简　介

本书是天津大学电工原理教研室在原电路理论课程改革取得了一定经验的基础上编写的。全书分上、下两册，分别为《电路基础理论》和《网络理论导论》。上册包括：电路和电路定律；线性电路的系统解法；电路的基本定理；含受控源与运算放大器电路；一阶和二阶电路；正弦交流电路；三相电路；非正弦周期电流电路；用拉氏变换解电路的过渡过程和非线性电路等十章。下册共九章，内容是网络图论和网络方程，二端口网络，状态变量法，网络函数和固有频率，网络综合，信号频谱，离散时间电路，均匀传输线的正弦稳态和均匀传输线的暂态。各章均配有例题和习题。

本书可作为高等院校大学本科电类专业“电路理论”课程教材。上、下两册皆可单独设课。下册还可作为继续教育方面的教材或自学用书。本书也可作为科技参考书。

电路理论·下册·

网络理论导论

杨　山　主编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米 1/16　印张：$14\frac{1}{4}$　字数：360千字

1988年7月第一版　1988年7月第一次印刷

印数：1—6800

ISBN 7-5618-00 37-1

TM·4

定价：2.40元

目　录

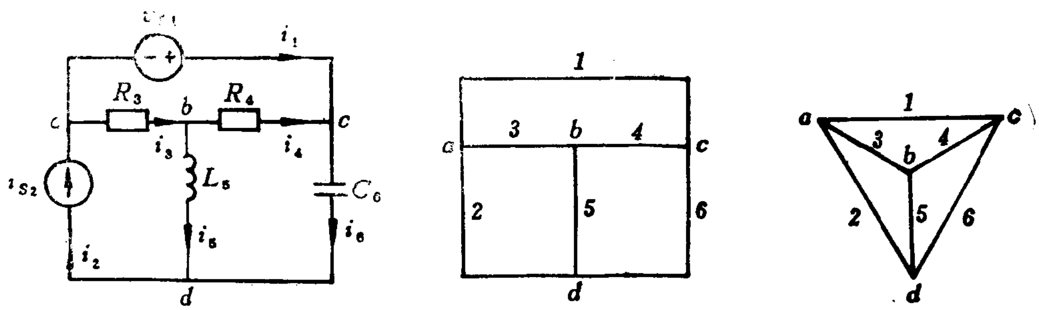
第十一章　网络图论和网络方程

§11-1　网 络 的 图

1. 基本概念和定义

电网络是由电路元件按照一定方式联接起来的。它的电特性受两种形式的约束：一是克希霍夫两条定律的约束，它决定于元件互连的几何形式（即拓扑结构），也叫拓扑约束；另一是元件特性的约束，它决定于元件的性质和参数。

例如图11-1(*a*)所示的网络，由KCL和KVL可写出如下一组方程：



(*a*)　　　　(*b*)　　　　(*c*)

图 11-1　网络和它的图形

$$
\begin{cases}
i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\
-i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\
-i_1 - i_4 + i_6 = 0 \\
v_1 - v_3 - v_4 = 0 \\
v_2 + v_3 + v_5 = 0 \\
v_4 + v_6 - v_5 = 0
\end{cases}
$$

其实不论各支路元件性质如何，凡是按图11-1(*a*)所示方式联接的，则必须满足以上方程。

不同的网络在拓扑关系上的相似性引起一系列与结构有关的网络概念。为了突出拓扑结构的特点，常常把网络中的每一元件用一条线段来代替。网络中所有元件都代之以抽象的线段之后，所得的连接图形叫做该网络的拓扑图，或简称网络的图。用字母G表示。

图11-1(*b*)是图11-1(*a*)所示网络的图，它保留了原网络的联接方式，略去了元件性质。图中各线段的长短和曲直无关紧要，可以视方便而定。例如图11-1(*c*)与图11-1(*b*)是等效的。

图中代替了元件的线段叫做边或支路。元件的端点或两个以上（包括两个）支路的连接点叫做顶点或节点，因而图也是由支路和节点构成的。为了分析和计算的方便，它们都标以与原网络相同的号码或字母。

从图中某一节点出发，沿着支路循行一周回到原节点，所得闭合路径叫做回路，并规定循行途中所遇节点和支路都不能重复，即在一个回路中所有支路和节点严格地只能通过一次。

2. 连通图和不连通图

任意两节点间沿着支路相通的图叫做连通图。如图11-1(*b*)和(*c*)所示。若某些网络有几个分离部分（仅有电磁耦合而没有电的连接），则网络的图也将有几个互不连接的分离部分。包括有两个和两个以上分离部分的图叫做不连通图。例如图11-2(*a*)网络的图如图11-2(*b*)所示，是有两个分离部分的不连通图。

在以后的分析和讨论中，如未加特别说明，均指连通图而言，这仍有其一般性，因为不连通图可变为连通图。若在两分离部分各选一节点(例如图11-2中的*b*和*g*)，把它们合并，使这两点等电位，而各支路的电流及电压并不受影响，这时不连通图就可变成连通图。

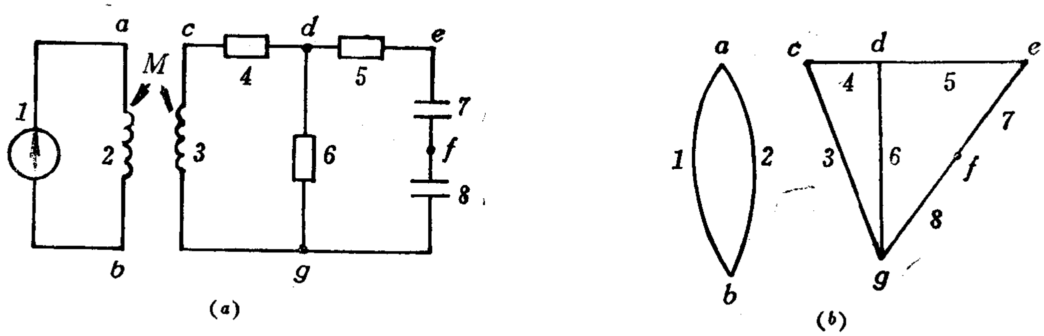


图 11-2 具有分离部分的网络和图

3. 子图

如果图G_1是图G的一部分，G_1的每个节点和支路都是G中的节点和支路，图G_1就叫做图G的子图。例如图11-3中图G有节点{*a*、*b*、*c*、*d*}和支路{1、2、3、4、5、6}而图G_1有节点{*a*、*b*、*c*、*d*}和支路{1、2、3}，所以它是G的一个子图。同样，图G_1'有节点{*b*、*c*、*d*}和支路{4、5、6}，也是图G的一个子图。

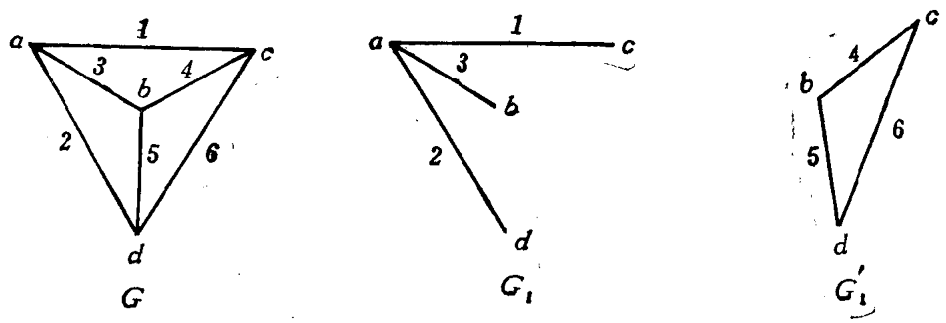


图 11-3 图的子图和互补

一个图可以划分成多个形式的子图。如果把一个图分成两个没有相同支路的子图，它们共同包含着原图的全部支路，称这两个子图互补。或说一个子图是另一个子图的补图。例如图11-3中的图G_1和G_1'就是图G的两个互补的子图。互补就是把两个子图的相同节点合在一起可得到完整的原图形。自然，这里所谓互补只是对支路而言。

4. 树

树是图论中的重要概念。

连通图G的一个树，是指符合以下条件的子图：（*a*）包含G的所有节点。（*b*）连通的。（*c*）不包含回路。树常用字母T表示。

例如图11-4中，由实线所示支路组成的子图T_1{1、3、5}、T_2{2、3、5}和T_3{2、4、5}都是原图G{1、2、3、4、5}的树。

同一个图可以找到许多树，例如图11-4中的图G，可以找到八个树。

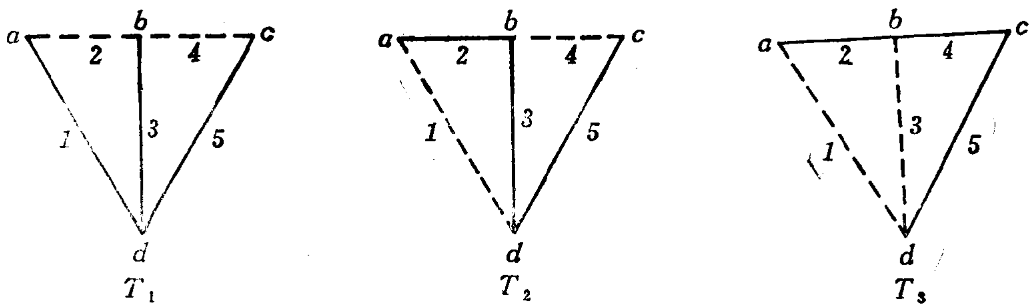


图 11-4　图和树

与树互补的子图叫做树的补图或树余。组成树的支路叫做树支。组成树余的支路叫做连支。所以树余也叫连支集。

对于某个图来说其所有树的树支数是固定的。通常用以构成树的一种方法是：在图中任选一个支路为树支，然后每次增加一个新的树支，直至再增加新的支路就要形成闭合回路时为止。因此每个增加的树支除一个节点和已经形成的部分树的节点共用外，还必须有一个新的节点，以免形成闭合路径。然而第一个树支连接两个节点，所以树支数T等于节点数N减去1，即

$$T = N - 1 \tag{11-1}$$

设图的支路总数为B，则其连支数L为

$$L = B - (N - 1) = B - N + 1 \tag{11-2}$$

例如图11-4中图G，其树支数$T = 4 - 1 = 3$，连支数$L = 5 - 4 + 1 = 2$。

5. 有向图

对网络进行分析和计算时，每一支路电流需指定参考方向，为了方便，通常把支路电压和电流的参考方向选得一致。画网络的拓扑图时，在图的各线段上加以箭头，使各线段取向与原网络中电流电压正方向一致，各支路用箭头标以正方向之后所得的图叫做有向图。如图11-5所示。

图 11-5　有向图

§11-2 关联矩阵和节点分析法

1. 节点关联矩阵

为了便于运算，用矩阵的形式描述图的几何性质。图的每一支路都连接在两个节点上，称此支路与所连两节点有关联。一个有N个节点B条支路的图，其支路与节点之间的全部关联情况可用一个N×B阶矩阵来描述，以$[A_a]$表示，它的每一行对应着一个节点，每一列对应着一条支路，其中元素a_{jk}定义如下：

当支路k与节点j有关联且其方向背离节点j时，$a_{jk}=1$；

当支路k与节点j有关联且其方向指向节点j时，$a_{jk}=-1$；

当支路k与节点j没有关联时，$a_{jk}=0$。

例如图11-5(b)所示的有向图，其支路与节点的关联矩阵是

$$[A_a]=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\end{array} \qquad (11\text{-}3)$$

在矩阵$[A_a]$中包括了图的全部节点和支路，叫做全节点关联矩阵。一个图只能写出一个全节点关联矩阵，换言之一个全节点关联矩阵唯一地描述一个图。

因为每一支路恰好与两个节点有关联，若对一个节点是离开，则必指向另一个节点，所以在矩阵$[A_a]$中，每一列必然只有两个非零元素，一个为+1，一个为-1。当我们将每列元素相加时，得到元素全为零的一行，这就是说，矩阵$[A_a]$的行不全是线性独立的。如果把$[A_a]$的任一行划去，剩下的矩阵为(N-1)×B阶，这个新矩阵叫做降阶节点关联矩阵，并以$[A]$表示之。例如在式(11-3)中，划去第三行，得

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}4)$$

被划去的一个节点叫做基准节点或参考节点。因为我们可以从$[A]$写出$[A_a]$，所以降阶节点关联矩阵象全节点关联矩阵一样能够充分说明图的几何形象。以后称$[A]$为节点关联矩阵，或简称关联矩阵。

设关联矩阵的第k行为

$$[A]_k=[a_{k1}\quad a_{k2}\quad a_{k3}\cdots a_{kB}]$$

相应各支路电流写成列向量

$$[i]=[i_1\quad i_2\quad i_3\cdots i_B]^T$$

则
$$[A]_k[i]=a_{k1}i_1+a_{k2}i_2+\cdots+a_{kB}i_B$$

由$[A]$的定义不难看出上式是与节点k相连的各支路电流的代数和。根据KCL可知

$$[A]_k[i]=0$$

这是根据KCL对节点k所列的电流平衡方程式。若把所有独立节点的电流方程写成矩阵形式，则为

$$[A][i]=[0] \tag{11-5}$$

这是表示(N－1)个联立方程的矩阵方程，它确定了各支路电流之间的关系，叫做KCL的矩阵形式。同理，若把全部N个节点的电流平衡方程式写成一个矩阵方程，则为

$$[A_a][i]=[0] \tag{11-6}$$

例如图11-5的电路有

$$[A_a][i]=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

如果选图11-5中C点做参考点，根据KVL可写出各支路电压和各节点电位之间的关系

$$\begin{aligned}
v_1 &= \quad\quad -v_b+v_d \\
v_2 &= -v_a+v_b \\
v_3 &= \quad\quad v_b \\
v_4 &= v_a \\
v_5 &= v_a \quad\quad -v_d \\
v_6 &= \quad\quad\quad -v_d
\end{aligned}$$

把以上六个方程写成矩阵形式为

$$[v]=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \end{bmatrix}=[A]^T\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \end{bmatrix}$$

式中$[A]^T$为$[A]$的转置，根据$[A]$的定义，在一般情况下有

$$[v]=[A]^T[v_n] \tag{11-7}$$

式中$[v]$为支路电压列向量，$[v_n]$为节点电位列向量。

式（11-5）和式（11-7）是两个体现克希霍夫两条定律的重要关系式，与支路的特性无关。

2. 节点分析法

欲建立求解网络的方程，除了要依据KCL和KVL之外，还必须知道各支路的伏安关系。为了概括各种情况，把各元件的电流、电压关系写成算符形式。电压、电流用其变换式$V(s)$和$I(s)$表示，在正弦稳态时，它们是复数，算子$s=j\omega$；直流时，它们是常数，$s=0$。以后在不致混淆的情况下，把$V(s)$、$I(s)$等都简写为V、I等，这只是简写符号，不限为直流量，与此相应，式（11-5）和式（11-7）可写为

$$[A][I]=[0] \tag{11-8}$$

$$[V]=[A]^T[V_n] \tag{11-9}$$

先假设支路间不存在耦合关系，即无受控源及互感，并定义一个标准支路如图11-6所示，其中I_k和V_k表示第k支路的支路电流和支路电压，I_{ek}表示该支路的元件电流。如果实际支路中无电压源则$V_{sk}=0$。如无电流源则$I_{sk}=0$。

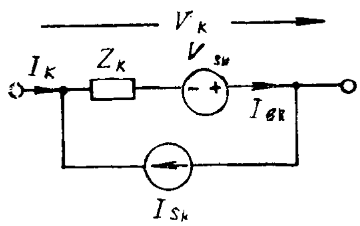


图 11-6 标准支路

由标准支路所示参考方向，可以写出第k支路的支路电压和支路电流的关系为

$$V_k = Z_k(I_k + I_{sk}) - V_{sk} \tag{11-10}$$

或

$$I_k = Y_k V_k + Y_k V_{sk} - I_{sk} \tag{11-11}$$

式中 $Y_k = \dfrac{1}{Z_k}$为该支路的导纳。

表示B个支路电流和支路电压的关系为B个方程联立。

$$\begin{aligned}
I_1 &= Y_1V_1 \qquad - I_{s1} + Y_1V_{s1} \\
I_2 &= \qquad Y_2V_2 \quad - I_{s2} \quad + Y_2V_{s2} \\
&\vdots \\
I_B &= \qquad\qquad Y_BI_B - I_{sB} \qquad + Y_BV_{sB}
\end{aligned}$$

写成矩阵形式，则为

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ \vdots \\ I_{sB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ \vdots \\ V_{sB} \end{pmatrix}$$

定义$[Y]=diag[Y_1Y_2\cdots Y_B]$为支路导纳矩阵，且令$[I]=[I_1I_2\cdots I_B]^T$，$[V]=[V_1V_2\cdots V_B]^T$，$[I_s]=[I_{s1}I_{s2}\cdots I_{sB}]^T$，$[V_s]=[V_{s1}V_{s2}\cdots V_{sB}]^T$，则上式可简写成

$$[I]=[Y][V]-[I_s]+[Y][V_s] \tag{11-12}$$

或

$$[V]=[Z]([I]+[I_s])-[V_s] \tag{11-13}$$

式中$[Z]=diag[Z_1Z_2\cdots\cdots Z_B]$为支路阻抗矩阵，而且 $[Z]=[Y]^{-1}$，或$[Y]=[Z]^{-1}$。

当某一支路中无电压源时，$[V_s]$中的相应元素等于零；当某支路中无电流源时，$[I_s]$中的相应元素等于零；当某支路的电压源或电流源的正方向与标准支路不一致时，则相应列向量中的对应元素前加负号。式（11-12）或（11-13）即表示支路伏安关系的支路方程。

将式（11-12）代入式（11-8）得

$$[A]([Y][V]-[I_s]+[Y][V_s])=[0]$$

再将式（11-9）代入上式，整理后得

$$[A][Y][A]^T[V_n]=[A][I_s]-[A][Y][V_s]$$

令

$$[Y_n]=[A][Y][A]^T \tag{11-14}$$

则

$$[Y_n][V_n]=[A][I_s]-[A][Y][V_s] \tag{11-15}$$

式（11-15）是矩阵形式的节点方程。

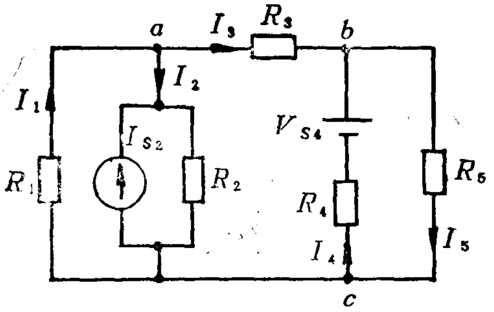
当电路结构和各元件参数已知时可直接写出$[Y]$、$[A]$、$[I_s]$和$[V_s]$，再由式（11-14）求出$[Y_n]$代入式（11-15）得到节点方程。

解节点方程求出各节点电位后，由式（11-9）和（11-12）即可求出各支路电压和电

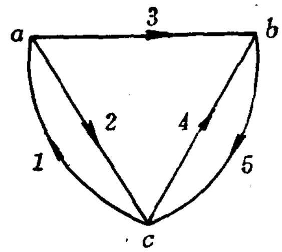
流。

由式（11-14）定义的N-1阶方阵$[Y_n]$称作节点导纳矩阵。

例一 用节点分析法求图11-7所示电路的支路电压和支路电流。已知$R_1=5\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=4\Omega$，$R_4=2\Omega$，$R_5=4\Omega$，$I_{s2}=2A$，$V_{s4}=19.5V$。



(a)



(b)

图 11-7 节点法举例

解：设各支路电流的参考方向如图所示，作其有向图如图(b)，以C点为参考点写出节点关联矩阵为

$$[A]=\begin{array}{c}\\ a\\ b\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

支路导纳矩阵

$$[Y]=diag\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5}\end{bmatrix}$$

$$=diag\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

电流源和电压源列向量分别为

$$[I_s]=[0\ I_{s2}\ 0\ 0\ 0]^T=[0\ 2\ 0\ 0\ 0]^T$$

$$[V_s]=[0\ 0\ 0\ V_{s4}\ 0]^T=[0\ 0\ 0\ 19.5\ 0]^T$$

$$[A][Y]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$[A][Y][V_s]=\begin{bmatrix}0\\ -9.75\end{bmatrix}$$

$$[A][I_s]=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$

节点导纳矩阵为

$$[Y_n]=[A][Y][A]^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.95 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

节点方程为

$$\begin{pmatrix} 0.95 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ -9.75 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 9.75 \end{pmatrix}$$

从而可解出节点电位

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.95 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 9.75 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

支路电压

$$[V]=[A]^T[V_n]=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -6 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

支路电流

$$[I]=[Y][V]-[I_s]+[Y][V_s]$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -6 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9.75 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1.5 \\ 4.25 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

从例题中节点导纳矩阵的表达式可以看出：$[Y_n]$主对角线上的诸元素，是对应节点的自导纳，即联于该节点的各支路导纳之和；其余诸元素是相关节点之间的互导纳，即联接两节点的各支路导纳之和的负值。无受控源时，$[Y_n]$是对称矩阵。此结论可以由式（11-14）所示的$[Y_n]$定义公式推导出来。

矩阵形式的节点方程的物理意义是很明确的，假设把所有的电压源都转换成等效的电流源，式（11-15）等号左边每一行表示从该节点通过与其相连的导纳流出的全部电流；等号右边则为电流源流入该节点的全部电流。

按照这种意义，简单电路可以直接列写出各独立节点的电流平衡方程式。例如图 11-7 所示电路，有

$$Y_{aa}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=0.95$$

$$Y_{ab}=Y_{ba}=-\frac{1}{R_3}=-0.25$$

$$Y_{bb}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}=1$$

$$I_a=I_{s2}=2$$

$$I_b=\frac{V_{s4}}{R_4}=9.75$$

由此列出节点电位方程

$$\begin{cases}0.95V_a-0.25V_b=2\\-0.25V_a+V_b=9.75\end{cases}$$

很容易解得$V_a=5\text{V}$，$V_b=11\text{V}$

节点分析法是目前在计算机辅助分析和设计中应用最广泛的一种方法。

3．有互感的情况

当电路中有互感时，例如第 k 支路和第 j 支路间有互感M，则两个支路的电压和电流的关系与式（11-10）不同，应包含互感电压，即

$$V_k=Z_k(I_k+I_{sk})-V_{sk}\pm Z_m(I_j+I_{sj})$$
$$V_j=Z_j(I_j+I_{sj})-V_{sj}\pm Z_m(I_k+I_{sk})$$

Z_m前的±号，由支路电流的正方向和互感对应端的情况而定。如用矩阵形式表示，支路电压和支路电流列向量之间的关系可写为

$$[V]=[Z]([I]+[I_s])-[V_s] \tag{11-16}$$

与式（11-13）形式相同，但支路阻抗矩阵$[Z]$不是对角线矩阵，其主对角线元素仍为支路阻抗，而非对角线元素$[Z]_{jk}$和$[Z]_{kj}$则是相应支路间的互感抗$\pm Z_m$。

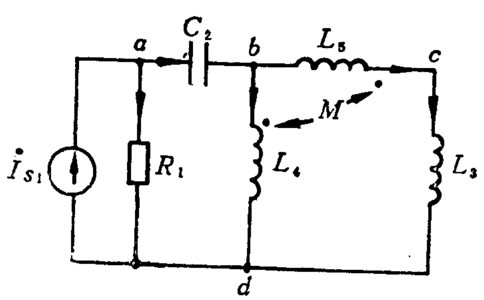
由式（11-16）可得到

$$\begin{aligned}[I]&=[Z]^{-1}[V]-[I_s]+[Z]^{-1}[V_s]\\&=[Y][V]-[I_s]+[Y][V_s]\end{aligned} \tag{11-17}$$

式（11-17）和式（11-12）形式一样，但这里的支路导纳矩阵$[Y]$也不再是对角阵了，不能直观的写出，须由支路阻抗矩阵求逆得到，即$[Y]=[Z]^{-1}$

由式（11-17）和式（11-8）及式（11-9）导出的节点方程和式（11-15）形式一样。但节点导纳矩阵$[Y_n]$与无互感的情况不同，不能直观的写出来。

例二　用节点分析法求图11-8所示电路的各节点电位、各支路电压和各元件电流。已知：$\dot{I}_{s1}=18.36\underline{/60.6^\circ}\text{A}=(9+j16)\text{A}$，$R_1=1\Omega$，$C_2=1\text{F}$，$L_3=L_4=L_5=1\text{H}$，$M=0.5\text{H}$，$\omega=1^{\text{rad}}/_{\text{s}}$。



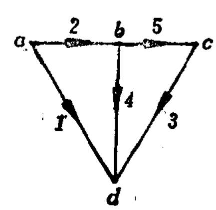


图 11-8　例二图

解：按支路编号及电流正方向，画出有向图，如图所示。节点关联矩阵为

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

支路阻抗矩阵为

$$[Z]=\begin{pmatrix}R_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -j\dfrac{1}{\omega C_2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & j\omega L_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_4 & -j\omega M\\ 0 & 0 & 0 & -j\omega M & j\omega L_5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -j & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & j & -j0.5\\ 0 & 0 & 0 & -j0.5 & j\end{pmatrix}$$

支路导纳矩阵

$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & j & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{4}{3}j & -\dfrac{2}{3}j\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2}{3}j & -\dfrac{4}{3}j\end{pmatrix}$$

节点导纳矩阵

$$[Y_n]=[A][Y][A]^T=\begin{pmatrix}1+j & -j & 0\\ -j & -3j & 2j\\ 0 & 2j & -\dfrac{7}{3}j\end{pmatrix}$$

流入各节点的电流源

$$[A][\dot{J}_s]=\begin{bmatrix}9+j16\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

节点电位列向量（单位为V）

$$[\dot{V}_n]=[Y_n]^{-1}[A][\dot{J}_s]=\begin{bmatrix}9\\ -7\\ -6\end{bmatrix}$$

支路电压（单位为V）

$$[\dot{V}]=[A]^T[\dot{V}_n]=[9 \quad 16 \quad -6 \quad -7 \quad 1]^T$$

元件电流（单位为A）

$$[\dot{I}_e]=[Y][\dot{V}]=[9 \quad j16 \quad j6 \quad j10 \quad j6]^T$$

4．理想电压源、电流源的转移

应用标准支路后，单一元件的支路可看作特殊情况。$Z=0$时，为理想电压源；$Y=0$时，为理想电流源；而当$V_e=0$，$I_e=0$时，是无源元件。在无源元件中，可以只有一个元件R、L或C。

一个支路只有理想电压源时，由于$Z=0$，$Y=\infty$，不能用式（11-11）来表示它的伏安特性。同样地，当一支路中仅有理想电流源时，由于$Y=0$，$Z=\infty$，也不能用式（11-10）表示其伏安特性。因此使得基于这种伏安关系的网络分析方法遇到了困难，这个困难可用电源转移的方法来解决。

理想电压源的转移方法见图11-9，首先选定电压源的一个节点，例如图(*a*)中的N_2。按所连接的支路把电压源分作几个电动势相等的电压源相并联，同时把节点也分作几个相连的节点，如图(*b*)所示。因为被分开的节点等电位，故连线之间没有电流，把它们断开，成为如图(*c*)所示电路。作如上转换并不影响网络其他部分的工作情况。

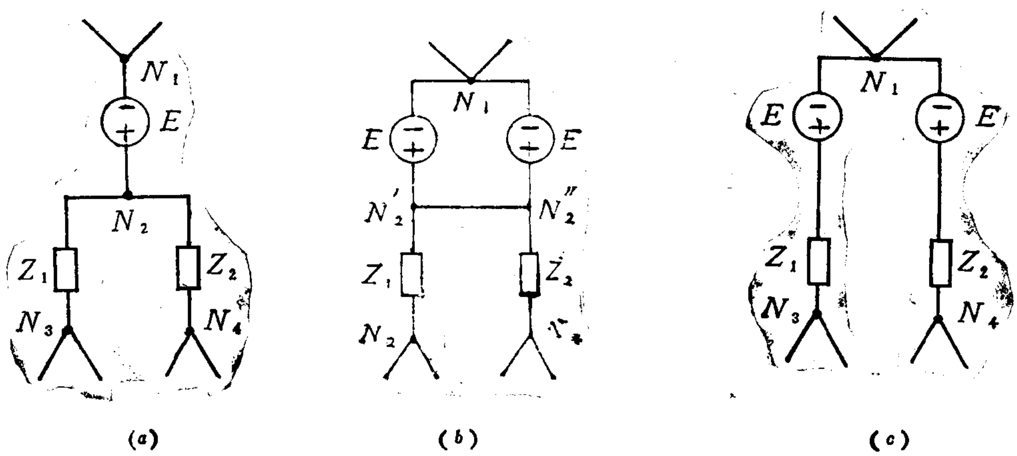


图 11-9　理想电压源的转移

把理想电压源转移到与之相连的其他支路后，网络中增加了电源的个数，却减少了一个支路，并消去了一个节点。

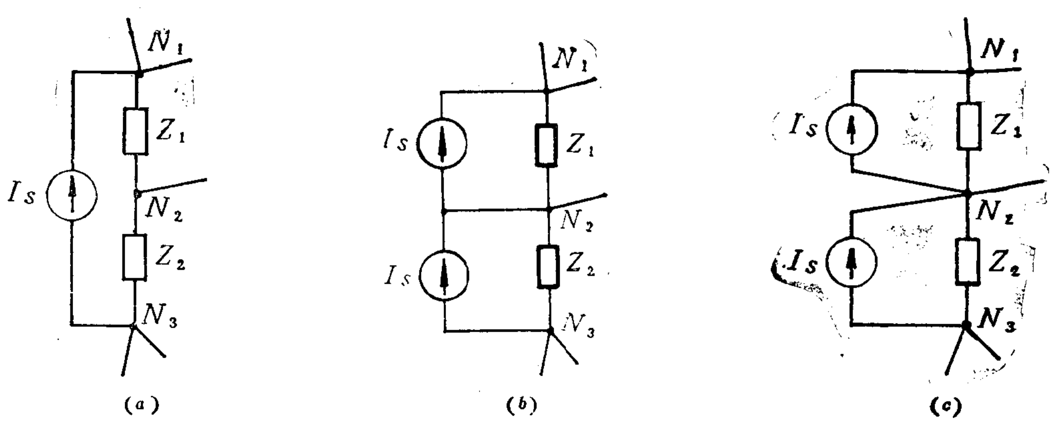


图 11-10　理想电流源的转移

理想电流源的转移方法，见图11-10，首先把电流源按其所跨接的支路分成几个电流相等的串联电流源，并与所跨接的支路间的节点逐个相连，如图中的(*b*)所示，显然，由于连接线中无电流，所以不改变网络的工作状态。然后，象图(*c*)所示，把各电流源分别与其所跨接的支路形成新的支路。因为各节点的进出电流未受影响，故与原网络等效。

把理想电流源转移到它所跨接的其它支路后，网络可减少一个支路和一个回路。

§11-3 网孔矩阵和网孔分析法

1. 网孔矩阵

我们已经知道，在分析平面网络时，可取网孔电流做为独立变量，列出网孔电压方程，求出网孔电流。

对于有B条支路N个节点的平面网络，其网孔数为

$$L = B - N + 1$$

每个网孔可以有任意个支路，但每个支路最多与两个网孔相关联。这与每一个节点和支路的关联关系类似。因此，仿照节点关联矩阵，定义网孔矩阵[M]来描述图的几何性质。它的每一行对应着一个网孔，每一列对应着一条支路，其中的元素m_{jk}定义如下：

$m_{jk} = 1$　当支路k属于网孔j，且正方向一致时；

$m_{jk} = -1$　当支路k属于网孔j，且正方向相反时；

$m_{jk} = 0$　支路k不属于网孔j时。

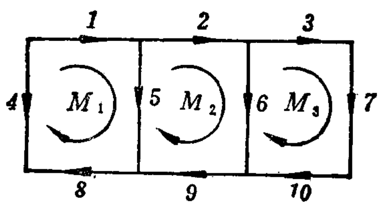


图 11-11　图的网孔

网孔的方向可以任取，按习惯把所有网孔的方向取为顺时针或逆时针。

例如图11-11的图，按所取网孔方向，网孔矩阵为

$$[\mathrm{M}] = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

把KVL应用到各网孔，则得一组电压平衡方程式

$$\begin{cases} V_1 - V_4 + V_5 + V_8 = 0 \\ V_2 - V_5 + V_6 \quad V_9 = 0 \\ V_3 - V_6 + V_7 + V_{10} = 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$[\mathrm{M}][V] = [0] \tag{11-18}$$

式中支路电压列向量[V]各元素的排列次序与网孔矩阵[M]的列对应支路的次序一致。

式（11-18）对一般情况，也是成立的。

根据KCL和[M]的定义，不难得出支路电流列向量[I]和网孔电流列向量[I_m]的关系为

$$[I] = [\mathrm{M}]^T[I_m] \tag{11-19}$$

2. 网孔分析法

式（11-18）和（11-19）是克希霍夫两条定律在网孔分析中的体现。欲求出网孔电流和各支路电流和电压，还须找出支路特性。为此，我们仍沿用图11-6所示的标准支路，其支

路电压和支路电流的关系如式（11-10）所示。把B个支路的电流电压关系写成矩阵形式即

$$[V]=[Z]([I]+[I_s])-[V_s] \tag{11-20}$$

式中$[Z]$为支路阻抗矩阵，如网络中不含互感和受控源，则$[Z]$为对角线矩阵，主对角线上各元素分别为各支路阻抗。若网络中含有互感或受控源，则相应支路间的耦合关系应在$[Z]$中体现出来。

把式（11-20）代入式（11-18）得

$$[M][Z]([I]+[I_s])-[M][V_s]=[0] \tag{11-21}$$

把式（11-19）代入（11-21）整理得

$$[M][Z][M]^T[I_m]=[M][V_s]-[M][Z][I_s] \tag{11-22}$$

令$[Z_m]=[M][Z][M]^T$为**网孔阻抗矩阵**。则式（11-22）简写为

$$[Z_m][I_m]=[M][V_s]-[M][Z][I_s] \tag{11-23}$$

式（11-23）即**网孔方程**。当已知网络结构和参数时，可由此式求得网孔电流

$$[I_m]=[Z_m]^{-1}\{[M][V_s]-[M][Z][I_s]\} \tag{11-24}$$

网孔阻抗矩阵$[Z_m]$是B－N＋1阶方阵，主对角线元素Z_{ii}等于网孔i的各条支路阻抗的总和，即网孔i的自阻抗。非对角线元素Z_{jk}为网孔j与网孔k的互阻抗。在没有受控源的情况下$[Z_m]$是对称矩阵。

例题　用网孔分析法求图11-12所示正弦稳态电路中各支路的电流。

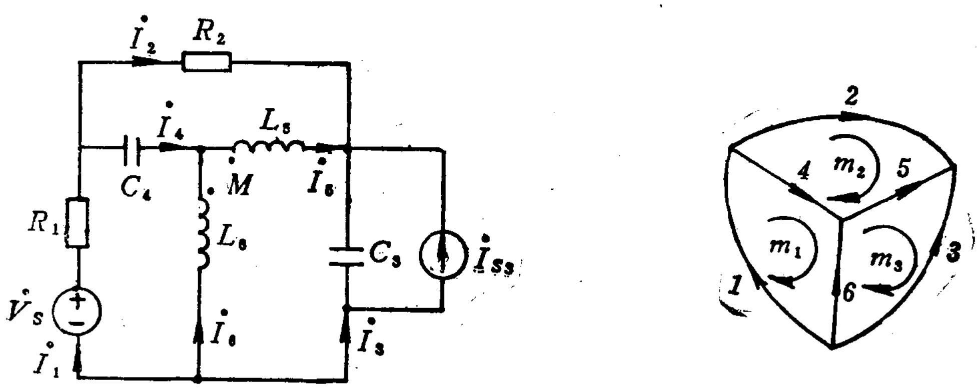


图 11-12　网孔法举例

解：作出有向图并取网孔m_1、m_2、m_3的方向如图所示。网孔矩阵为

$$[M]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

电压源和电流源列向量分别为

$$[\dot V_s]=[\dot V_{s1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$$
$$[\dot I_s]=[0\ 0\ -\dot I_{s3}\ 0\ 0\ 0]^T$$

支路阻抗矩阵