高等工程专科学校教材

工程数学丛书（一）

线性代数

唐玉范　杨盛祥　编

电子科技大学出版社

高等工程专科学校教材

工程数学

线性代数

唐玉范　杨盛祥　编

电子科技大学出版社

D26.173

内容提要

本书由成都电子机械高等专科学校数学教研室根据国家教委对大专工科教学要求编写，对线性代数最基本的内容行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型的基本知识和基本计算方法作了系统的深入浅出的介绍，层次分明，结构严谨，表达流畅，例题习题选配合理，份量适中，适合大专层次非数学专业教学使用。

线性代数

唐玉范　杨盛祥　编

*

电子科技大学出版社出版

（成都建设北路二段四号）邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092　1/32　印张 4.875　字数 105 千字

版次 1995 年 11 月第一版　印次 1997 年 1 月第二次印刷

印数 5001－7000 册

ISBN 7-81043-452-7/O・40

定价　5.62 元

前 言

本书根据国家教委组织制定的高等学校工程专科线性代数课程教学基本要求编写而成。为了适应不同学校的要求和学生的不同水平，书中的内容可分为三个层次。第一章行列式、第二章矩阵及第三章线性方程组的第一节为基本内容；第三章除第一节外的全部内容为第二层次；第四章相似矩阵及二次型可根据不同专业的需要作为选学内容，为第三层次。结合教学实际情况，可增加少量的习题课。

书中加“*”号的内容不作教学要求，仅供选用。行列式性质的证明作为本书附录以供参考。

本书第一章由唐玉范执笔，其余三章由杨盛祥执笔，全书由唐玉范主持编写实施工作，并经四川师范大学数学系何家儒教授审阅，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，如有疏漏和错误，恳请指正。

编者

1995 年 8 月于

成都电子机械高等专科学校

目　　录

第一章　行　列　式

在实践中，人们所碰到的问题，有许多可以直接地或近似地表示成一些变量间的线性关系，如线性方程组．行列式是研究线性方程组的一个重要工具．本章介绍行列式的定义、性质、计算以及用行列式解线性方程组的方法——克莱姆法则．

§1.1　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式与二元线性方程组

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引入的．我们把未知数的最高次数是一次的方程组称为线性方程组．

二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

为求方程组（1-1）的解，用加减消元法消去 x_2（将 a_{22}乘第一个方程后减去 a_{12}乘第二个方程）得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同样，消去 x_1 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

为使式（1-2）便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

并规定它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称它为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

式中，a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）称为二阶行列式的元素；横排称为行，纵排称为列；从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称次对角线；$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的展开式，它是主对角线上两元素的乘积与次对角线上两元素的乘积的代数和，前者取正，后者取负．可用图 1-1 来记忆．

根据二阶行列式的定义，式（1-2）的分母是方程组（1-1）的未知数的系数按它们在方程组中的位置次序排成的行列式，称为方程组（1-1）的系数行列式，一般记为 D；式（1-2）的分子是用方程组中的常数项 b_1、b_2 分别替换系数行列式中第一列、第二列的元素后得到的行列式，通常记为 D_1、D_2，即

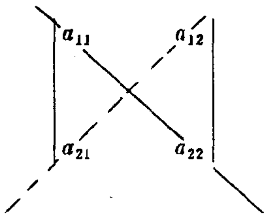

图 1-1

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D$$

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

这样，式（1-2）就可以简记为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D \neq 0)$$

例 1 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ 2x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$

解 （1）因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

所以方程组的解是

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = 2 \\ y = \dfrac{D_2}{D} = 1 \end{cases}$$

(2) 先将方程组写成一般形式

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}$$

因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 25$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 74$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -39$$

所以原方程的解是

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = 2\dfrac{24}{25} \\ y = \dfrac{D_2}{D} = -1\dfrac{14}{25} \end{cases}$$

二、三阶行列式与三元线性方程组

三元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

与二元线性方程类似，用加减消元法消去方程组中的 x_2 与 x_3（如用第一、二两个方程消去 x_3，再用第二、三两个方程消去 x_3，然后从所得的两个方程中消去 x_2）得

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\
&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\
&\quad -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}
\end{aligned}
\tag{1-4}
$$

由二阶行列式及其意义，引进三阶行列式记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\tag{1-5}
$$

其展开式（行列式的值）为

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}
-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}
$$

三阶行列式的值是 6 项的代数和，其计算方法——对角线法则，如图 1-2 所示，图中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项．

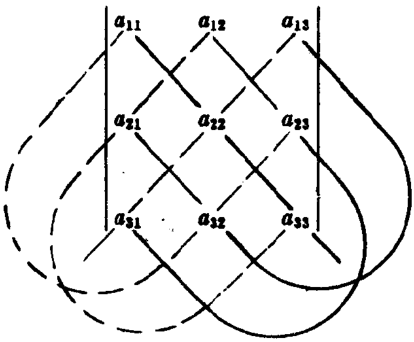

图 1-2

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 4\times 5 + 1\times 1\times 2 + 3\times(-6)\times 2$$

$$-2\times 4\times 2 - 1\times 3\times 5 - 2\times 1\times(-6)$$

$$= -13$$

根据三阶行列式的定义，式（1-4）的右端可写成行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

式（1-4）左端 x_1 的系数即是式（1-5），若记为 D，则当 $D \neq 0$ 时，式（1-4）可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

用同样的方法可得方程组（1-3）的另外两个未知数的值为

$$x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

式中 D 是方程组（1-3）的系数按它们在方程组中的位置次序排成的三阶行列式，称为方程组(1-3)的系数行列式；D_1、D_2、D_3 是用方程组 中的常数项 b_1、b_2、b_3 分别替换 D 中的第一行、第二列、第三列后得到的行列式．

例 2 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=-1-2+6-4-1-3=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & -1 & 2\\ 10 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 13 & 2\\ 1 & 10 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 13\\ 1 & 1 & 10\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-35$$

所以

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=1\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=2\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=7\end{cases}$$

从例 1 和例 2 可见，不论是二元还是三元线性方程组，只要系数行列式不为零，都可用规则简洁的形式给出解答．

三、三阶行列式的性质

为简化行列式的计算，必须进一步分析行列式的性质．

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记作 D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则 D 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

用对角线法则容易验证 $D'=D$．

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等．

由此性质可知，凡是行列式行成立的性质对列也一定成立，反之也正确．

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值仅改变符号．

例如，互换行列式中第一、二两行，应用对角线展开法可以验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以行列式．

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其证明方法是将左端按对角线法展开，所得的各项均有公因子，提出 k 后作为另一个因子的多项式便可以写成右端的行列式．

由性质 2、性质 3 可以直接得出下列三个推论：

推论 1 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零．

如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

推论 2 行列式中若某行（列）的元素有公因子，可把公因子提到行列式记号外面．

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

推论 3 行列式中若有某两行（列）的元素对应成比例，则此行列式的值为零．

性质 4 若一个行列式的某行（列）的元素都可以写成两数之和，则此行列式等于两个行列式之和．

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c_1 & a_{22}+c_2 & a_{23}+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

此性质可用对角线展开法证明.

性质 5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以同一个数 k 后,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

例如 将行列式的第二行的各元素乘以数 k 后加到第一行的对应元素上,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

此式可用性质 4 和推论 3 证明.

在一个行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,划去 a_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) 所在的行和列的所有元素,余下的元素按原来的位置次序构成一个低一阶的行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如,元素 a_{13} 的余子式与代数余子式分别是

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

有了以上两个概念，运用对角线法则容易验证下面的性质：

性质 6 行列式的值等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．

如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则按行：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \quad (i=1,2,3)$$

按列：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \quad (j=1,2,3)$$

此二式依次称为行列式按行与按列的展开式，或按行(列)展开的性质．利用它可以将一个三阶行列式化为二阶行列式来计算．

例如，将行列式 D_1 按第三行展开计算：

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=3(24-20)-(4-6)=14$$

推论 4 行列式的某一行（列）的各元素与另一行（列）的相应元素的代数余子式的乘积之和为零.

例如，按性质 6 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

若将上式右端的 a_{11}、a_{12}、a_{13}分别换成 a_{21}，a_{22}，a_{23}，得到

$$a_{21}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{23}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

即 $$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$$

其余各种情形请读者自证.

容易验证，三阶行列式的性质对二阶行列式也成立. 利用行列式的性质可以简化行列式的计算.