



油气田开发进修丛书

试井分析理论基础

姜礼尚 陈钟祥 著

石油工业出版社

21763

油气田开发进修丛书

试井分析理论基础

姜礼尚 陈钟祥 著



200420366



00294492

石油工业出版社

内 容 提 要

试井分析是认识油藏特性、估算油藏参数的重要手段，是油藏工程师必须掌握的基础知识和专门技术。

本书内容相当精炼和细致地阐述了与试井分析有关的渗流理论和数学方法，有助于提高广大油藏工程技术人员的理论水平，提高理解不断出现的最新试井分析文献的能力。

DP40/2 E

油气田开发进修丛书

试井分析理论基础

姜礼尚 陈钟祥 著

石油工业出版社出版

(北京安定门外外馆东后街甲36号)

煤炭出版社印刷厂排版

北京顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 8印张 183千字 印1—3,750
1985年7月北京第1版 1985年7月北京第1次印刷
书号：15037·2544 定价：1.75元

丛书出版前言

当前世界科学技术发展日新月异，每年发表的科技论文在二千万篇以上，而文献的数量几乎是以每十年翻一番的速度递增；涉及多学科的油气田开发的技术进展及文献积累也不例外。因而从七十年代开始，各主要石油国家都越来越重视知识更新；重视在职继续教育，注意改善和提高技术素质；重视信息资源的开发，以促进油气田开发的现代化。例如国际著名的石油工程师协会（SPE）持续出版了评述型的石油技术专论丛书；美国石油地质家协会（AAPG）发行了该会讲师团在世界各地巡回进行继续教育的专题讲座系列；法国石油研究院（IFP）出版了一系列的提高型油田开发技术专著；荷兰及英国壳牌国际石油公司（Shell）也将历年培训教材以石油科学进展丛书的名义陆续出版，西德也出版了一套便携式入门型石油地质及工程基础丛书。这些具有不同特色、水平、范围的丛书竞芳争艳，反映了国际石油界对智力投资和人才开发的重视。

我国因十年动乱造成石油教育的青黄不接，专业图书供应缺乏，脱产进修、技术讯息交流都存在不少困难；党的十一届三中全会以后，在北京和各油田都曾举办了各种形式的培训机构，但还远不能适应生产发展和技术进展的需要以及技术人员的自修要求。

中国石油学会石油工程学会根据上述情况，并根据北京油气田开发技术培训中心数年来的教学实践，决定邀请有关人员成立“油气田开发进修丛书”编委会，聘请学有专长和实践经验丰富的专家教授，撰写若干专题性著作，并将陆续出版为广大油气田开发技术队伍服务。第一批的选题包括：砂岩油藏的沉积学基础，气藏开发工程基础，油气田开发测井基础，油藏物理基础，渗流力学基础，试井分析理论基础，油藏工程分析方法，油藏数值模拟基础，自喷采油基础，机械采油基础，酸化压裂原理，分层注采工艺，油田化学基础以及提高油藏采收率方法等。今后还将按技术进展和生产及培训需要，继续增加选题，选聘更多人士参预丛书的编撰和审查。

丛书的读者对象是大专毕业和从事油气田开发实践的工程技术人员。它着眼于巩固专题基础，加强知识反馈，促进技术更新。它不同于高等学校教材，也不同于一般专著。丛书的各个专题将分系统、科学地介绍基本概念，基本理论与基本方法。力求理论联系生产实际，反映技术进展动向，阐明技术问题，同时将综合反映出油气田开发技术的多个侧面及其内在联系。

考虑到有关专业术语、符号、量制尚待统一制定，因此丛书的专业符号尽量采用国际比较通用的石油工程师协会（SPE）、测井分析家协会（SPWLA）的标准符号；量制则按国家颁布的标准以求一致；关于专业术语将尽量协调一致，避免一义数名、一名多义。

由于我们的工作经验不足，在编辑过程中可能会出现一些缺点和问题，请广大读者看后提出宝贵意见。

中国石油学会石油工程学会
一九八三年七月

“油气田开发进修丛书”编委会

谭文彬 秦同洛 韩大匡 张朝琛 刘翔鹭
王乃举 万仁甫 赵 芬 郑育琪 赵 钧

前 言

从五十年代以来，非定常试井已逐渐成为确定油层参数、了解油田开发动态的最主要的手段之一，是每个油藏工程师和有关科技人员所必备的基本知识和技能。试井分析方法及其理论基础——弹性渗流理论，构成了石油高等院校有关专业以及石油工业部门为油田开发工程师技术人员举办的各类训练班的教学内容中的重要篇章。但是，却缺乏一本合适的教材。三十年来积累起来的数以百计的试井文献散见于各种杂志和刊物上，而且其数量还在急剧地增长。六十年代中期，美国石油工程师学会（SPE）为对工程技术人员进行技术上的培训，决定陆续出版一套丛书，其中的第一本就是1967年问世的C. S. 马修斯（Matthews）和D. G. 拉塞尔（Russell）所著的有关试井的专著《油层压力恢复和油气井测试》（Pressure Buildup and Flow Tests in Wells）。这本书后来成为广大油藏工程师的标准参考书。1977年，又有另一本试井方面的专著小R. C. 厄洛赫（Earlougher）的《试井分析方法》（Advances in Well Test Analysis）纳入该学会的这套丛书之中。这两本专著，特别是第一本，给了工程技术人员以很大的帮助。但是它们的着重点都是放在试井的一般原理和具体方法的应用方面，对试井分析的数学基础只作了很少一点叙述。

1964年，北京大学数学力学系部分从事偏微分方程研究工作的教师，在当时石油工业部童宪章总工程师的关心和指导下组织了一个讨论班，开始系统学习有关试井工作的国内外文献。1965年冬，他们又奔赴大庆油田，在当时大庆油田科学研究院流体力学室特别是以袁庆峰同志为首的试井组的支持和协助下，进行实地调研。在调研期间，本书的作者之一应要求在试井组讲授与试井工作有关的数学方法。讲授内容经整理补充，并根据当时偏微分方程专门化的要求，于1966年3月在北大油印出版了一本题为《试井中的数学方法》的讲义。不久它就流传到各油田，受到了有关工程技术人员的欢迎。很多同志反映这是一本别具一格的讲义，它对于无论是毕业于综合大学教学力学系而目前正从事石油开发工作的年青技术人员，还是在石油战线上已工作多年、富有实际经验但却苦于数学基础不够的工程师们，都是一本很好的入门书籍。它使这些同志能够较快地掌握试井分析的数学基础和精神实质，从而不难看懂并领会国内外繁多的有关试井的文献，而且有可能进一步举一反三，创造性地解决所面临的各种试井问题。

根据四个现代化建设的需要，石油工业部决定对广大油田开发工程师技术人员进行技术上的培训，其中的一个重要步骤就是商请中国石油学会石油工程学会出版一套丛书。今年年初，丛书编委会向我们约稿，希望经过必要的补充和修改以后，这本讲义能作为丛书中的一本与广大的读者见面。

我们仔细地研究了讲义的增补成书的问题。我们觉得，从该讲义的写出到今天，已经历了十五个年头，在这期间，试井工作又有了新的进展，因此，补充是必要的。但是，原讲义的风格和侧重点似应继续保留，这正将是本书有别于其它同类书籍的基本点。如果失去了这些特点，本书也许就很少出版的价值了。这就是我们这次增补和修订的指导思想。

这次补充的内容主要是第一章中的第一节，第三章中的第七节、第九节、第十一节到第

十七节，第四章第四节中的最后两小节，以及第五章、第六章和第七章的全部，此外，在第二章和第三章的末尾，分别补作了小结。这样，经过修订后的本书的第一章给出了有关的最必要的物理概念以及一些力学和数学的基础知识。第二章叙述单相不可压缩流动，虽然非定常试井分析的理论基础是单相可压缩流体的流动，但前者是后者的必要准备，两者所用的方法是一脉相承的。第三章单相可压缩流动则是本书的核心部分，掌握了这一部分内容，实际上就已经掌握了非定常试井分析乃至弹性渗流理论中常用到的各种数学方法。本书的最后四章则是非定常试井分析方法。我们认为，经过增补以后的本书，已给出了非定常试井分析的足够的数学基础以及各类主要分析方法的基本原理。本书更多地是作为一本应用数学的书籍，而不是试井分析的工程技术专著，因此，读者从最后四章中学到的，与其说是具体的试井分析方法，倒不如说是试井分析方法的基本原理和常用手法。

作为一本入门书，本书内容的大部分自然取材于文献上的已有的结果，其中包括本书作者的工作。所用到的主要参考文献列于书后。本书中还包括有一些作者本人的未发表成果。由于这次增补成书时间上的局促以及水平上的限制，书中一定会有不当甚至失误的地方，凡此都希望读者能提出意见，并不吝斧正，以利于今后的修改。

正如上面所说，本书是数学理论联系实际的产物。本书从酝酿到最后定稿，很多同志，特别是童宪章总工程师，北京大学数学系微分方程教研室以及原大庆油田科学研究院流体室试井组的一些同志，都曾从不同方面对本书作出过贡献。对此，我们表示深切的谢意！

姜礼尚 陈钟祥
1981年10月于北京大学

目 录

前言

第一章 基本物理概念和基本方程	1
第1节 多孔介质及其连续性假设	1
第2节 平均速度与渗流速度流线	2
第3节 流体的粘滞性达西 (Darcy) 定律	3
第4节 连续性方程	5
第5节 状态方程	6
第6节 单相不可压缩平面流动的微分方程和边界条件	6
第7节 单相可压缩平面流动的微分方程和定解条件	8
第二章 单相不可压缩流动	10
第1节 无穷大均质地层中的单井系统	10
第2节 等压线与流线	11
第3节 有供水边缘的圆形地层中的单井系统	11
第4节 有供水边缘的圆形分块均质地层中的单井系统	12
第5节 无穷大地层中的多井系统	12
第6节 地层有直线断层 (或供水边缘) 时的单井系统	13
第7节 地层渗透率有间断时的单井系统	14
第8节 无穷长条形地层中的单井系统	16
第9节 长方形区域内的单井系统	18
第10节 小结	22
第三章 单相可压缩流动	23
第1节 量纲分析	23
第2节 无穷大均质地层中的单井系统 I (点井)	24
第3节 无穷大地层中的多井系统	26
第4节 地层有直线断层时的单井系统	27
第5节 变流率问题杜哈美 (Duhamel) 原理	28
第6节 长方形区域内的单井系统	30
第7节 无穷大均质地层中的单井系统 II (圈井)	30
第8节 圆形区域内的单井系统 I (点井)	34
第9节 圆形区域内的单井系统 II (圈井)	38
第10节 圆形区域内的单井系统 III (流动达到定常和拟定常的情形)	44
第11节 同心圆非均质合成油藏中的单井系统	45
第12节 多层油藏 I (无穷大地层中的单井系统)	51
第13节 多层油藏 II (圆形封闭区域中的单井系统)	54
第14节 双重孔隙介质 I (无穷大地层中的单井系统)	57
第15节 双重孔隙介质 II (圆形封闭区域中的单井系统)	59
第16节 双重孔隙介质 III (任意区域有界封闭地层中的多井系统)	64

第17节 无穷大均质地层中的单井系统Ⅱ (考虑到井筒积聚和表皮效应)	69
第18节 小结	71
第四章 压力恢复曲线分析	73
第1节 引言	73
第2节 直线段的分析	73
1. 确定流动系数和原始地层压力	73
2. 确定供油区域内的平均地层压力	78
3. 分析井底的完善程度	79
第3节 续流段分析	82
第4节 干扰段分析	86
1. 断层	86
2. 邻井工作制度的改变 分别确定k与 ϕh	88
3. 有界的圆形地层	91
4. 同心圆非均质合成油藏	92
5. 多层油藏	92
第五章 其它试井分析方法	93
第1节 压降试井分析	93
1. 压降曲线非正常早期段分析	93
2. 非正常晚期段分析	94
3. 拟正常段分析	97
4. Y函数处理法	97
第2节 多流率试井分析	99
1. 变流率试井分析	99
2. 二流率试井	100
第3节 干扰试井分析	100
1. 多井干扰试井分析	101
2. 脉冲试井分析	102
第六章 双重孔隙介质油层的试井分析	106
第1节 压力恢复曲线分析	106
第2节 试井曲线非正常晚期段分析	108
第3节 多井探边试井	112
第七章 图版拟合法和计算机应用	114
第1节 无量纲化和标准图版拟合法	114
第2节 计算机在试井分析中的应用	116
参考文献	116

第一章 基本物理概念和基本方程

第1节 多孔介质及其连续性假设

含有大量任意分布的彼此连通和互不连通且形状各异、大小不一的孔隙的固体称为多孔介质。渗流就是流体在多孔介质中的流动，显然，它是由各孔道中的流动所组成的一个复杂的流动系统。细致地研究每个孔道中的细观流动，一般来说，既无可能，也无必要。人们希望了解的是多孔介质中流体运动的宏观性质。与经典的流体力学中由于无法研究每个流体分子的运动而引进连续性假设相类似，对多孔介质中的流体运动也可以引进连续性假设。这时，从细观（个别孔道中的流动）到宏观（连续体）的过渡是借助于引进一点上的孔隙度这一宏观物理量来实现的。

考虑多孔介质中的一个以 p 点为质心的体积 ΔV ，其中的孔隙体积为 ΔV_p 。定义 ΔV 上的平均孔隙度 $\bar{\phi}$ 为：

$$\bar{\phi} \equiv \frac{\Delta V_p}{\Delta V} \quad (1.1.1)$$

取一系列的不断缩小的这样的体积：

$$\Delta V_1 \supset \Delta V_2 \supset \Delta V_3 \supset \dots$$

于是便得到了一系列的平均孔隙度 $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3, \dots$ 。当 ΔV 缩小到某个体积 ΔV_0 附近时， $\bar{\phi}$ 趋于稳定。但当 ΔV 再进一步缩小到一定限度后， $\bar{\phi}$ 便激烈地振荡。当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时，有二种可能：若 p 点在骨架上，则 $\bar{\phi} = 0$ ；若 p 点在孔隙中，则 $\bar{\phi} = 1$ 。图1.1给出了 $\bar{\phi}_i$ 和 ΔV_i 之间的关系。

于是，在 p 点的多孔介质的孔隙度可定义为：

$$\phi(p) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \bar{\phi}_i \{ \Delta V_i(p) \} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \frac{\Delta V_{pi}}{\Delta V_i} \quad (1.1.2)$$

体积 ΔV_0 称为典型单元体，或多孔介质在数学点 p 处的物理点。

我们假定在 p 点附近 ΔV_0 和 ΔV_{p_0} 都平稳地变化，则

$$\phi(p) = \lim_{p' \rightarrow p} \phi(p') \quad (1.1.3)$$

即 ϕ 是位置 p 的连续函数。

这样，我们就通过引进孔隙度的概念和典型单元体的定义，用虚构的连续介质代替真实的多孔介质。在此虚构的介质中，我们便可把以 p 点为质心的典型单元体中的各种物理量的

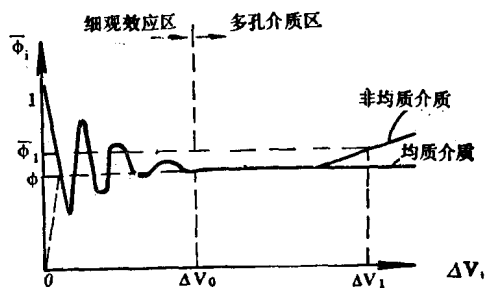


图 1.1 孔隙度和典型单元体的定义

平均值（不论是介质的物理量还是充满孔隙空间的流体的物理量）作为该物理量在 p 点的值。

显然，典型单元体的尺度一方面应远大于所含孔隙的特征尺度，以使得它的内部包含有足够的孔隙而可以进行有意义的统计平均；另一方面，它与所考虑的流动区域相比，又应足够地小，以致于可以把它看作是一个点。对大多数的含油（水）层和岩心试样，这些条件是能满足的，只有那些含有彼此远离的有限可数个溶洞和有限条大裂缝的卡斯特灰岩例外。

第2节 平均速度与渗流速度流线

如上节所述，由于在多孔介质中孔隙的排列是极不规则的，因此谈论每一点流动的实际速度几乎是没有什么意义的，为此我们引入平均速度的概念。 p 点的平均速度就是以 p 点为质心的典型单元体内孔隙体积中的速度场的平均值。

在 p 点取一与平均流动方向相垂直的尺度与典型单元体相当的横截面 ΔA_0 ，单位时间内通过 ΔA_0 的流量为 Δq ，则也可定义 p 点的平均速度 v^* 为：

$$v^* = \frac{\Delta q}{\phi \Delta A_0} \quad (1.2.1)$$

式中 ϕ 为孔隙度。

为了便于研究，我们通常考虑所谓“假想渗流”，即假想流体充满着全部颗粒和孔隙所占有的全部空间，而通过任意截面的流量仍假定保持原来的实际流量不变，从而我们可以象通常流体力学中那样去定义流体在每一点的速度 \vec{v} ，这个速度我们称为渗流速度。

我们在空间引入直角坐标系 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ，其中 $-\vec{k}$ 指向地面。设 p 点的坐标为 (x, y, z) 。通过 p 点分别以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为法向量作三个平面块 $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ ，在时刻 t 通过该三截面的流量为 $\Delta q_{xt}, \Delta q_{yt}, \Delta q_{zt}$ 。这样我们定义在时刻 t ，点 p 处的渗流速度为：

$$\vec{v} = v_x(p, t) \vec{i} + v_y(p, t) \vec{j} + v_z(p, t) \vec{k} \quad (1.2.2)$$

其中

$$v_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{xt}}{\Delta A_x}, \quad v_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{yt}}{\Delta A_y}, \quad v_z = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{zt}}{\Delta A_z} \quad \textcircled{1}$$

根据上述定义容易看出，渗流速度 \vec{v} 与平均速度 v^* 之间存在关系

$$\vec{v} = \phi v^* \quad (1.2.3)$$

流线是在瞬间 t 的这样一条空间曲线，在它上面每一点的切线方向都与该处的渗流速度（以下简称速度）向量重合，即

$$\frac{dx}{v_x(p, t)} = \frac{dy}{v_y(p, t)} = \frac{dz}{v_z(p, t)} \quad (1.2.4)$$

沿着流线流体的法向速度等于零，因此没有流体穿过流线；反之如果沿着一条光滑曲线，流体的法向速度等于零，那它必是流线。

① 更确切地讲，式中所取的极限应为 $\Delta A_x \rightarrow \Delta A_{x_0}, \Delta A_y \rightarrow \Delta A_{y_0}, \Delta A_z \rightarrow \Delta A_{z_0}$ ，其中 $\Delta A_{x_0}, \Delta A_{y_0}, \Delta A_{z_0}$ 的尺度与典型单元体 ΔV_0 相当。

第3节 流体的粘滞性达西 (Darcy) 定律

当流速不太大时，流体可以看作是分层流动的，由于各层的流速不同，使得层与层之间存在着切向的拉(拖)力(如图1.2)。根据牛顿(Newton)粘滞性定律，流体作用于表面 ΔA 上的拉力为：

$$F = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \mu \frac{v_2 - v_1}{\Delta z} \Delta A = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=z_0} \Delta A$$

μ 称为粘度，其单位为厘泊(cp)。

在我们考虑的地下流体的运动中，粘性力往往是由于以下的原因而产生的。

假设流体在某一细管内运动，此时流体在管壁的流动速度为零，而在管中央的流动速度为最大(如图1.3所示，流速在任意横截面上的分布是抛物线形状)。这样，在管壁附近流体就产生了一个由流体作用于管壁的拉力，它沿着流体的流动方向，它的大小根据牛顿定律：

$$F = -\mu \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_D} A$$

其中 r 为沿着管径方向的坐标， r_D 则为细管的半径， A 为管壁的面积。但是由于管壁并没有随着流体移动，因此管壁就给予流体一个与上述拉力大小相等，方向相反的拖力，这个力与流体运动方向相反，阻碍流体向前运动。这个力我们称之为管壁作用于流体的粘性阻力。

从微观上来说，由于多孔介质的孔道是极不规则的，因此粘性力的方向是完全杂乱无章的，但从宏观上来说，它总与运动方向相反，阻碍运动的进行。

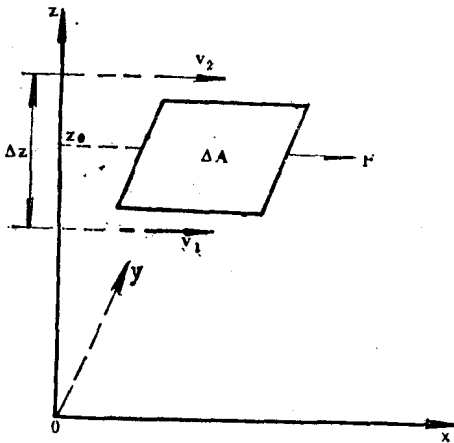


图 1.2

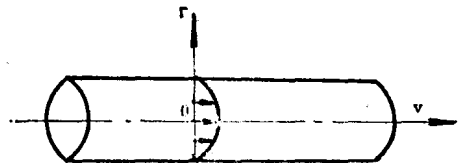


图 1.3

为了导出地下流体运动的基本定律——达西定律，我们不妨考虑一下图1.4所示的垂直圆管。它的侧面是不透水的，内部放置一多孔材料，它具有平行的上下底，截面积为 A ，长为 L ，孔隙度为 ϕ ，流体由下向上流动。如果假定(1)流体是不可压缩的，(2)多孔介质的孔隙分布是均匀各向同性的，(3)注入流量 q (单位时间)与时间无关，则在每单位时间内通过任意横截面的流量是恒定的，即流体在各点的速度是一致的，因此流体在流动中不存在惯性力。由牛顿第二定律，作用在流体上的各个力应该达到平衡。通过简单分析容易看出流体一共承受三个力：重力、外力、粘性力。

重力 F_g ： $F_g = \rho g(\phi AL)$ 方向向下

外力 F_p : $F_p = \phi A(p_a - p_b)$ 方向向上

粘性力 F_v : $F_v = B\mu \frac{q}{A} (AL)$ 方向向下

其中, ρ 是流体的密度, g 是重力加速度, p 为流体的压力, B 为比例常数。

由于 $F_g + F_v = F_p$

$$\text{故有 } q = -\frac{kA}{\mu L} [(p_a - p_b) + \rho g L] \quad (1.3.1)$$

其中, $k = \frac{\phi}{B}$, 称为地层的渗透率, k 的单位为达西。

上式就是渗流的基本定律——达西定律。它是在1856年由法国的工程师达西通过实验确定的。以上所作的“推导”,当然是不严格的,只能说是有助于理解这一重要的实验定律的物理含义的颇有启发性的参考。

注1: 当 $q = q(x, t)$ 时, 流体受到惯性力的作用, 但由于多孔介质中孔隙的表面积非常大, 因此一般来说粘性力将远远大于惯性力, 这样在实际处理时即可忽略惯性力。达西定律仍然成立。

注2: 对于可压缩流体, ρ 、 q 应理解为某个压力下的值, 一般我们认为对于 $p = \frac{p_a + p_b}{2}$ 时的 ρ 、 q 值, 达西定律成立。

注3: 当我们考虑的是水平流动, 此时重力即可忽略, 达西定律有形式:

$$q = -\frac{kA}{\mu L} (p_a - p_b) \quad (1.3.2)$$

现推导多维形式的达西定律。由于注1, 因为我们不妨认为 $q = q(x, y, z, t)$ 不是常数。在多孔介质中截取一高为 Δl , 底为 ΔA 的小柱体, 使得它的上下二底都与 \vec{v} 垂直(见图1.5)。由于我们忽略惯性力, 因此作用于该柱体内的流体的应力应平衡, 即

$$\vec{F}_g + \vec{F}_v + \vec{F}_p = 0$$

由于

$$\vec{F}_g = -\rho g \phi \Delta l \Delta A \vec{k} \quad (\vec{k} \text{ 指向地面})$$

$$\vec{F}_v = -B\mu (\Delta l \Delta A) \vec{v}$$

$$\vec{F}_p = -\iint p \vec{n} \phi dA = -\phi \iiint \nabla p dv = -\nabla p \cdot \phi \Delta l \Delta A (\vec{n} \text{ 是外法线方向})$$

故得:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \vec{k}) \quad (1.3.3)$$

$$\text{即 } v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (1.3.4)$$

v_x 、 v_y 、 v_z 分别是速度向量 \vec{v} 在 x 、 y 、 z 轴上的分量。

若流动是水平的, 则

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (1.3.5)$$

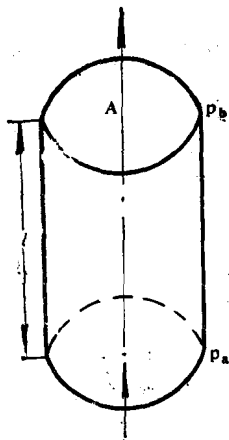


图 1.4



图 1.5

第 4 节 连续性方程

我们知道流体在流动过程中，它的质量既不能减少亦不能增加，也就是保持质量守恒。现在我们利用质量守恒原理导出压力等函数所满足的微分方程，即连续性方程。

在流动区域内考虑任一体积 Σ ，它的边界记作 σ (图 1.6)，以 $G(x, y, z, t)$ 表示源汇强度 (即单位时间内在单位体积中所增加或减少的质量数)，这样在 t 到 $t + \Delta t$ 时刻内流进 Σ 的流体质量 m 为

$$\Delta t \oint_{\sigma} dm = \Delta t \oint_{\sigma} \rho d\mathbf{q} = - \Delta t \oint_{\sigma} \rho |\vec{v}| \cos(\vec{v}, \vec{n}) dA = - \Delta t \oint_{\sigma} \rho(\vec{v}, \vec{n}) dA$$

在 Σ 内生成的量为

$$\Delta t \iiint_{\Sigma} G(x, y, z, t) dv$$

在时段 $[t, t + \Delta t]$ 内 Σ 内质量增加总量

$$\iiint_{\Sigma} \rho dx dy dz \Big|_{t+\Delta t} - \iiint_{\Sigma} \rho dx dy dz \Big|_t$$

由质量守恒，在 t 到 $t + \Delta t$ 的时段，在 Σ 内

$$\text{流入量} + \text{生成量} = \text{增加量}$$

将上述三式代入，并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得

$$- \oint_{\sigma} \rho(\vec{v}, \vec{n}) dA + \iiint_{\Sigma} G dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho dx dy dz$$

利用奥氏公式得

$$- \iiint_{\Sigma} (\nabla \cdot \rho \vec{v}) dx dy dz + \iiint_{\Sigma} G dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho dx dy dz \quad (1.4.1)$$

这即是连续性方程。

以达西定律代入得

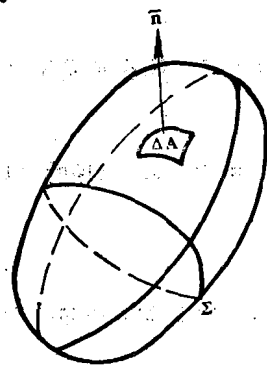


图 1.6

$$\iiint_{\Sigma} \nabla \cdot \left[\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho g \vec{k}) \right] dx dy dz + \iiint_{\Sigma} G dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \phi \rho dx dy dz$$

假如 ρ 、 p 连续可微，则由 Σ 的任意性应得

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho g \vec{k}) \right] + G = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.4.2)$$

若流动是水平的，则

$$\nabla_2 \cdot \left(\frac{\rho k}{\mu} \nabla_2 p \right) + G = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.4.3)$$

$$\text{注: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

第5节 状态方程

这一节对不同性质流体建立压力与密度的关系。

1. 不可压缩液体

$$\frac{d\rho}{d\rho} = 0, \quad \rho = \text{const} \quad (1.5.1)$$

2. 可压缩液体

对一般液体，它的压缩性可用类似于虎克 (Hooke) 定律的规律来描述，即对于承受一定压力的液体，流体体积的相对变化率与压力变化成正比，即

$$c d\rho = - \frac{dV}{V} \quad \text{或} \quad \frac{d\rho}{\rho} = c d\rho$$

$$\rho = \rho_0 e^{c(\rho - \rho_0)} \quad (1.5.2)$$

其中 ρ_0 是液体在承受压力为 p_0 时的密度值， c 称为液体的压缩系数。

3. 气体

由波义耳-马略特 (Boyle-Mariott) 定律 $pV = \frac{m}{M} RT$

$$p = \frac{R}{M} \rho T \quad \left(\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (1.5.3)$$

式中 M 是克分子量； $R = 8.31 \times 10^7$ 尔格/开·克分子； T 是热力学温度，开。

第6节 单相不可压缩平面流动的微分方程和边界条件

假设：在有界区域 Σ 内有一生产井，井缘记作 Γ (图1.7)，地层是各向同性，等厚， $\phi = \text{const.}$ ，流体是不可压缩，单相，流动是水平的。

根据上述假设， ϕ 、 ρ 、 μ 是常数，在 σ 与 Γ 组成的环形区域内已不再有源汇，所以 $G(x, y, z, t) = 0$ 。这样，在该环形区域内，方程有形式

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.6.1)$$

这对 p 而言是一个椭圆型方程，为了唯一地确定 p 在每点的值，需要在它的所有边界上给出一个边界条件。

在 σ 上可以给出如下的几种边界条件：

1. 供水边界（定压），即当 (x, y) 属于 σ 时

$$p(x, y) = p_0(x, y) \quad (1.6.2)$$

($p_0(x, y)$ 是已知函数，在实用上经常取 $p_0(x, y) \equiv \text{const.}$)

2. 不渗透边界，即在边界 σ 上没有穿流现象，流速在 σ 的法向分量为 0：

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

由达西定律

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \right)$$

故

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \cos(x, \vec{n}) + \frac{\partial p}{\partial y} \cos(y, \vec{n}) \right] = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (1.6.3)$$

3. 井缘边界：在 Γ 上，由于在井壁 Γ_k (图 1.8, h 表示油层厚度) 上，每单位时间溢出流量为 q

$$\begin{aligned} q &= \iint_{\Gamma_k} dq = \iint_{\Gamma_k} (\vec{v}, \vec{n}) ds = \int_0^h dz \oint_{\Gamma} (\vec{v}, \vec{n}) dl \\ &= -\int_0^h dz \oint_{\Gamma} \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial p}{\partial y} \cos(y, n) \right] dl = -\frac{h}{\mu} \oint_{\Gamma} k \frac{\partial p}{\partial n} dl \quad (1.6.4) \end{aligned}$$

用它作为 $p(x, y)$ 在 Γ 上的边界条件一般来说是不充分的，因为满足上述方程和边界条件的解不唯一。必须再补充一个条件：井缘压力值相等（但未知）

$$p|_{\Gamma_k} = p_w \quad (p_w \text{ 是井缘(井底)压力}) \quad (p_w \text{ 未知}) \quad (1.6.5)$$

边界条件 (1.6.4), (1.6.5) 称为等位面边界条件。

我们再考虑以下二种情形：

1. 径向流：设 σ 与 Γ 是二同心圆周。我们以 Γ 的圆心为原点引入极坐标。若 $k(x, y) = k(r)$ ，在外缘边界 σ 上的已给压力 $p_0(x, y) \equiv p_0$ ，则由物理事实易知，此时流体的运动是径向的，即压力 $p(x, y)$ 只依赖于极径 r ，而与幅角 θ 无关。此时井缘边界条件 (1.6.4) 可改写为

$$\begin{aligned} &\frac{h}{\mu} \int_0^{2\pi} k(r_w, \theta) \frac{\partial p(r_w, \theta)}{\partial r} r_w d\theta \\ &= \frac{2\pi h k(r_w)}{\mu} r_w \frac{dp(r_w)}{dr} = q \quad (r_w \text{ 为井径}) \end{aligned}$$

从而压力分布 $p = p(r)$ 适合

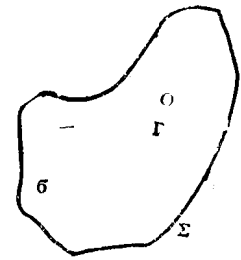


图 1.7

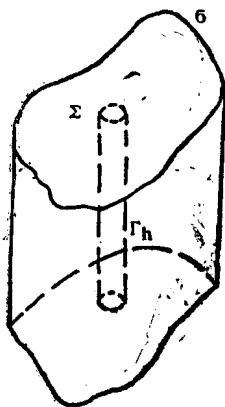


图 1.8

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r k(r) \frac{dp}{dr} = 0 \quad (r_w < r < r_e, r_e \text{ 为 } \sigma \text{ 的半径}) \\ p(r_e) = p_0 \\ \text{或 } \frac{dp(r_e)}{dr} = 0 \end{array} \right\} \quad (1.6.6)$$

$$\left[r \frac{dp}{dr} \right]_{r=r_w} = \frac{q\mu}{2\pi k(r_w)h}$$

2. 点井：在实际上由于一个油田往往打有很多生产井，且地层的结构又非常复杂，因此径向流的假设通常是不能满足的，为了在数学上易于处理这类问题，我们需要适当改进条件 (1.6.4), (1.6.5) 的形式，使它既能保证容易求解，而又使它是原来问题的合理近似。对此我们引入“点井”的概念，即认为生产井的半径 $r_w = 0$ ，流量 q 从某一井点流出。由于 r_w 相对于井距来说要小得多，因此这样的近似在极大多数情形下是适宜的。

设 (a, b) 为井点坐标， $r_{a,b} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ，此时条件 (1.6.4) 将转化为

$$\frac{2\pi h k(a, b)}{\mu} \lim_{r_{a,b} \rightarrow 0} r_{a,b} \frac{\partial p(x, y)}{\partial r_{a,b}} = q \quad (1.6.7)$$

若仍以单井系统为例，设井点为原点 (图1.9)， $k(x, y) \equiv k$ (常数)，则压力 $p(x, y)$ 在 Σ 内除原点以外适合方程

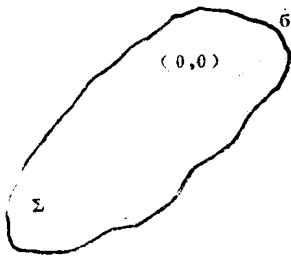


图 1.9

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

在 σ 上适合边界条件

$$p(x, y) = p_0(x, y)$$

$$\text{或 } \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

在井点适合条件

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi k h}$$

第 7 节 单相可压缩平面流动的微分方程和定解条件

假设：在有界区域 Σ 中有一口生产井，地层是等厚，各向同性， $\phi = \text{Const.}$ ，液体是可压缩的，流动是水平的。

根据假设， μ 、 ϕ 是常数，而且在任意时刻，在由 σ 与 Γ 组成的环形区域内 $G = 0$ 。

由状态方程 $c\rho dp = d\rho$ ①，故

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = c\rho \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = c\rho \frac{\partial p}{\partial y}$$

因此根据连续性方程和达西定律，知在上述环形区域内，当 $t > 0$ 时 $\rho(x, y, t)$ 适合方程

① 如果多孔介质是可压缩的，则 c 理解为考虑到多孔介质的压缩性时的地层的综合压缩系数。