

多粒子理論

符拉索夫 著

科学出版社

3.833
9545 11

多 粒 子 理 論

A. A. 符拉索夫著

朱 玉 昇 譯

科 学 出 版 社

1959

А. А. ВЛАСОВ
ТЕОРИЯ МНОГИХ ЧАСТИЦ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА ЛЕНИНГРАД
1950

內 容 簡 介

本书是作者总结他以前在刊物上发表过的工作而写成的,书中叙述了作者及其学生所发展的新的多粒子理论。这个理论和旧理论的主要不同在于新理论 1) 放弃了对微粒子采用严格的点的概念(即特别强调了粒子的空间延伸度), 2) 重新定义了封闭物理系统的概念, 3) 力图把运动描述为物质的一个不可分割的属性, 而不描述为某些“源”作用的结果。这个理论的应用很广, 已经成功地解决了一系列的问题。

本书分为两大部分。第一部分是理论基础, 第二部分是理论的应用。在后一部分中, 作者以很大篇幅讨论了电子等离子区的问题。

无论是对于理论方面的或实验方面的物理学工作者来说, 本书都是很有价值的。

多 粒 子 理 論

А. А. 符拉索夫著
宋 玉 昇 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街 117 号)
北京市书刊出版业营业许可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总经售

*

1959 年 10 月 第 一 版
1959 年 10 月 第一次印刷
(京) 0001—4,300

书号: 1920 字数: 307,000
开本: 850×1168 1/32
印张: 11

定价: 1.60 元,

序 言

本书所阐述的理論的主要問題是在研究多电子系統的性质时产生的,在这些問題中,所謂电子等离子区占有重要的地位。这类系統具有独特的性质,因而就需要研究出一种方法,它不仅考虑到“近程”相互作用(在小于粒子的平均間距之距离上),而且还考虑到在大于上述粒子平均間距的距离上的“远程”相互作用。考虑这两种相互作用的一种特殊方法是极精确地反映了多电子系統的基本性质的方法。根据我們提出的方法,已經成功地解释了一系列观察到的現象。此方法的主要优点是它比較簡單而且有效。

在探討上述問題时产生了近程和远程相互作用之間相互关系的問題。远程相互作用表现为每个粒子同整个集体的联系。相反地,近程相互作用通常是以經典气体分子运动論所用的“碰撞”方法来考虑的。这个方法的特点是只考虑两个相互碰撞的粒子之間所产生的相互作用。

是否能用双体碰撞,三体碰撞,四体碰撞……的逐步計算最后求得粒子集体中的远程相互作用呢?以考虑远程相互作用为基础的方法是否把普通的碰撞方法作为某一特殊情况或极限情况而包括进去呢?这个問題是复杂的。首先发生的問題是:对于中性粒子來說,远程相互作用是否存在,其作用如何以及如何正确地估計它們。这个方法应用在中性粒子系統上获得了一定的成就,因为已經解决了結晶过程本性的問題。以后沿此途径又揭露了波在多粒子系統中传播的一系列特性。

应当說,对中性粒子系統來講,远程相互作用的引入使上面提出的問題尖銳化起来。事实上,在中性粒子的情况下碰撞的概念似乎已完全适用;而我們提出的方法只建立在連續方程和計算相互作用的积分方法上。这个方法本身好象并不明显地含有碰撞的

概念。它的广泛的普遍性只能一步步地来说明。

理論发展的第二个阶段是试图从吉布斯 (Gibbs) 統計力学和量子力学中 n 体問題的精确公式出发来論証这个方法。对这个問題进行的物理学和数学的分析表明，从上述理論将此方法完全推导出来是不可能的。这是与在上述理論中存在着一系列困难以及与該方法所包含的那些物理因素有关。例如，试图把电动力学的相互作用包括到建立在刘維 (Liouville) 定理上的多粒子統計力学中去，就会碰到一些与带电粒子的点的概念有关的困难。但是，我們的方法是在研究多电子集体时产生的，因而沒有上述那些困难。經典力学和統計力学的另一个困难是不能从这些理論中得出下面的事实：在温度不断下降的情况下液体形成晶体結構。显然，这說明在統計力学中集体相互作用效应是考虑得不全面的。量子力学同样也不能回答这个問題。从数学观点来看，这是由于量子力学不能导致“分支”解 (“ветвящиеся” решения)，而这种解在我們的理論中起着重要的作用。这也和量子力学的近似方法、即所謂自洽場 (самосогласованное поле) 方法有关。

上面談到的問題使作者認為，我們提出的方法在性質上是一个新的方法。

在建立这个理論时，在方法論方面有三个因素起指导作用。

(一) 放弃对微粒子的严格的点的描述。不管一个粒子和媒質以及和其他粒子之間的关系如何，該粒子始終具有質点的性質，把粒子看成为質点的概念只是真实情况的近似反映。目前，無論是实验事实或是現有理論的內在困难都說明有必要建立一种理論，并以对粒子概念的新的解释作为它的基础。此理論特別應該反映出粒子的空間延伸度与該粒子所处的物理条件的依賴关系。

(二) 对封閉物理系統概念的新的解释。我們觉得現存的理論在實質上已脫离了經典力学意义上的封閉概念 (統計力学与量子力学系統)。对本书中所发展的粒子动力学來說，計算粒子与周圍媒質的关系的特殊方法是一特征。封閉概念由此而获得了新的意义。此时，向經典理論的过渡就与对此关系引入一定的限制有关。

(三) 试图建立这样的理论, 在该理论中, 运动是物体的一个不可分割的属性, 而不是某些“源”的作用的结果(即经典力学中的力, 统计物理学中的恒温器, 电动力学中的电荷与电流)。运动实质上是借助于这些源从外界引入物理系统的。在我们的理论中, 上述的概念是这样体现的, 即用坐标和速度空间中的分布函数来描述每个粒子。

应该指出, 我们的理论并不与经典理论相矛盾, 它使我们有可能精确地确定出经典理论的适用范围。例如, 要弄清楚在什么情况下质点、封闭系统等经典概念是适用的, 在什么情况下失去其意义和应当加以推广。我们看到, 经典力学方程以及某种意义上的统计学方程在一定的条件下可作为特殊情形从我们的理论中得出。

此理论的应用远未穷尽。到目前为止我们已得到下列结果:

1. 已经详细地研究了多电子集体的振动性质和探讨了一系列现象, 对这些现象来说, 这些性质可以认为是确定了的。

2. 已经提出和分析了激发等离子区固有振盪的各种方法。

3. 解释了辉纹。

4. 解释了结晶过程的性质, 并指出了晶体的一些新的性质。

5. 证明了在足够密的媒质和足够低温的条件下声的突跃出现的效应。

6. 证明了当排斥力大于引力时, 在相互作用的粒子系统中有几个声速存在。

7. 分析了在阴极射线管中电子之间的相互作用的意义。

最后, 我衷心感谢我的学生别列莱申(А. Г. Перелешин)、雅柯夫列夫(В. А. Яковлев)、鲁钦娜娅(А. А. Лучиная)、巴札洛夫(И. П. Базаров)、格里德曼(Н. И. Гольдман)、托卡雷娃娅(К. С. Токарева)、米亚基谢夫(Г. М. Мякишев), 他们参加了本理论中某些问题的研究; 同时, 我也感谢霍加因诺夫(В. Т. Хозяинов)对本书的出版给予了很大的帮助。

А. 符拉索夫

1949年11月25日于莫斯科

目 录

序言.....	iv
---------	----

第一篇 理論基础

第一章 所提出的理論的必要性.....	1
§ 1. 对带电粒子系统应用玻耳兹曼方法所产生的困难及困难的消除.....	1
§ 2. 有任意有心力存在时的集体相互作用.....	11
§ 3. 統一經典电动力学和力学时所产生的困难的消除.....	14
§ 4. 点区域化原理的放棄及与吉布斯統計力学的联系.....	18
§ 5. 結晶理論和吉布斯統計学.....	28
§ 6. 非区域化粒子的理論和量子力学.....	32
§ 7. 理論的物理思考.....	45
第二章 出发前提,基本方程及其性質.....	53
§ 8. 基本方程.....	53
§ 9. 方程的特殊形式.....	59
§ 10. 守恆定律.....	64
§ 11. 有精确解的若干情形.....	69
§ 12. 基本方程的不變性和相对論形式.....	74
第三章 与經典理論的联系.....	79
§ 13. 向經典力学的过渡.....	79
§ 14. 向連續媒质理論的过渡.....	84
§ 15. 向电动力学的过渡.....	87
§ 16. 向点粒子的相对論动力学的过渡.....	90
第四章 双粒子与多粒子系統的穩定态的确定作为 非綫性积分方程的本征值問題.....	93
§ 17. 基本方程.....	93
§ 18. 分支方法.....	97

第五章 与時間有关的解	108
§ 19. 方程的綫性化	108
§ 20. 勾犀問題	112
§ 21. $e^{i\omega t} \varphi(x, y, z)$ 型的解	117
§ 22. 表示“自加速”过程的解	132

第二篇 理論的应用

第一章 关于晶体的理論	139
§ 23. 引言	139
§ 24. 週期性結構的突跃形成及結晶判据	140
§ 25. 非綫性理論	144
§ 26. $u(r)$ 展式收敛性的研究	150
§ 27. 集体相互作用的意义	154
§ 28. $\theta = 0$ 时的“点陣”解	159
§ 29. 中間溫度	162
§ 30. 两种混合物的結晶	173
§ 31. 与用氩进行的实验的比較	183
第二章 电子等离子区的振动性質	189
§ 32. 給定初始分布时的振动性質	189
§ 33. 非衰减波	198
§ 34. 在簡併化态中具有費米分布函数的等离子区的振盪	211
§ 35. 在外电場中等离子区的性狀	213
第三章 輝紋理論	222
§ 36. 引言	222
§ 37. 輝紋的产生	224
§ 38. 金属中的輝紋	229
§ 39. 电子等离子区的輝紋和振动	235
§ 40. 行走輝紋	236
第四章 中性粒子媒质的波动性質	243
§ 41. 波传播的一些特点	243
§ 42. 中性粒子流中的輝紋	247
第五章 电子束的高頻发生器理論	249

§ 43. 在小浓度下调制沿弱电子束的传播	249
§ 44. 考虑了电子间相互作用时沿强电子束调制的传播的研究	254
§ 45. 二极管之理论	260
第六章 流体动力学近似中之电子等离子区	271
§ 46. 基本方程。能量表式和能流表式	272
§ 47. 表面振动和空间振动	276
§ 48. 等离子区振动的激发方法	285
§ 49. 在各种不同物理条件下的振动性质	294
§ 50. 电荷运动时德拜极化的改变	301
§ 51. 非等温等离子区理论	311
§ 52. 对于非等温等离子区一般情形的空间振动谱和表面振动谱 ...	314
§ 53. 等离子区中电子束的速度反常强的重新分布现象和 振动的激发	320

第一篇 理論基础

第一章

所提出的理論的必要性

§ 1. 对帶电粒子系統应用玻耳茲曼方法所产生的困难及困难的消除

对于按庫侖 (Coulomb) 定律相互作用的系統來說, 玻耳茲曼 (Boltzmann) 方程 (以及与其有关的气体分子运动論方法) 是否适用呢? 这个問題在本书作者的一篇論文¹⁾ 中曾討論过, 在那里曾明确地指出, 气体分子运动論在这种情况下是不适用的, 并提出了一种新方法來代替它。

同时, 这种系統的近代理論是以与一般中性粒子气体的相似作为基础的。此时假設, 每个粒子的运动除它們相互接触(碰撞) 的短促時間外, 是按惯性定律进行的。这一观点是依靠气体分子运动理論的基本概念(截面, 自由程长度与時間等) 和此理論的玻耳茲曼基本方程来贯彻的。

大家知道, 若 $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$ 是确定相体积元 $dr dv$ 中粒子的最可几数目的分布函数, 則玻耳茲曼方程有下面的形式:

$$+ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_v vf = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]''', \quad (1.1)$$

其中 $\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]'''$ 一項表示由碰撞引起的分布函数的改变, 它可由下面的关系式滿意地求出:

1) A. A. Брасов, ЖЭТФ 8, 291 (1938).

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]'' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (ff_1 - f'f'_1) V b db d\omega_1 d\epsilon. \quad (1.2)$$

在这里对所有速度 ξ_1 , η_1 , ζ_1 和所有碰撞参量值 b , ϵ 进行积分。假设方程(1.1)和(1.2)表示具有任意相互作用力定律的质点动力学, 则粒子间的相互作用力定律规定了瞄准距离 b 与偏转角 θ 和角 ϵ 的关系。因此, 所研究的系统的专门问题只在于确定粒子间的相互作用定律。在所研究的带电粒子情况中, 这种相互作用是库仑相互作用。

在托马斯 (L. Thomas)、朗缪尔 (L. Langmuir)、朗道 (Л. Ландау)、德鲁维士坦 (M. Druveystein)、达维多夫 (Б. Давыдов)、哥沃兹多维尔 (С. Гвоздовер) 等人的研究工作中把气体分子运动理论工具应用在电子系统上。这方面的著作直到今日还不断涌现 (部分著作已编入专题论文和教科书中)¹⁾。

但很清楚, 运动方程的形式和以此方程形式为基础的关于气体的一般概念是解多体问题中的一定近似, 是建立在计算相互作用的专门方法上的近似, 即只考虑粒子间的双粒子相互作用。假设每个粒子在该时刻只是与其他部分的一个粒子相互作用, 同时此相互作用带有“碰撞”性质。但是, 为使这种近似法有意义, 必须满足下列三个条件:

1 粒子间的相互作用力应当是能够引入作用范围的概念的。也就是说, 我们应当忽略由远程飞越 (与作用范围半径比较) 的粒子的影响所引起的分布函数的改变。

2. 气体要足够稀薄, 使得粒子间的平均距离比力的作用半径大。

3. 我们应有可能忽略那些发生“相互碰撞”过程的时间间隔。

1) L. Thomas, *Proc. Roy. Soc. A.* 124, 464 (1928); L. Langmuir, *Proc. Nat. Acad.* 14, 627 (1928); Л. Ландау, *Phys. Z. Sow. Union* 10, H. 2. (1936); M. Druveystein, *Physica*, 562 (1938); Б. Давыдов, *Phys. Z. Sow. Union* 9, 433 (1936); С. Гвоздовер, *Phys. Z. Sow. Union* 12, 164 (1937). Л. Гуревич, *Основы физической кинетики* (1940); I. H. Cahn, *Phys. Rev.* 75, 293, 346, 838 (1949).

这一条件不明显地应用在分子运动理論工具中，但非常明显地表现在几率过程（стохастические процессы）的理論工具中，后者实质上与前者等效。

缺少这三个条件，我們就不可能利用分子运动論的形式。例如在庫侖相互作用定律情况下，力随着距离而非常緩慢地减小。在此情形中就不滿足第一条条件；每个粒子同时又与其他粒子的整个系統相互作用，因此，多体問題已不能归結为一般运动方程的形式了。

只考虑粒子的双粒子相互作用时的缺点可从下面清楚地看出：正粒子和負粒子在空間某处的相对密度的改变是与空間电荷的出現有关的；而空間电荷对远在粒子間平均距离之外的带电粒子的运动发生作用。在此情况下，只考虑連續的双粒子相互作用就完全不能反映现实。此时起有重要作用的应是作用范围大于粒子間平均距离的相互作用力（我們称为远程力），而这种力的作用在一般运动方程的形式中是不可能考慮到的。

这种情形也表现在例如对在庫侖場中心散射的問題的解导致了总截面的发散表式，而这正是由于远程力作用的结果。事实上，正如大家所知道的，在庫侖場中心的弹性散射的有效截面对于小偏轉角 θ 來說可由下式得出：

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = 4 \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\theta^4},$$

其中 v, m, e 表示初始速度、质量和散射粒子的电荷。当 $\theta \rightarrow 0$ 时（远程飞越），这个表式趋于无穷大，于是散射的总截面 $\left(\int d\sigma \right)$ 发散。

这个积分发散的物理原因在于，尽管在远程飞越的情况下，粒子也很少改变其軌道，但是这种飞越的几率随瞄准距离的增大而迅速增长。由于作用范围半径是无限大的，所以运动方程中的相应的积分便沒有意义。

对于非弹性碰撞也有类似的情形。根据双粒子碰撞理論的概

念，在自由电子系統中运动电荷損失能量的物理原因在于：当連續成双地碰撞时，运动的粒子将动能传递給另外一些电子。因此，粒子与整个电子集体的复杂相互作用的問題每一时刻都可用双体問題来代替。

当运动粒子的速度大大超过系統中电子的速度时，关系式是最简单的，并且也是大家所熟知的¹⁾。如果 N 是电子的浓度， p 是瞄准距离，則在 dz 路程上的碰撞次数(瞄准距离值在 p 和 $p + dp$ 之間)的平均值是 $2\pi N p dp dz$ 。电荷为 ϵ 、质量为 M 的运动粒子与自由电子(电荷为 e ，质量为 m)在一次相互碰撞时所耗損的能量等于

$$Q = \frac{2\epsilon^2 e^2}{mv^2} \frac{1}{p^2 + a^2},$$

其中

$$a = \frac{\epsilon e (M + m)}{M m v^2}.$$

因此，在单位路程上的总能量損失是

$$-\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi\epsilon^2 e^2}{mv^2} \int \frac{p dp}{p^2 + a^2},$$

其中积分应遍及由0到 ∞ 的所有 p 值。所得出的积分是发散的。其发散度仍决定于远程(大于 p 的)相互作用。原因也与在弹性散射情形中的相同。积分发散这一事实清楚地表明远程相互作用的作用，并且严格地說来，使得用气体分子运动論的普通方法来描述电子系統成为不可能，因为总截面存在的基本条件不滿足。

上述各工作所具有的特点是力图保留粒子的双粒子碰撞理論的思想和概念，以及整个气体分子运动論的运算工具，来代替远程力理論中的計算和对远程力的作用的估計。为此目的，在进行积分时，瞄准距离被截止在某一定值上。朗繆尔和朗道将瞄准距离截止在德拜长度上，德魯維士坦截止在比德拜距离大的某值上，达維多夫和哥沃茲多維尔截止在粒子間的平均距离上。这些学者这样处理显然是放弃了远程相互作用的考虑，沒有估計到它們的作用。

1) N. Bohr, *Phil. Mag.* 33, 581 (1915); 25, 10 (1913).

这样的理論不能認為是完善的。

上面所談的使人确信，只考虑双粒子相互作用（以碰撞的方式）的运动方程的方法对于带电粒子系統來說是不能令人满意的近似方法，在这种系統的理论中近程相互作用力和远程相互作用力應該起着可相比拟的作用，因而带电粒子系統實質上不是气体，而是某种被远程力集聚成的十分特殊的系統。

如果我們考虑的瞄准距离足够大（就象在前面提到的朗繆尔、朗道、达維多夫等人的工作中所做的那样），就不能認為我們在解决該問題上是前进了，因为此时保留了气体分子运动論方法的主要缺陷，即把粒子的集体相互作用归結为两个孤立的运动物体的相互作用。甚至引入三粒子碰撞，四粒子碰撞等方法也不是很有效的，因为即使在經典力学中三体問題直到現在也还没有解决。

在这个复杂的問題中須采取新的措施。

我們將庫倫場分为二部分：第一，在粒子間平均距离以內的相互作用；第二，远程相互作用。为了分出近程相互作用，我們可以在粒子間平均距离的二分之一处將庫倫場截开。这样，保留碰撞的概念就成为可能，而相互作用的这一部分即可按运动方程的形式考虑。

我們已經指出，在統計項 (1.2) 中粒子間相互作用定律表現在确定 $b = b(\theta, \varepsilon)$ 的关系上。例如，对于弹性球的碰撞，

$$b = \sqrt{\sigma} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{11}^{st} = \int (ff_1 - f'f'_1) v \sigma \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} d \varepsilon.$$

对于庫倫相互作用，

$$b = \frac{2e^2}{mv^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

对位于由 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 間隔的散射角 θ (θ 是鈍角) 來說，函数 $\frac{\theta}{2}$ 和 $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ 的形状与它們的一次微商大致相同。当 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ 时， $\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ 及 $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 各项相同；当 $\frac{\theta}{2} = 80^\circ$ 时，第二項为第一項的 1.08 倍； 60° 时为 1.7 倍； 45° 时为

3 倍。因此,这些角的公式有类似的形式,不过,在庫倫相互作用的情形中以可变数值 $\frac{2e^2}{mv^2}$ 代替恒定截面 σ 。如果将 v 理解成粒子的恒定平均速度(在估計数量級时完全可以),則相应的积分实际上几乎是等同的,只要使各截面值等同就行了。因此,公式

$$\sigma = 4 \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \quad (\alpha)$$

应当确定大偏轉角时作用范围的数量級,同时应将 v 理解成粒子的平均速度。

对小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角來說,已不类似于弹性球的情形,因而对 $\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{11}$ 作用的估計也应有不同。朗繆尔(1928)和朗道(1936)在运动方程的一般形式范围内只对远程飞越 $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 进行过計算。对于自由程长度,他們得出下面的公式:

$$l \cong \frac{(kT)^2}{e^4 LN},$$

由此对于截面 σ 有

$$\sigma = \frac{1}{\pi l N} \cong \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^2}{kT} \right)^2 L,$$

或因 $3kT/2 = mv^2/2$,

$$\sigma = \frac{9}{\pi} \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 L, \quad (\beta)$$

此式与(α)式之不同只是对数項 $L = \ln \frac{b_2}{b_1}$, 其中 b_1 和 b_2 是瞄准距离的最小值和最大值。因此,只对近程飞越或只对远程飞越的計算,若撇开对数項不談,便能得出相同的作用范围表式。应取相当于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的距离作为最小距

离,即 $b_1 = \frac{2e^2}{mv^2}$ 。

最大值 b_2 应位于 b_1 和粒子間的 $1/2$ 平均距离之間¹⁾。假設 $b = \frac{1}{2} N^{-1/3}$, 对于 L 則有

$$L = \ln \frac{3kT}{4N^{1/3}e^2}.$$

1) 认为 b_2 是德拜距离并不完全正确,因为它也可能大于粒子間的平均距离,并且此时在一个粒子的作用范围中将有数个其他粒子存在。因此,“碰撞”概念以及它与有关的运动方程的普通形式失去了意义。

从密度与温度的关系来看, L 可能大于或小于1. 因此, 作用范围的值本质上都能由远程飞越 ($b_2 > b_1$) 或近程飞越 ($b_2 < b_1$) 来确定. 对于一般条件, 等离子区中的 $L \sim 10$. 因此, 作用范围的数量级 (考虑到近程和远程飞越) 可按下面公式进行估计:

$$\sigma = a \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2,$$

其中 $a \sim 10$.

在电离层的条件下, $N \sim 10^6$ 电子/厘米³, 假设 T 等于 300°K , 此时我们得出下列作用范围 σ 、自由程长度 l 和碰撞频率 ν_{ii} 的值:

$$\sqrt{\sigma} \cong \sqrt{3a} 10^{-6} \text{ 厘米},$$

$$l = \frac{1}{\pi \sigma^2 N} \cong \frac{1}{3\pi a} 10^6 \cong 10^4 \text{ 厘米},$$

$$\nu_{ii} = \frac{v}{l} \cong 10^3 \text{ 秒}^{-1}.$$

对于放电管中的电子等离子区, 若假设 $N = 10^{10}$ 电子/厘米³, $T = 10^4^\circ\text{K}$, 我们有

$$\sqrt{\sigma} \cong \sqrt{27a} 10^{-8} \sim 10^{-7} \text{ 厘米}, l \sim 10^3 \text{ 厘米}, \nu_{ii} \sim 10^4 \text{ 秒}^{-1}.$$

对于电子与离子间碰撞的相互作用来说, 不难看出, 截面 σ 的表式也是式(β), 其中只是 m 将为这些粒子的有效质量, 因此, 对 σ , l , ν_{ii} 的估计实际上与前无异.

远程相互作用的计算可用下面的方法进行. 根据连续方程一般结构的考虑, 在方程 (1.1) 中可以补充考虑力的作用的一项, 此项的形式应为

$$\text{div}_v g f,$$

其中散度取在速度空间中, g 是加速度矢量. 为了使加速度决定于电场和磁场强度, 而电场和磁场强度又取决于空间所有点上的 f 值, 我们就应考虑任意远距离粒子对在該空间点上的分布函数的改变的影响:

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{e}{m} \left(e + \frac{1}{c} [vh] \right), \\ \text{div } e &= 4\pi\rho; \text{rot } h - \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j, \\ \rho &= e \int f dv; j = e \int v f dv. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

电荷密度和电流密度的表式根据平均值的表象来确定。假定 ψ 是与粒子有关的某量, 则

$$\bar{\psi} = \frac{\int \psi f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}}.$$

将分布函数归一化成粒子密度 n 时,

$$\int f d\mathbf{v} = n,$$

量 ψ 的密度 ρ_ψ 的表式将是

$$\rho_\psi = n \bar{\psi} = \int \psi f d\mathbf{v}.$$

假设 $\psi = 1, \mathbf{v}$, 我们将得出粒子密度和电流密度的表式。

因此, 在计算远程相互作用时, 我们将 f 的初始方程写成下面形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mathbf{v} f + \operatorname{div}_v \frac{c}{m} \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}] \right) f &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]'' , \\ \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi e \int f d\mathbf{v}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= 4\pi e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \\ \left(\operatorname{div} \mathbf{h} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

对存在有数种粒子的情形的推广是基本的。例如, 对于三种粒子(电子、离子、中性原子)的混合体, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mathbf{v} f_1 + \operatorname{div}_v \frac{c_1}{m_1} \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}] \right) f_1 &= \\ &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]''_{11} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]''_{12} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]''_{13}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mathbf{v} f_2 + \operatorname{div}_v \frac{c_2}{m_2} \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}] \right) f_2 &= \\ &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]''_{21} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]''_{22} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]''_{23}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mathbf{v} f_3 &= \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]''_{31} + \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]''_{32} + \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]''_{33}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi \rho, \operatorname{rot} \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \\ \rho &= e_1 \int f_1 d\mathbf{v} + e_2 \int f_2 d\mathbf{v}; \mathbf{j} = e_1 \int \mathbf{v} f_1 d\mathbf{v} + e_2 \int \mathbf{v} f_2 d\mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$