-\mu(x_2-x_3)y_3 & -\frac{1-\mu}{2}x_2y_3 & -(x_2-x_3)x_2 \\ \hdashline -\frac{1+\mu}{2}x_3y_3 & \frac{1-\mu}{2}x_2y_3 & -x_2x_2 \end{array}\right] \end{array}$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -y_3/x_2 & y_3/x_2 \\ 0 & -(x_2-x_3)/x_2 & -x_3/x_2 \end{bmatrix}$$

$[R][f]^{-1}[R]^T =$

$$\frac{Et}{2(1-\mu^2)x_2y_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \qquad\qquad (u_1) \qquad\qquad & \qquad (v_1) \qquad & \qquad (v_2) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c} y_3^2+\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)^2 & \frac{1+\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 & \begin{array}{l} -\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 \\ +\mu x_3y_3 \end{array} \\ \hdashline \frac{1+\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 & \frac{1-\mu}{2}y_3^2+(x_2-x_3)^2 & \begin{array}{l} -\frac{1-\mu}{2}y_3^2 \\ +(x_2-x_3)x_3 \end{array} \\ \hdashline \begin{array}{l} -\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 \\ +\mu x_3y_3 \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1-\mu}{2}y_3^2 \\ +(x_2-x_3)x_3 \end{array} & \frac{1-\mu}{2}y_3^2+x_3^2 \end{array}\right] \end{array}$$

將以上所得之各矩陣 $[f]^{-1}$，$[R][f]^{-1}$，$[R][f]^{-1}[R]^T$ 代入式 (2.24) 中，得

$$[k]=\frac{Et}{2(1-\mu^2)x_2y_3}$$

$$\times\begin{bmatrix}
y_3^2+\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)^2 & & & & & \\
-y_3^2+\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)x_3 & y_3^2+\frac{1-\mu}{2}x_3^2 & & (\text{Sym.}) & & \\
-\frac{1-\mu}{2}\times(x_2-x_3)x_2 & -\frac{1-\mu}{2}x_2y_3 & \frac{1-\mu}{2}x_2^2 & & & \\
-\frac{1+\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 & -\mu(x_2-x_3)y_3+\frac{1-\mu}{2}x_3y_3 & -\frac{1-\mu}{2}x_2y_3 & \frac{1-\mu}{2}y_3^2+(x_2-x_3)^2 & & \\
\mu x_3y_3-\frac{1-\mu}{2}(x_2-x_3)y_3 & -\frac{1+\mu}{2}x_3y_3 & \frac{1-\mu}{2}x_2y_3 & -\frac{1-\mu}{2}y_3^2+(x_2-x_3)x_3 & \frac{1-\mu}{2}y_3^2+x_3^2 & \\
-\mu x_2y_3 & \mu x_2y_3 & 0 & -(x_2-x_3)x_2 & -x_2x_3 & x_2^2
\end{bmatrix}$$

2-4 下式爲三角形元素之柔度矩陣，其邊界條件爲 $u_2=v_2=v_3=0$。試證其補應變能等於習題 2-3 之柔度矩陣之補應變能。

$$\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_3\end{Bmatrix}=\frac{2}{Etx_2y_3}\begin{bmatrix}
(x_2)^2 & & (\text{Sym.})\\
\frac{\mu x_2^2y_3}{x_{3-2}} & \frac{y_3^2x_2^2}{(x_{3-2})^2} & \\
\frac{\mu x_2y_3^2}{x_{3-2}}-x_2x_{3-2} & -\mu x_2y_3+\frac{y_3^2x_2}{(x_{3-2})^2} & 2y_3^2+\frac{x_{3-2}^2+y_3^2}{(x_{3-2})^2}
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_{x_1}\\F_{y_1}\\F_{x_3}\end{Bmatrix}$$

式中，$x_{3-2}=x_3-x_2$。

解 邊界條件爲 $u_2=v_2=v_3=0$之三角形元素之補應變能爲

$$U_1^*=\frac{2}{Etx_2y_3}\left[\left\{(x_2)^2\cdot F_{x_1}+\frac{\mu x_2^2y_3}{(x_3-x_2)}\cdot F_{y_1}+\left(\frac{\mu x_2y_3^2}{(x_3-x_2)}-x_2(x_3-x_2)\right)\cdot F_{x_3}\right\}\right]F_{x_1}$$

$$+\left\{\frac{\mu x_2^2y_3}{(x_3-x_2)}\cdot F_{x_1}+\frac{y_3^2x_2^2}{(x_3-x_2)^2}\cdot F_{y_1}+\left(\frac{y_3^2x_2}{(x_3-x_2)^2}-\mu x_2y_3\right)\cdot F_{x_3}\right\}F_{y_1}$$

$$+\left\{\left(\frac{\mu x_2y_3^2}{(x_3-x_2)}-x_2(x_3-x_2)\right)\cdot F_{x_1}+\left(\frac{y_3^2x_2}{(x_3-x_2)^2}-\mu x_2y_3\right)\cdot F_{y_1}\right.$$

$$
+\left(\frac{(x_3-x_2)^4+y_3^4}{(x_3-x_2)^2}+2y_3^2\right)\cdot F_{x_3}\Big\}F_{x_3}
$$

$$
=\frac{2}{Etx_2y_3}\Big[(x_2)^2\cdot F_{x_1}^2+\frac{2(\mu x_2^2y_3)}{(x_3-x_2)}\cdot F_{x_1}\cdot F_{y_1}+2\left(\frac{\mu x_2y_3^2}{x_3-x_2}-x_2(x_3-x_2)\right)F_{x_1}F_{x_3}
$$

$$
+\frac{y_3^2x_2^2}{(x_3-x_2)^2}\cdot F_{y_1}^2+2\left(\frac{y_3^3x_2}{(x_3-x_2)}-\mu x_2y_3\right)F_{y_1}F_{x_3}+\left(\frac{(x_3-x_2)^4+y_3^4}{(x_3-x_2)}+2y_3\right)F_{x_3}^2\Big] \tag{1}
$$

而習題 2-3 者之補應變能爲

$$
U_2^*=\frac{2}{Etx_2y_3}[(x_2)^2\cdot F_{x_2}^2+2x_2x_3\cdot F_{x_2}F_{x_3}-2\mu x_2y_3\cdot F_{x_2}F_{y_3}
$$

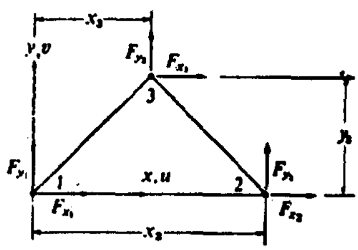
$$
+(2(1-\mu)y_3+x_3^2)\cdot F_{x_3}^2-2\mu x_3y_3\cdot F_{x_3}F_{y_3}+y_3^2F_{y_3}^2] \tag{2}
$$

因各力間具有下列平衡關係式

$$F_{x_1}+F_{x_2}+F_{x_3}=0 \tag{3}$$

$$F_{y_1}+F_{y_2}+F_{y_3}=0 \tag{4}$$

$$F_{y_2}\cdot x_2+F_{y_3}\cdot x_3-F_{x_3}\cdot y_3=0 \tag{5}$$



式(3)及式(5)可分別改寫爲式(6)及式(7)，並將式(7)代入式(4)中，得

$$F_{x_1}=-(F_{x_2}+F_{x_3}) \tag{6}$$

$$F_{y_2}=\frac{1}{x_2}\cdot(F_{x_3}\cdot y_3-F_{y_3}\cdot x_3) \tag{7}$$

$$F_{y_1}+\frac{1}{x_2}(F_{x_3}\cdot y_3-F_{y_3}\cdot x_3)+F_{y_3}=0$$

$$\therefore\quad F_{y_1}=-\frac{y_3}{x_2}F_{x_3}+\left(\frac{x_3}{x_2}-1\right)\cdot F_{y_3} \tag{8}$$

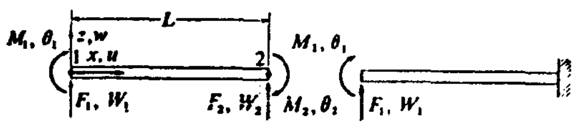
再將式(6)，(8)代入式(1)中，則式(1)可得與式(2)相同的結果

$$
U_1^*=\frac{1}{Etx_2y_3}[(x_2)^2\cdot F_{x_2}^2+2x_2x_3\cdot F_{x_2}F_{x_3}-2\mu x_2y_3F_{x_2}F_{y_3}
$$

$$
+(2(1-\mu)y_3+x_3^2)\cdot F_{x_3}^2-2\mu x_3y_3\cdot F_{x_3}F_{y_3}+y_3^2F_{y_3}^2]
$$

$$
=U_2^*
$$

2-5 懸臂樑的柔度矩陣（圖 2.8c），如考慮橫向剪切變形的影響時，可在柔度矩陣中相對於 w_1 及 F_{z1} 之柔度係數加上 L/A_sG 即可［即 $\delta_{11}=(L^3/3EI+L/A_sG)$］。其中 A_s 表剪切斷面積（設斷面積內之剪應力為均勻分佈，則與實際斷面積內，依樑理論所求得該面積內剪應力分佈之和所需之面積，稱之為剪切斷面積）G 表剪切模數。試計算該元素之勁度矩陣。



解 剪切變形存在下，懸臂樑柔度矩陣可表為（課本 p.34）：

$$[f]=\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix}2L^2+\frac{6EI}{A_sG} & 3L\\ 3L & 6\end{bmatrix}$$

$\therefore$
$$[f]^{-1}=D\begin{bmatrix}6 & -3L\\ -3L & \left(2L^2+\frac{6EI}{A_sG}\right)\end{bmatrix}$$

式中，
$$D=\frac{2EI}{\left(\frac{18EI}{A_sG}-L^2\right)}$$

由習題 2-1 知，節點 1 及節點 2 之間力之關係為

$$[R]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -L & -1\end{bmatrix},$$

$\therefore$
$$[R]^T=\begin{bmatrix}-1 & -L\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$[R][f]^{-1}=D\begin{bmatrix}-6 & 3L\\ -3L & -\left(2L^2+\frac{6EI}{A_sG}\right)\end{bmatrix}$$

$$[R][f]^{-1}[R]^T=D\begin{bmatrix}6 & 3L\\ 3L & \left(5L^2+\frac{6EI}{A_sG}\right)\end{bmatrix}$$

將以上結果代入式 (2.24) 得

$$[\boldsymbol{k}]=\frac{2EI}{\left(\dfrac{18EI}{A_sG}-L^2\right)}\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & \left(2L^2+\dfrac{6EI}{A_sG}\right) & 3L & -\left(2L^2+\dfrac{6EI}{A_sG}\right) \\ \hline -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & -\left(2L^2+\dfrac{6EI}{A_sG}\right) & 3L & \left(5L^2+\dfrac{6EI}{A_sG}\right) \end{array}\right]$$

2-6 圖 p.2.6 示一彎曲樑，在其所在平面上承受如圖中所示之荷重，若其柔度矩陣如下所示，試求該彎曲樑之勁度矩陣。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}=\frac{R^2}{EI}\begin{bmatrix} \dfrac{3\beta}{2}-2\sin\beta+\dfrac{\sin 2\beta}{4} & & (\text{Sym.}) \\ \cos\beta+\dfrac{\sin^2\beta}{2}-1 & \dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\sin 2\beta}{4} & \\ \beta-\sin\beta & \cos\beta-1 & \beta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1R \\ Q_1R \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

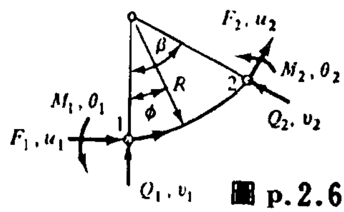


圖 p.2.6

解　為簡化起見，設柔度矩陣為

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}=\frac{R^2}{EI}\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & \beta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1R \\ Q_1R \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

$$d=\beta-\sin\beta \qquad b=\cos\beta+\frac{\sin^2\beta}{2}-1$$

$$a=\frac{3\beta}{2}-2\sin\beta+\frac{\sin 2\beta}{4}$$

$$c=\frac{\beta}{2}-\frac{\sin 2\beta}{4} \qquad e=\cos\beta-1$$

令節點 1 對應之節點力為 $[F_f]$，節點 2 為 $[F_t]$

則 $$\begin{bmatrix} E_2R \\ \Theta_2R \\ M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta & 0 \\ \cos\beta-1 & \sin\beta & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1R \\ \Theta_1R \\ M_1 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} e+1 & \beta-d & 0 & F_1R \\ d-\beta & e+1 & 0 & \Theta_1 R \\ -e & -\beta+d & 1 & M_1 \end{bmatrix}$$

$$= [R] \begin{bmatrix} F_1 R \\ \Theta_1 R \\ M_1 \end{bmatrix}$$

且 $[f]^{-1} = \dfrac{EI}{R^2} \dfrac{1}{ac\beta + 2bed - cd^2 - ae^2 - \beta b^2}$

$$\begin{bmatrix} c\beta - e^2 & -b\beta + de & be - cd \\ de - \beta b & a\beta - d^2 & db - ae \\ be - cd & db - ae & ac - b^2 \end{bmatrix}$$

將以上之結果代入式 (2.24) 得

$$[K] = \frac{EI}{R^2} \frac{1}{ac\beta + 2bed - cd^2 - ae^2 - \beta b^2}$$

$$\begin{bmatrix} c\beta - e^2 & & & \text{sym} \\ de - b\beta & a\beta - d^2 & & \\ be - cd & db - ae & ac - b^2 & \\ ① & ④ & ⑦ & \\ ② & ⑤ & ⑧ & [R][f]^{-1}[R]^T \\ ③ & ⑥ & ⑨ & \end{bmatrix}$$

① $= e^3 + e^2 - ec\beta - c\beta + b\beta^2 - de\beta - db\beta + d^2 e$

② $= c\beta + eb\beta + b\beta - de - dc\beta - \beta e^2$

③ $= c\beta e + de\beta + bd\beta + cd - e^3 - b\beta^2 - d^2 e - be$

④ $= b\beta e + b\beta + \beta d^2 + da\beta - d^3 - de - \beta^2 a - de^2$

⑤ $= d\beta b + de\beta + d^2 - b\beta^2 - ae\beta - a\beta$

⑥ $= de^2 + a\beta^2 + d^3 + ae - db - ad\beta - \beta d^2 - b\beta e$

⑦ $= cde + cd + a\beta e + d^2 b - d\beta b - aed - be - be^2$

⑧ $= cd^2 + \beta be + ae^2 + ae - db - dbe - \beta cd - dbe$

⑨ $= be^2 + db\beta + aed + b^2 - ac - d^2 b - ae\beta - cde$

2-7　如圖 p.2.7 所示位於 $x-y$ 平面之彎曲樑，試求其平衡矩陣。

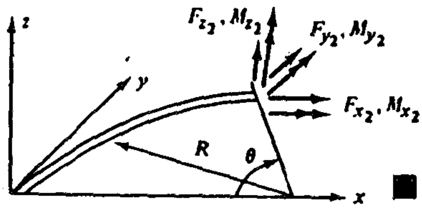
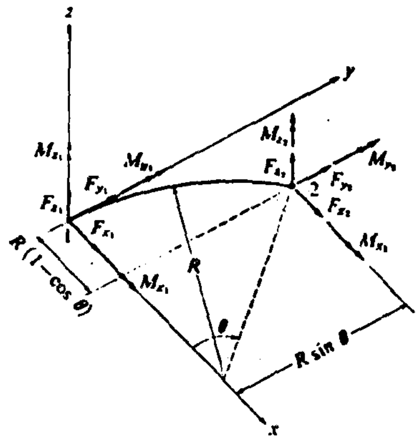


圖 p.2.7

解



如上圖，由合力及合力矩之平衡方程式

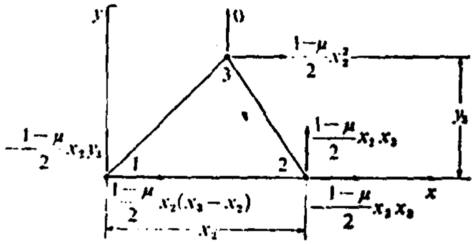
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{Bmatrix} RF_{x_1} \\ RF_{y_1} \\ RF_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\cos\theta) & 0 & -1 & 0 \\ -\sin\theta & -(1-\cos\theta) & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{Bmatrix} RF_{x_2} \\ RF_{y_2} \\ RF_{z_2} \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \\ M_{z_2} \end{Bmatrix}$$

2-8　試證明圖 5.4 中之三角形平面應力元素之勁度矩陣，其第三及

第四行均滿足平衡方程式。



如上圖之三角形元素，若在節點 3 ，x 方向產生一單位變位（$u_3=1$），則各節點之節點反力分別如圖中所示。則其各方向合力分別為

$$\Sigma X=\frac{1-\mu}{2}x_2(x_3-x_2)-\frac{1-\mu}{2}x_2x_3+\frac{1-\mu}{2}x_2^2=0$$

$$\Sigma Y=-\frac{1-\mu}{2}x_2y_3+\frac{1-\mu}{2}x_2y_3+0=0$$

$$\Sigma M_2=\left(\frac{1-\mu}{2}x_2y_3\right)x_2-\left(\frac{1-\mu}{2}x_2^2\right)y_3=0$$

因此勁度矩陣之第三行滿足平衡條件。同理第四行亦同。

2-9 試證明圖 9.13 中之長方形平面應力元素之勁度矩陣，其第一及第六行均滿足平衡條件。

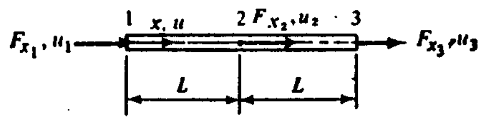
解 同習題 2-9，略。

2-10 試證明表 12.1 中長方形抗撓元素之勁度矩陣，其第一及第二行均滿足平衡條件。

解 略。

2-11 圖 p.2.11表一三節點軸向構件及其勁度矩陣。試縮減此勁度矩陣成只以 u_1 及 u_2 來表示。

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_3} \\ F_{x_2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{6L} \left[\begin{array}{c:c:c} 7 & 1 & -8 \\ \hdashline 1 & 7 & -8 \\ \hdashline -8 & -8 & 16 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



■ p.2.11

解

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{6L} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

將上式改寫成

$$\frac{AE}{6L} \left[\begin{array}{c:cc} 7 & 1 & -8 \\ \hdashline 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_2 \\ \hdashline u_1 \\ u_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_{x_2} \\ \hdashline F_{x_1} \\ F_{x_3} \end{array}\right\}$$

或

$$\frac{AE}{6L} [k] \left\{\begin{array}{c} \Delta_b \\ \hdashline \Delta_c \end{array}\right\} = \{F\} \tag{1}$$

與課本 p.44 式 (2.32) 相比，知

$$k_{bb} = 7 \qquad k_{bc} = \lfloor 1 \quad -8 \rfloor$$

$$k_{cb} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -8 \end{Bmatrix} \qquad k_{cc} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

∴由式 (2.36) 知，轉換矩陣 $[\Gamma_0]$ 爲

$$[\Gamma_0] = \left[\begin{array}{c} -k_{bb}^{-1} k_{bc} \\ \hdashline I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{7}[1 \quad -8] \\ \hdashline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

另由式 (2.34) 知