函数论丛书(三)

近代函数论

李国平 刘怀俊 邱华吉 著

武汉大学出版社

函 数 论 丛 书

（三）

近代函数论

李国平　刘怀俊　邱华吉　著

武汉大学出版社

一九八三年

内 容 提 要

本书为函数论丛书之（三），系统地介绍了等角映射边界对应理论、解析函数边界性质，并在此基础上讨论了实变函数构造理论向复变函数构造理论的转化、解析函数空间 $H_2(D, h)$ 内的完全性以及奇异积分与半纯函数的随伴 Weierstrass 函数等课题。

本书可作为数学工作者和高等学校数学系教师、研究生和高年级学生的参考书。

函 数 论 丛 书

（三）

近 代 函 数 论

李国平 刘怀俊 邱华吉 著

武汉大学出版社出版
（湖北省武昌珞珈山）
湖北省新华书店发行 湖北省沔阳县印刷厂印刷

开本 787×1092 1/18 印张25 字数 530000
1983年12月第1版 1983年12月第1次印刷
印数 1—5000
统一书号：13279·1 定价：3.85元

序

本书是以五十年代我在武汉大学数学系讲授函数论的讲义为基础进行整理并增加了我们在这一领域内若干方面的结果而写成的。全书凡十二章，当时油印过前八章。

第一和第二两章是全书的基础，分别介绍了 Montel 正族理论和等角映射边界对应的一般理论。第三和第四两章讲述了面积定理及其应用，系统地论述了 Ahlfors 不等式，Ostrowski 尖点理论以及 Warschawski 不等式，并为其应用作了铺垫。第五和第六两章为 Poisson 积分，调和测度理论和 Lindelöf 最大模原理的一系列推广，此外,还简单介绍了 Nevanlinna 半纯函数理论。第七和第八两章的重点是单位圆内解析函数的边界性质以及 Walsh-Sewell 关于线性微商与区域性微商的理论，包括我们在这方面的某些成果。

在前八章的基础上，作为第七和第八两章的继续，第九章中我们详细地讲述了实变函数构造理论向复变函数构造理论转化的重要原则，由此可以间接得到一系列重要定理的转化形式；当然，也讨论了复变函数构造理论中的直接方法，构造了普遍二重级数，这些方法和原则为进一步研究函数构造理论提供了有用的工具。作为第三和第四两章的继续，第十章中通过L单连带等角映射边界变形定理的一系列推广及其在$w(n,m)$型尖点与平准曲线的距离的应用得到了进一步的发挥，并成为第十一章中论述复变解析函数空间$H_2(D,h)$的完全性的理论基础。作为最后一章的第十二章，介绍了奇异积分与半纯函数的随伴 Weierstrass 函数的关系以及半纯函数的构造和唯一性问题，对于前一论题有关文献不多，希望能引起读者的兴趣，起到抛砖引玉的作用。

邱华吉同志抄写订正了前四章，其中第一和第二两章利用了路见可教授当时的笔记。刘怀俊同志整理和补充了后八章。路见可教授详细校阅了本书的全部原稿，并提出了十分宝贵的意见，对本书的完成做了大量的工作。我衷心感谢后两位作者刘怀俊同志和邱华吉同志的合作；衷心感谢路见可教授的帮助；衷心感谢武汉大学数学研究所的同志们，武汉大学出版社和沔阳县印刷厂的同志们的辛勤劳动和大力支持，没有他们热情的帮助，这本书就不可能赶在武汉大学七十年校庆之际与读者见面。

限于水平，书中的缺点和错误敬祈读者指正。

李国平

一九八三年十一月于珞珈山

目　录

第一章　正族理论

§1　全纯正族的意义及其基本判定法

将某一区域中的全纯函数看作抽象空间中的点，而把抽象空间中的点集理论在这一观点下进行研究，便得Montel [1]的正族理论．正族理论在函数论中应用比较广泛，可作为一种基本工具．为了下面的讨论，我们先引进几个定义：

定义1　设D为z平面上一（有限的）通连区域*)，而无限的函数族$F=\{f(z)\}$中的每一函数都全纯于D内．若对F中的任一函数串$\{f_n(z)\}$，必可选出一子函数串$\{f_{n_i}(z)\}$广义一致聚结于D（即在任一有界闭子域$\overline{D}_1\subset D$中$\{f_{n_i}(z)\}$一致收敛于一全纯函数$\varphi(z)$或一致发散于∞），则称函数族F是D中的一（全纯）**正族**．

定义2　若函数族F在D中以某一点z_0为中心的一圆内为正族，则称族F在点z_0处为正族，而称点z_0为族F的一个**正规点**．

定义1是函数族F在整个区域D中为正族的意义，而定义2是函数族F在某一点处局部为正族的意义．这两个定义，可由下述定理联系起来．

定理1　函数族F在D中为正族与F在D中的每一点处为正族二者等价．因此，如果族F不是D中的正族，则必至少在D中有一非正规点．

证　若函数族F在D中为正族，显然F在D中的每一点处为正族．现证其逆．设D中一切点都是F的正规点．如$\overline{\Delta}$是D中任一有界闭区域，将$\overline{\Delta}$中的一切有理点作成序列$r_1, r_2, r_3, \cdots$，由于它们都是正规点，则可以任一r_n为中心作一小圆，使F在其中为正族，而这些圆将$\overline{\Delta}$盖住．由Heine-Borel定理，可以从中选出有限个圆掩盖$\overline{\Delta}$．因之对族F中的任一串$\{f_n(z)\}$，可以逐步在这有限个圆上选一子串使一致聚结于$\overline{\Delta}$上．

今在D内任取一串子区域$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$，使$\overline{\Delta}_n\subset\Delta_{n+1}$，且$\Delta_n\to D$．由上所述，在族$F$的任一函数串$\{f_n(z)\}$中，可选出一子串$\{f_n^{(1)}(z)\}$使

*)　本书所说通连区域，既可指单连通的，又可指多连通的．

一致聚结于$\overline{\Delta}_1$上；又可以从$\{f_n^{(1)}(z)\}$中选一子串$\{f_n^{(2)}(z)\}$使一致聚结于$\overline{\Delta}_2$上；如此继续下去，以至无穷. 因此用"对角线"法取函数串$\{f_n^{n}(z)\}$，就一致聚结于所有的$\overline{\Delta}_n$上，由于$\Delta_n\to D$，因而也就广义一致聚结于D中. 因为对于任一$\overline{D}_1\subset D$，总有一个Δ_m，使$\overline{D}_1$含在Δ_m中. 故由上述，可知族F为D中的正族. 定理得证.

定义3 若对任一$\overline{D}_1\subset D$，必存在一正数M，使对族F中的一切函数$f(z)$，恒有$|f(z)|<M$，$(z\in\overline{D}_1)$，则称族F在D中广义一致有界.

定义4 若对任一$\varepsilon>0$，必有一正数$\delta(\varepsilon)>0$，使得在$\overline{D}_1$中，满足条件$|z_1-z_2|<\delta$的任二点z_1,z_2，必致F中的任一函数$f(z)$，恒有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon,$$

则称族F在$\overline{D}_1$上等度连续.

关于如何判定族F为D中的正族，我们有如下的定理：

定理2 若族F在D中广义一致有界，则F必为D中的正族.

证 1° 首先证明族F在$\overline{D}_1\subset D$上等度连续. 设$\overline{D}_1$与D的边界间的距离为δ_1，以$\overline{D}_1$的每点为中心，$\frac{\delta_1}{2}$为半径作闭圆盘，它们的并形成一闭区域$\overline{D}_2\subset D$，而在$\overline{D}_2$上，F中的一切函数有$|f(z)|<M$. 在$\overline{D}_1$中任取二点z_1，z_2，使$|z_1-z_2|<\frac{\delta_1}{4}$，若设以$z_1$为中心的上述圆为$\gamma$，则$z_2$在$\gamma$内部，且连$\gamma$在内的闭圆盘属于$\overline{D}_2$. 由Cauchy公式，对族$F$中的任一函数$f(z)$有

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_1}dz,$$

$$f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_2}dz,$$

因而

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{\delta_1}{2}\cdot\frac{M|z_1-z_2|}{\frac{\delta_1}{2}\cdot\frac{\delta_1}{4}}=\frac{4M}{\delta_1}|z_1-z_2|.$$

因此，若取$\delta=\min\left(\frac{\delta_1}{4},\ \frac{\delta_1}{4M}\varepsilon\right)$，就可证实$F$在$\overline{D}_1$上等度连续.

2° 其次我们将D中的一切有理点排成一点串$r_1, r_2, \cdots$，对于F中的任一函数串$\{f_n(z)\}$，因在r_1处一致有界，故可选一子串使在r_1处收敛；然后从这一子串中又可选一子串使在r_2处收敛；如此继续下去以至无穷. 再利用对角线法即得原函数串的一子串，不妨仍记作$f_n(z)$，它在$r_1, r_2, \cdots$处皆收敛.

3° 现在证$\{f_n(z)\}$在以D中任一点z_0为中心的闭圆域K中一致收敛.

因$\{f_n(z)\}$在K上等度连续，故对任意$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，当$z_1, z_2 \in K$且$|z_1-z_2|<\delta$时，有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

以K中各有理点为中心，以$\frac{\delta}{2}$为半径作许多圆盘盖住K，由Heine-Borel定理，可选出有限个圆盘来盖住K，设这有限个圆盘的中心分别为$r_1, r_2, \cdots, r_p$，因$\{f_n(z)\}$在这些点处收敛，故有$N>0$，使当$m, n>N$时，有

$$|f_m(r_k)-f_n(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad k=1,2,\cdots,p.$$

现在设z为K中的任一点，它必至少属于上述p个圆盘中之一，不妨设属于中心为r_k的圆盘，由于$|z-r_k|<\delta$，从等度连续性，有

$$|f_m(z)-f_m(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_n(z)-f_n(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

当$m, n>N$时（N与z无关），

$$\begin{aligned}|f_m(z)-f_n(z)| &\leqslant |f_m(z)-f_m(r_k)|+|f_m(r_k)-f_n(r_k)| \\ &\quad +|f_n(r_k)-f_n(z)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

亦即$\{f_n(z)\}$在K中一致收敛.

这就证明了z_0是一正规点，由定理1，知函数族F为D中的正族.

注意，由以上证明可见，当D为扩充平面上任一通连域时定理仍然成立. 事实上，如$\infty \in D$，则命$Z=\frac{1}{z}$不难化为上述情形.

定理3（Montel基本判定定理）设D为一（有限）通连区域，$F=\{f(z)\}$为D中的全纯函数族，且F中的函数（除∞外）不取二有限值a与b，则F为D中的正族.

这一正族判定定理是很重要的. 它有很多应用，现在我们先来应用它；至于它的证明，将放在本章的最后.

§2 关于正族的几个基本原则

在上节的定理 2 中，我们看到：函数族F在D中广义一致有界是F为D中的正族的充分条件，但并不是必要条件．关于此，有下述定理．

定理4 **（第一基本原则）** 设$F=\{f(z)\}$为通连区域D内的正族，且在D中某一点z_0处为有界，则必广义一致有界于D内．

证 用反证法：若F在D中不广义一致有界，则必存在一$\overline{D_1}\subset D$（不妨假定$z_0\in\overline{D_1}$），使能在F中选出一子串$\{f_n(z)\}$，使得在$\overline{D_1}$上的模$|f_n(z)|$的上确界M_n当$n\to\infty$时趋向$+\infty$．

另外，由于族F为D内的正族，故在$\{f_n(z)\}$中可选出一子串$\{f_{n_i}(z)\}$在$\overline{D_1}$上一致聚结．又因在z_0处，$\{f_{n_i}(z_0)\}$为有界，则不可能有$f_{n_i}(z)\to\infty$．所以在$\overline{D_1}$上$f_{n_i}(z)$必一致收敛于一全纯函数$\varphi(z)$．但在$\overline{D_1}$上的全纯函数$\varphi(z)$的模必为有界．这与$|f_{n_i}(z)|$的上确界趋向$+\infty$相矛盾，从而定理得证．

定理5 **（第二基本原则）** 如$\{f_n(z)\}$为D中的正族，设$\{f_n(z)\}$于D内一无穷点集E上处处收敛，且E至少有一聚点在D内者，则$\{f_n(z)\}$必广义一致收敛于D内．

证 1°先证$\{f_n(z)\}$收敛于D的每一点处。设若不然，必有一点z^*，使$\{f_n(z^*)\}$或发散于∞或至少有二不同极限点a与b．但由第一基本原则，因$\{f_n(z)\}$收敛于E中的点，故必有界，因而$f_n(z^*)\to\infty$为不可能．若$\{f_n(z^*)\}$有二极限点a,b，则可选出二子串使$\{f_{n'}(z^*)\}\to a$，$\{f_{n''}(z^*)\}\to b$．由正族性，在$\{f_{n'}(z)\}$中可选出子串$\{f_{\lambda_n}(z)\}$在D中广义一致收敛于一全纯函数$\varphi(z)$，又在$\{f_{n''}(z)\}$中可选出子串$\{f_{\mu_n}(z)\}$在D中广义一致收敛于一全纯函数$\psi(z)$．显然$\varphi(z^*)=a$，$\psi(z^*)=b$。由于$\varphi(z)-\psi(z)$在D中全纯，且在E上为零，故由全纯函数的唯一性定理，在D中必$\varphi(z)\equiv\psi(z)$．这与$\varphi(z^*)\neq\psi(z^*)$矛盾，故$\{f_n(z)$在$D$中收敛于一有限的单值函数$g(z)$．

2°因$\{f_n(z)\}$为正族，且收敛于D的每一点，由第一基本原则，$\{f_n(z)\}$在D中广义一致有界．与定理 2 的证明类似．可知$\{f_n(z)\}$在$\overline{D_1}\subset D$中等度连续；而且已证$\{f_n(z)\}$在D中各点收敛．同法可证$f_n(z)$一致收敛于$\overline{D_1}$上．

定理6 **（第三基本原则）** 设D与D_1为二同类型的区域，即存在$z_1=\varphi(z)$把D等角映射到D_1上．如$F_1=\{f(z_1)\}$是D_1中的正族，则$F=\{f[\varphi(z)]\}$必为D中的正族；反过来也是如此．

证 今设在D中任取一$\overline{D'}\subset D$，而$\overline{D'}$经$\varphi(z)$等角映射到$\overline{D'_1}\subset D_1$．对于族$F$中的任一函数串$\{f_n[\varphi(z)]\}$，经等角映射，它在族$F_1$中的对应函数串设为$\{f_n(z_1)\}$，由题设的正族性，则必能选出子串$\{f_{n_i}(z_1)\}$一致聚结于$\overline{D'_1}$上．例如$f_{n_i}(z_1)\to\psi(z_1)\neq\infty$，则显然$\{f_{n_i}[\varphi(z)]\}$就在$\overline{D'}$上一致收敛于$\psi[\varphi(z)]$；如$\psi(z_1)\equiv\infty$，则必$\psi[\varphi(z)]\equiv\infty$．故定理得证．

今后我们可以简称此原则为："区域的等角映射不改变函数族的正族性"

§3 Montel基本判定定理在Picard类型定理上的应用

前已述及正族理论的应用很广，今仅就对Picard类型定理方面的一些应用来展开讨论．

定理7 （Picard[1]小定理）任何不恒等于常数的整函数$f(z)$，至多只能有一个（有限）例外值．

证 假若$f(z)$有两个有限的例外值，我们考察$|z|<1$中的全纯函数族$F=\{f_n(z)\}$，其中$f_n(z)=f(2^n z)$，由Montel基本判定定理，族F应为正族；又因为$f_n(0)=f(0)$，即在$z=0$处族F为有界，故根据第一基本原则，$\{f_n(z)\}$一致有界于$|z|\leqslant\frac{1}{2}$中，即$f(z)$在全平面中有界，由Liouville定理，$f(z)$必恒等于常数，这与题设矛盾．定理得证．

定理8（Julia定理） 设$f(z)$为一非退化的整函数（即不为常数或多项式，亦即以∞为本性奇异点），则在平面中自O出发一定至少有一方向J，使在以OJ为平分线的任意小的角域内，$f(z)$在其中至多只有一个（有限）例外值．

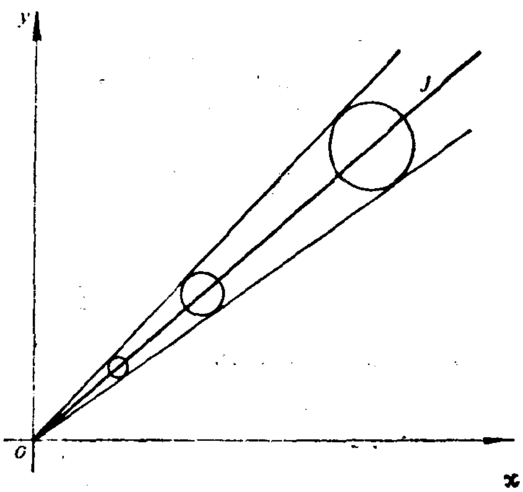

图1—1

证 我们仍考察函数族$F=\{f_n(z)\}$，其中$f_n(z)=f(2^n z)$，定义在一环形域

$$\Gamma:\ \frac{1}{2}<|z|<2$$

内.

1° 先证F不为Γ内的正族.

若F为Γ内的正族，则对F中的任一子串$\{f_{n'}(z)\}$，必可选出广义一致聚结于Γ的子串$\{f_{n''}(z)\}$，其极限不可能是Γ中的全纯函数. 不然的话，由第一基本原则可证$\{f_{n''}(z)\}$在Γ中广义一致有界，因而在$|z|=1$上一致有界，即$f(z)$在诸圆$|z|=2^n$上一致有界，由最大模原理，$f(z)$就将在整个平面上有界，故$f(z)$必恒等于常数. 此与题设矛盾；故在Γ中，$\{f_{n''}(z)\}$必广义一致发散于∞.

在Γ中任取一点z_0，则$\{f_n(z_0)\}$不可能有有限的极限点. 如若不然，例如有$\lambda\neq\infty$为其极限点，则可选出子串$\{f_{n'}(z_0)\}\to\lambda$，而在$\{f_{n'}(z)\}$中就不再能选出广义一致发散于$\infty$的子串了，这又与上述结论矛盾. 因之在$\Gamma$中，$f_n(z)$发散于$\infty$. 亦即任给$A>0$，必有$N$，使当$n>N$时，

$$|f_n(z)|=|f(2^n z)|>A,\qquad z\in\Gamma.$$

这就表示在$|z|=2^N$的圆外，$|f(z)|>A$. 即有

$$\lim_{z\to\infty}|f(z)|=+\infty.$$

所以∞点为$f(z)$的极点. 此又与题设矛盾. 故证得：族F不为Γ中的正族.

2° 由上述，在Γ中必至少有一点$z_0(\neq 0)$为族F的非正规点，我们可证射线Oz_0的方向OJ就是定理中所述的方向.

以OJ为平分线作一任意小的角域，又以z_0为中心，δ_0为半径作一圆域K_0，使内切于此角域的两边，则族F在K_0内不为正族，故在K_0中，F中的函数至多只能有一个（有限的）例外值.

现以$2^n z_0$为中心，$2^n\delta_0$为半径作圆域K_n. 则由$F=\{f(2^n z)\}$在K_0：$|z-z_0|<\delta_0$中至多有一个例外值，而函数$f(z)=f(2^n\frac{z}{2^n})$在$|\frac{z}{2^n}-z_0|<\delta_0$中. 亦即在

$$K_n:\ |z-2^n z_0|<2^n\delta_0,\quad n=0,1,2,\cdots$$

中至多有一个例外值. 注意所有的K_n均在上述角域中，因此定理得证.

定理7还可以推广如下：

定理9 （**Picard一般定理**）设解析函数$f(z)$以$z=z_0$为广义的孤立本性奇异点（即在该点附近可能有无穷多个极点），则$f(z)$在$z=z_0$的邻域中将取一切值，至多有两个例外（连∞在内）.

证 先将z_0转化为无穷远点来考虑，这只须令$\varphi(z)=f(z_0+\frac{1}{z})$即可. 现用反证法：假设$\varphi(z)$在$|z|>R$外不取$a,b,c$三个不同值，则令

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)-a}{\varphi(z)-b}\cdot\frac{c-b}{c-a}\qquad (c\text{有限})$$

或

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)-a}{\varphi(z)-b}\qquad (c=\infty).$$

显然，$\psi(z)$仍以∞为广义的孤立本性奇异点，且在$|z|>R$外不取$0,1,\infty$三个值. 不妨假定$R=\frac{1}{2}$（必要时可用相似变换）. 今设$F=\{\psi_n(z)\}$，$\psi_n(z)=\psi(2^n z)$，$z\in\Gamma$，Γ：$\frac{1}{2}<|z|<2$. 由Montel定理，族F为Γ中的正族. 在Γ中任取一点z_0，则$\{\psi_n(z_0)\}$必有聚结值Z_0.

1°如Z_0为有限，则在$\{\psi_n(z_0)\}$中可选出子串$\{\psi_{n'}(z_0)\}\longrightarrow Z_0$，因之$\{\psi_{n'}(z)\}$在$z=z_0$处有界. 又因$\{\psi_{n'}(z)\}$也是正族，所以由第一基本原则，$\{\psi_{n'}(z)\}$广义一致有界于$\Gamma$中，当然也一致有界于$|z|=1$上. 因此$\psi(z)$就在一串趋向无穷远点的同心圆周(即$|z|=2^n$)上有界，设其模小于$M$，在任二相邻同心圆周间的环形域上，应用最大模原理，则在此环形域上亦必$|\psi(z)|<M$. 由于这些同心圆趋于∞，故在某一圆外，恒有$|\psi(z)|<M$；这样$z=\infty$就不是$\psi(z)$的本性奇异点了. 这是不可能的.

2°如$Z_0=\infty$，则考察$\frac{1}{\psi(z)}$与$\left\{\frac{1}{\psi_n(z)}\right\}$，就能转化为$1^\circ$的情形，这也是不可能的. 故定理得证.

定理10 （**Schottky定理**）取$|z|<1$中的全纯函数族$F=\{f(z)\}$，$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$，其中$a_0\neq 0$固定，且$f(z)$不取$0,1$为值，则$F$广义一致有界于$|z|<1$内：

$$|f(z)|<M(\theta,a_0),\quad |z|\leqslant\theta\ (<1).$$

证 因$f(z)$不取$0,1$为值，故F为$|z|<1$中的正族；又因为在$z=0$时，$f(0)=a_0$为有界，由第一基本原则，族F必广义一致有界于$|z|<1$内. 定理得证.

注意：如在定理中，单位圆域改为$|z|<R(<+\infty)$，则

$$|f(z)|<M(\theta,a_0),\quad |z|\leqslant\theta R\ (<R).$$

利用上一定理又可证明：

定理11 （**Landau定理**）设$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$全纯于$|z|<R$内，不取$0,1$为值；若$a_0$固定，且$a_1\neq 0$，则必

$$R\leqslant\frac{2M(\frac{1}{2},a_0)}{|a_1|}.$$

证 固定a_0,a_1，其它系数可变，则得$|z|<R$中的一正族$F=\{f(z)\}$，因而由Schottky定理$|f(z)|<M(\theta,a_0)$，$|z|\leqslant\theta R$；特别地，当$|z|=\frac{R}{2}$时，$|f(z)|<M(\frac{1}{2},a_0)$. 但由Cauchy公式

$$a_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta,$$

故

$$|a_1|\leqslant\frac{\max\left|f(\frac{R}{2}e^{i\varphi})\right|}{R/2}\leqslant\frac{2M(\frac{1}{2},a_0)}{R},$$

亦即

$$R\leqslant\frac{2M(\frac{1}{2},a_0)}{|a_1|}.$$

定理得证.

实际上也可以先证明Schottky定理或Landau定理，然后应用它们来证明Picard的一般定理，但不及用正族理论把这些定理的证法统一在一起，既简便又清楚.

§4 模 函 数

为了证明Montel的基本判定定理，我们引进模函数的概念.

考虑z平面中的单位圆，于其中取一内接"圆弧三角形"ABC（图1—2），其三边均与单位圆周正交（因之每个内角等于零）.

现在，把"黑"三角形ABC对各边反演，得三个"白"三角形；又把所得的"白"三角形对各边再行反演，又得六个黑三角形.如此下去，白三角形反演为黑三角形，而黑三角形又反演为更多的白三角形，循此反复以至无穷.

现在我们证明：

1° 这些三角形充满整个单位圆内部，既无空隙也不复叠.

2° 每一"白"三角形邻接着三个"黑"三角形，反过来也是如此.

3° 在$|z|<1$中，任作一闭连续曲线，它只能穿过有限个上述的三角形.

关于1°，各三角形不复叠是很明显的，因为每次反演都是把反演弧内侧（对圆周来说）的三角形变为外侧的三角形.

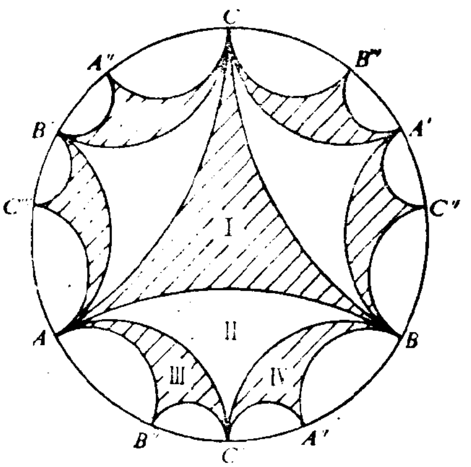

图1—2

要证明它们填满单位圆内部，可把单位圆变成（ζ平面中的）上半平面，使A,B,C,分别变成$0,1,\infty$，则三角形A,B,C就变成图1—3中的打斜线部分Ⅰ′．在z平面中对AB边反演得的三角形Ⅱ变到ζ—平面上就是三角形Ⅱ′，同样Ⅲ，Ⅳ，对应于Ⅲ′，Ⅳ′，…，显然，构成Ⅱ′，Ⅲ′，Ⅳ′，…的各圆弧其半径当无限逐次反演时趋向于零，而圆弧中心总在区间〔0，1〕上．故经无限次反演，这些圆弧三角形能充满这整个半带形，因此在z-平面上就能充满AB弧外侧的部分．同理可讨论BC，CA弧的外侧部分．即所有反演三角形充满整个单位圆盘内部．

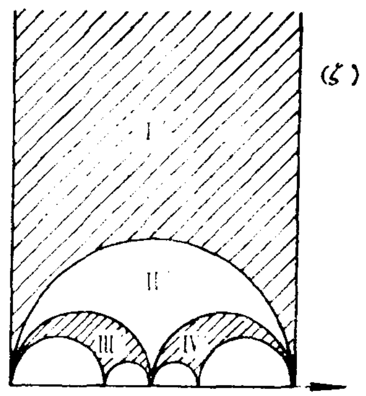

图1—3

性质2°是非常明显的．下面我们来证明性质3°：若$|z|<1$中的这条闭曲线用1°的方法变成ζ上半平面中的一条闭曲线，它必与实轴间有一正的距离，所以它就只穿过ζ平面中的有限个三角形，因而原来的曲线也只穿过单位圆中的有限个三角形．

现在我们把圆弧三角形ABC用函数$w=\mu(z)$保角映射到w上半平面中去，使A,B,C分别对应于$0,1,\infty$．当三角形ABC沿AB边作反演，则根据镜像原理，$\mu(z)$就经过AB边延拓到三角形ABC'中，而其函数值就充满w的下半平面，使对AB弧对称的一对点z,z^*，其函数值共轭：$\mu(z)=\overline{\mu(z^*)}$．我们将曲四边形$AC'BC$记作$Q_0$，称作基本四边形，这一四边形内部经$\mu(z)$保角映射到$w$平面，不过要除掉沿实轴自$-\infty$到0以及自1到$+\infty$的两条剖线．在$|z|<1$中以后每作一次反演，就把$\mu(z)$又作一次延拓，这样继续下去，就得到$|z|<1$中的解析函数$\mu(z)$，而其值在$w$平面中构成一无穷多层的黎曼面（“黑”三角形对应于上半平面，“白”三角形对应于下半平面）．如把Q_0中的AB弧擦去不要，并把所有反演中弧AB的像也擦去，则在$|z|<1$中，得一曲四边形网，每一四边形经$\mu(z)$变成w平面，以$-\infty$到0与1到$+\infty$二半射线为剖线．如再把这些平面片适当地粘连，便构成上述黎曼面．

今证$\mu(z)$是$|z|<1$中的单值函数．在$|z|<1$中任取一点z_0，并从z_0出发任作一简单闭曲线C，若z_0在某一曲四边形Q中，而当z沿着C环行一周时，它所经过的曲四边形依次为（由性质3°知只有有限个）：

$$Q,Q^1,Q^2,\cdots Q^{n-1},Q^n\equiv Q.$$

但是当z自z_0出发穿过Q的某一边进入Q^1后，它要再回到Q无论如何仍要从这个边上回来，因为z不能到$|z|=1$上去．故可推断$Q^{n-1}\equiv Q^1$，同理$Q^{n-2}\equiv$

Q^2等等，这样上面的一列四边形可写为：

$$Q, Q^1, Q^2, \cdots Q^{k-1}, Q^k, Q^{k-1}, \cdots Q^2, Q^1, Q.$$

如$k=0$，则整个C在Q中．当z沿着C环行一周时，$\mu(z)$必在一个单叶枝上，$\mu(z)$也必回到原处．今假定C经过$k-1$个曲四边形时，已证得z沿C环行一周时，$\mu(z)$的值不变，现证C经过k个曲四边形时，上述结论仍然成立．若设最初穿入Q^k的点为a（图1—4），最后离开Q^k的点为b，而把C改变如下：在a以前的点不改，到a后沿C到b再沿Q^k的边上由b到a（此段叫作C'），然后再由a沿原路回到b，再由b沿C的原路回到z_0．这样一来，z自a沿C'环行一周时，$\mu(z)$自$\mu(a)$出发仍回到$\mu(a)$．因此就可把C中自a到b的一段改为Q^k边上ab弧的一段，而不影响$\mu(z)$的最终变化；而如此改变后，C就只经过$k-1$个曲四边形了．因此上述结论仍成立．根据数学归纳法得知：$w=\mu(z)$是$|z|<1$中的单值全纯函数，我们称它为**模函数**．

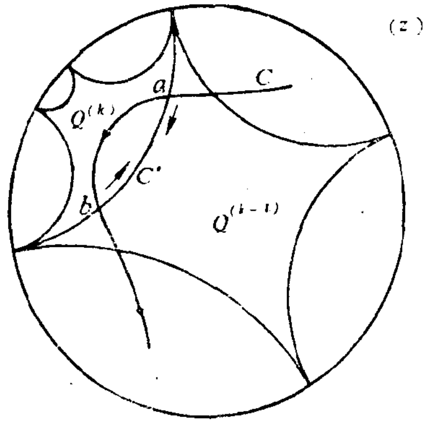

图1—4

$\mu(z)$的反函数$z=\lambda(w)$是w平面中的多值解析函数，以$0, 1, \infty$为本性奇异点；对同一w，其值点在$|z|<1$中有无穷多个，即在上述各曲四边形中各有一个点（它们称为等价点）．

§5 Montel基本判定定理的证明

设 D为ζ平面上一有限单连区域，$F=\{f(\zeta)\}$为其中的全纯函数族，而不取a, b为值（当然也不取∞）．我们要证明F为D中的正族．

因设$F=\{f(\zeta)\}$中函数不取a, b为值，令$\varphi(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)-a}{b-a}$，则$\Phi=\{\varphi(\zeta)\}$中函数不取0，1（以及$\infty$）为值．显然，$\Phi$与$F$同时为$D$中正族或否，故证明上述定理时不妨假设$a=0$，$b=1$．

我们知道：$w=f(\zeta)$的值域$\mathscr{D}_f$在w平面中显然不能以0，1，∞为其内点，而且也不能绕过这些点，即在$\mathscr{D}_f$中不能有连续的闭Jordan曲线包住0，或1，或0与1（即单独包住∞），因为这种曲线在D中的像可连续变形而收缩于一点，因而它在$\mathscr{D}_f$中的像也能连续变形而收缩于一点．我们在w平面中作一有限单连区域$\mathscr{D}_f^* \supset \mathscr{D}_f$，使仍具有上述区域$\mathscr{D}_f$的性质，这当$\mathscr{D}_f$为多