电磁理论中的直接法与积分方程法

陈敬熊 李桂生 著

科 学 出 版 社

电磁理论中的直接法与积分方程法

陈敬熊　李桂生　著

科　学　出　版　社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书是一部论述电磁场理论及其应用的专著，系统论述了由作者提出的求解有源边值问题的直接求解法，并论述了积分方程法的理论及其应用，总结了作者近三十年从事电磁场理论研究工作的成果和体会.

全书共十二章. 前八章利用直接求解法对一些典型问题，诸如波导激励、平直地面、尖劈、圆柱体、椭圆柱体、抛物柱体、球形地面、圆锥体边界的有源边值问题，进行了求解，并对其中某些问题通过不同方法求解的比较，进一步揭示了直接求解法的特点. 后四章利用积分方程法处理了具有复杂边界的相控阵天线、周期性结构及微带天线等具体工程技术问题. 另外，在对积分方程的某些理论作尝试性探讨的同时，还对电磁波在各向异性介质的传播及大型天线方向性测量中的距离问题作了理论上的探讨，以引起科技人员对这方面工作的兴趣.

本书可供从事电磁波理论及其应用(如天线、微波、电波传播、广播电视等方面)的科技人员与大专院校师生参考.

电磁理论中的直接法
与积分方程法
陈敬熊　李桂生 著
责任编辑　刘兴民
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1987年3月第一版　开本：850×1168 1/32
1987年3月第一次印刷　印张：17
印数：0001—3,550　字数：449,000

统一书号：15031·791
本社书号：4950·15—7

定价： 4.80 元

序　　言

电场、磁场与激励源是通过空间和时间的线性微分算子联系在一起的，这就是 Maxwell 方程式的概括阐述. 由于电场和磁场在方程中都是以向量形式出现的，这就给解方程带来了一定的困难. 经过物理学家的努力，在某些特定的边界下，这些方程可借助某些标量函数(更确切地说，应该是单方向向量函数)来求解，而这些函数是满足波动方程式的，这就是大家所熟知的 Hertz 位函数. 这种处理问题的方法，在无源区域中，对 Maxwell 方程式的求解是行之有效的.

五十年代末，作者在用上述方法求解有源的 Maxwell 方程式时，遇到了困难. 困难在于如何把所要求的场与源正确无误地联系起来. 以垂直于无限长圆柱体上的基本电振子为源的电磁波的绕射问题就是一例. 要找出两个轴向 Hertz 位函数同激励源的关系决不是直观的. 而要解决处于任意指向基本振子激励下的金属圆锥体的绕射问题就更难对付了. 因此，作者认为有必要设法寻找一种更直接的方法来正确地处理诸如场与源的联系问题. 经过努力，作者发现，对于柱体边界的边值问题，轴向电场和磁场各自满足关于各种源(一般表示为 δ 函数及其导数)的非齐次波动方程式，而场强的其它分量则可以通过它们求出. 对于以球坐标系的坐标面为边界的边值问题，我们则发现，加权后的径向电场和磁场各自满足关于各种源的非齐次波动方程式. 通过解这些非齐次方程式，就能直接得到正确的解，而且不会出现漏项的错误. 我们称这种方法为直接求解法. 所谓直接是指解有源边值问题不需要通过辅助函数(如 Hertz 位函数)而直接求解. 必须指出，由于问题归结为求解两个各自独立的非齐次偏微分方程（一个含有电场的某一分量 E_i，另一个含有磁场的某一分量 H_j)，因此，许多有关的已知结论均可引用. 例如，按本征函数展开求解时，解的正交

性对于场分量 E_i 或 H_i 各自成立，从而使方程的求解大大简化.

另一种求解有源边值问题的方法——并矢 Green 函数法，在 1971 年 C. T. Tai. 所著的书中作了系统的介绍，他利用这种方法求解了一系列典型的有源边值问题．经过对并矢 Green 函数法与直接求解法的比较，我们发现，这两种方法所能求解的问题是相同的，但在方法掌握上的难易方面和运算的繁简程度上则有所不同.

由于过去对直接求解法未作过系统的介绍，因此，全面系统地介绍直接求解法的理论及其应用就成为本书的主要目的之一.

本书的前八章就是利用直接求解法对一些典型的问题，诸如波导激励、平直地面、尖劈、圆柱体．椭圆柱体、抛物柱体、球形地面、圆锥体边界的有源边值问题进行了求解，并对其中某些问题通过不同方法求解的比较，进一步揭示了直接求解法的一些特点．这里的绝大部分公式均化简到便于计算的形式.

由于工程上所遇到的问题的边界有时是比较复杂的，如果只囿于直接解 Maxwell 方程，并使所得结果满足这样的边界条件，一般是不容易做到的．因此，为使问题易于处理起见，需要将复杂区域划分成若干小区域，然后按照边界条件将各小区域的场强联系起来．这样，对边值问题的处理，就可从原来的解微分方程转为解积分方程了．根据边界条件所建立的积分方程是多种多样的，我们不准备论述一般传统的积分方程（如由波导不连续出现的积分方程），而是选择部分既有代表性又有实用价值的问题作些研究.

作者认为集中馈电的微带天线问题，就其难度而言，是比较典型的．关键在于如何处理好馈线与辐射体(天线)之间的电流连续问题，以建立能正确描述其物理机制的数学模型．第九章所提供的处理这一问题的方法，作者认为，可以用于解决工程上经常出现的传输线与辐射体的连结问题.

周期性结构自七十年代起重新受到一定的重视，特别是相控阵天线、平面波滤波器、极化转换器等等的出现，使它又有了生命力．借助于积分方程，可以使这类边值问题得到简单而有效的处

理．这些问题将在第十、十一章中加以研究．

研究 Maxwell 方程式实质上就是处理偏微分方程中的 Cauchy 问题，其解的存在与唯一性等问题早已研究得很透彻了． 但对从 Maxwell 方程式导出来的积分方程本身的理论研究，除某些特例外(如 Wiener-Hophe 问题)，似乎尚不多见． 第十二章主要集中于对电磁场理论中某些常见的积分方程在理论上作一些粗浅的探讨，旨在引起数学工作者对这方面工作的兴趣．此外，该章还提到天线方向性测量中的距离问题，以及各向异性媒介中的 Maxwell 方程式的求解．

需要说明，本书决不是全面论述电磁场理论及其应用的专著，仅仅是作者在三十多年的工作中，将所接触到的有关这方面的一些问题作一定程度的提炼总结． 因此，在内容上可能有一定的片面性． 同时由于作者的水平有限，书中难免存在不妥甚至于错误的地方，请批评指正．

本书第一章至第八章由李桂生执笔，第九章至第十二章由陈敬熊执笔．

本书大量试验工作是都世民工程师负责进行的． 陈骊、谢良贵、刘永华、张明作了大量数字计算工作． 本书所有的插图是由夏振荣同志完成的．作者在此对他们表示诚挚的感谢．

作　者

1984年12月

目　　录

第一章　求解有源边值问题的直接求解法

在实际工作中常常会遇到求解有源电磁场的边值问题，例如波导、谐振腔的激励，地面对于离它很近的天线性能的影响，卫星或导弹体上天线辐射场的计算等等，都属于这类问题．求解这类问题有各种不同的方法，其中以五十年代后较为广泛运用的并矢 Green 函数法更具有普遍性．这一方法比较系统，适用于目前能用解析方法求解的所有坐标系．关于并矢 Green 函数法可参考有关的著作[1]．

本书将向读者介绍另外一种求解有源电磁场边值问题的有效方法．这种方法是我们在五十年代末研究飞行器上天线性能时提出来的，我们称之为直接求解法．该方法具有以下一些特点:

(1) 比较直观，易于为人们掌握．

(2) 不仅具有与并矢 Green 函数法同样的普遍性，而且在数学运算上往往比较简单．

(3) 较易处理源所在处的场．

下面我们先对直接求解法的基本思想作一些简单的说明，至于具体的求解方法和细节将在以后的有关章节中作进一步介绍．

如所周知，在常用的坐标系(如直角坐标、柱坐标、球坐标等)中求解无源的电磁场边值问题时，电磁场的各分量可通过两个向量函数求出，其中每个向量都是由含有一个分量的位函数构成的．例如在柱坐标系中，可由电向量位函数 $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{e}_z \Pi_z$ 和磁向量位函数 $\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F_z$ 求出所有的场．同样，在球坐标系中，场的各分量则可通过 $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{e}_r r \Pi_r$ 和 $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r r F_r$ 求出．它们与场强之间的关系有以下的公式[2]:

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Pi} - j\omega\mu \nabla \times \mathbf{F}, \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon_i' \nabla \times \boldsymbol{\Pi} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}. \qquad (1.2)$$

本书采用时间因子 $e^{j\omega t}$，式中

$$\varepsilon_i' = \varepsilon_i - j\sigma/\omega, \tag{1.3}$$

其中 ε_i，σ 分别为媒质的介质系数与导电系数．令 ε_{ir} 为媒质之相对介质系数，即有

$$\varepsilon_{ir} = \varepsilon_i/\varepsilon_0. \tag{1.4}$$

如果以 ψ 表示函数 Π_z，F_z，Π_r，F_r 中的任意一个，则 ψ 满足以下方程：

$$\nabla^2\psi + \beta^2\psi = 0, \tag{1.5}$$

式中 ∇^2 为 Laplace 算子，

$$\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon_i' = \beta_0^2(\varepsilon_{ir} - j60\lambda_0\sigma), \tag{1.6}$$

其中 λ_0 为自由空间波长，$\beta_0^2 = \omega^2\mu\varepsilon_0$.

由式(1.1)，(1.2)不难看出，在柱坐标系中，电场 E_z 只由 $\boldsymbol{\Pi}$ 确定，磁场 H_z 只由 $\mathbf{F}$ 确定，而在球坐标系中，电场 E_r 只与 $\boldsymbol{\Pi}$ 有关，磁场 H_r 只与 $\mathbf{F}$ 有关，这就是通常所谓的 E 波与 H 波.

以上的结果虽然是在区域中无源的条件下导出的，但从中也可得到一些启示：对于有源场，我们是否能从有源的 Maxwell 方程组中，经过某些运算而导出两个独立的非齐次方程(即包含有源函数及其导数)，其中一个只包含电场的某一分量，另一个只含有磁场的某一分量，而场的其它分量则可由该两分量求出呢？如果这一设想成立的话，则问题就归结为：在一定边界条件下求解两个独立的非齐次偏微分方程，从而使有源场的求解问题大大简化.

以下我们对这一设想作进一步论证.

§1.1 基本方程的推导

为了使基本方程具有普遍性，我们采用了曲线坐标．以下仅研究正交坐标系的情形．令 u_1，u_2，u_3 为曲线坐标变量，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 为相应坐标轴的单位向量，h_1，h_2，h_3 为相应的 Lamé 系数．设我们考虑的是点源，则 Maxwell 方程组可写成以下形式：

$$\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3E_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2E_2)\right]$$
$$=-j\omega\mu H_1-\Delta M_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.7}$$
$$\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1E_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3E_3)\right]$$
$$=-j\omega\mu H_2-\Delta M_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.8}$$
$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2E_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1E_1)\right]$$
$$=-j\omega\mu H_3-\Delta M_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.9}$$
$$\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3H_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2H_2)\right]$$
$$=j\omega\varepsilon'E_1+\Delta P_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.10}$$
$$\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1H_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3H_3)\right]$$
$$=j\omega\varepsilon'E_2+\Delta P_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.11}$$
$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2H_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1H_1)\right]$$
$$=j\omega\varepsilon'E_3+\Delta P_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\tag{1.12}$$

其中

$$\varepsilon'=\varepsilon-j\sigma/\omega,\tag{1.13}$$

$$\text{电流矩向量}=\Delta\mathbf{P}=\mathbf{e}_1\Delta P_1+\mathbf{e}_2\Delta P_2+\mathbf{e}_3\Delta P_3$$
$$=\mathbf{e}_1j_1\Delta v+\mathbf{e}_2j_2\Delta v+\mathbf{e}_3j_3\Delta v,\tag{1.14}$$

$$\text{磁流矩向量}=\Delta\mathbf{M}=\mathbf{e}_1m_1\Delta v+\mathbf{e}_2m_2\Delta v+\mathbf{e}_3m_3\Delta v.\tag{1.15}$$

（这里，$\mathbf{j}$ 为电流密度向量；$\mathbf{m}$ 为磁流密度向量；Δv 为体积单元；$\mathbf{e}_i$ 为坐标系单位向量.）

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3')}{h_1h_2h_3},\tag{1.16}$$

并有

$$\iiint\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dv=1\qquad(\text{当 }\mathbf{r}'\text{ 在积分区域内时}).$$

首先考虑柱坐标系的情形，此时 $\mathbf{e}_3$ 与 z 轴平行，为此，我们应

从以上各式中消去 E_1, E_2, H_1, H_2 诸分量，求出 E_3, H_3 所满足的方程. 注意到,在此情形下，$h_3=1$，并且有 h_1, h_2 与 u_3 无关. 由式(1.7),(1.8)，有

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1H_1)=-\frac{1}{j\omega\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial E_3}{\partial u_2}\right)-\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1\frac{\partial E_2}{\partial u_3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_2}[h_1\Delta M_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2H_2)=-\frac{1}{j\omega\mu}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}(h_2E_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial E_3}{\partial u_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_1}[h_2\Delta M_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}. \tag{1.18}$$

代入式(1.12)，有

$$\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial E_3}{\partial u_2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial u_2\partial u_3}(h_1E_2)\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial u_2}[h_1\Delta M_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$
$$+\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial E_3}{\partial u_1}\right)-\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}(h_2E_1)$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial u_1}[h_2\Delta M_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}$$
$$=-\beta^2E_3+j\omega\mu\Delta P_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{1.19}$$

由式(1.10),(1.11)，有

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}(h_2E_1)=\frac{1}{j\omega\varepsilon'}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}[h_2\Delta P_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^3}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3}H_3-\frac{\partial^3}{\partial u_1\partial^2u_3}(h_2H_2)\right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_2\partial u_3}(h_1E_2)=\frac{1}{j\omega\varepsilon'}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial u_2\partial u_3}[h_1\Delta P_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^3}{\partial u_2\partial^2u_3}(h_1H_1)-\frac{\partial^3}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3}H_3\right\}.$$

代入式(1.19)，利用式(1.12)，化简后，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial E_3}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial E_3}{\partial u_2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}E_3+\beta^2E_3\\
&\quad=j\omega\mu\Delta P_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\\
&\qquad-\frac{1}{j\omega\varepsilon'}\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}[h_1h_2\Delta P_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.\\
&\qquad+\frac{\partial^2}{\partial u_2\partial u_3}[h_1\Delta P_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}[h_2\Delta P_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}[h_2\Delta M_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial u_2}[h_1\Delta M_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

用类似方法可求出 H_3 所满足的方程，但更简单的方法还是利用二重性原理对上式作以下的代换而求出，即以 $E_i\to H_i$，$H_i\to -E_i$，$\mu\to\varepsilon'$，$\varepsilon'\to\mu$，$\Delta P_i\to\Delta M_i$，$\Delta M_i\to-\Delta P_i$ 代换后，可得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}H_3+\beta^2H_3\\
&\quad=j\omega\varepsilon'\Delta M_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\\
&\qquad-\frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}[h_1h_2\Delta M_3\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.\\
&\qquad+\frac{\partial^2}{\partial u_2\partial u_3}[h_1\Delta M_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2}{\partial u_1\partial u_3}[h_2\Delta M_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}[h_2\Delta P_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial u_2}[h_1\Delta P_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

由式(1.7)—(1.12)还可求出以下的结果：

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}+\beta^2\right)E_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2E_3}{\partial u_1\partial u_3}-\frac{j\omega\mu}{h_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial u_3}[\Delta M_2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \\
& + j\omega\mu \Delta P_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}+\beta^2\right) E_2 = & \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial u_2 \partial u_3} + \frac{j\omega\mu}{h_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_1} \\
& + \frac{\partial}{\partial u_3}[\Delta M_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \\
& + j\omega\mu \Delta P_2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}+\beta^2\right) H_1 = & \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 H_3}{\partial u_1 \partial u_3} + \frac{j\omega\varepsilon'}{h_2}\frac{\partial E_3}{\partial u_2} \\
& + \frac{\partial}{\partial u_3}[\Delta P_2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \\
& + j\omega\varepsilon' \Delta M_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}+\beta^2\right) H_2 = & \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{j\omega\varepsilon'}{h_1}\frac{\partial E_3}{\partial u_1} \\
& - \frac{\partial}{\partial u_3}[\Delta P_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \\
& + j\omega\varepsilon' \Delta M_2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

§ 1.2　几种常用的柱坐标系

现就几种常用的柱坐标系的结果归纳如下：

1.2.1　圆柱坐标

变量 $u_1 = \rho$，$u_2 = \phi$，$u_3 = z$ 与直角坐标的关系为

$$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi,\quad z = z,$$

Lamé 系数为

$$h_1 = 1,\quad h_2 = \rho,\quad h_3 = 1.$$

由式(1.20)—(1.25)，有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \beta^2 E_z$$

$$= -\frac{1}{j\omega\varepsilon'\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}[\rho\Delta P_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon'\rho}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z}[\Delta P_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon'}\left\{\beta^2\Delta P_z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\Delta P_z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\Delta M_\phi\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}[\Delta M_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+\beta^2 H_z$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}[\rho\Delta M_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$-\frac{1}{j\omega\mu\rho}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z}[\Delta M_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$-\frac{1}{j\omega\mu}\left\{\beta^2\Delta M_z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\Delta M_z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\right\}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\Delta P_\phi\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}[\Delta P_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.27}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)E_\rho = \frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho\partial z}-\frac{j\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}$$

$$+j\omega\mu\Delta P_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}[\Delta M_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)E_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi\partial z}+j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial\rho}$$

$$+j\omega\mu\Delta P_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}[\Delta M_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.29}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)H_\rho=\frac{\partial^2 H_z}{\partial\rho\partial z}+\frac{j\omega\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}$$
$$+j\omega\varepsilon'\Delta M_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}[\Delta P_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.30}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)H_\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\phi\partial z}-j\omega\varepsilon'\frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$
$$+j\omega\varepsilon'\Delta M_\phi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}[\Delta P_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')], \tag{1.31}$$

其中

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z'). \tag{1.32}$$

1.2.2 抛物柱体坐标

变量 $u_1=\xi$，$u_2=\eta$，$u_3=z$，曲面 $\xi=$ 常数，$\eta=$ 常数，为相交的抛物面柱体，如图 1.1 所示.

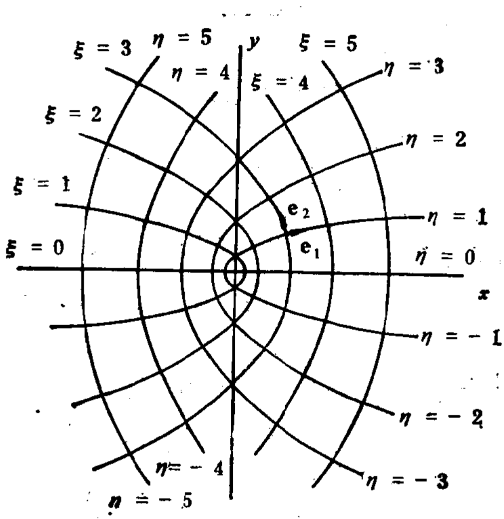

图 1.1 抛物柱体坐标