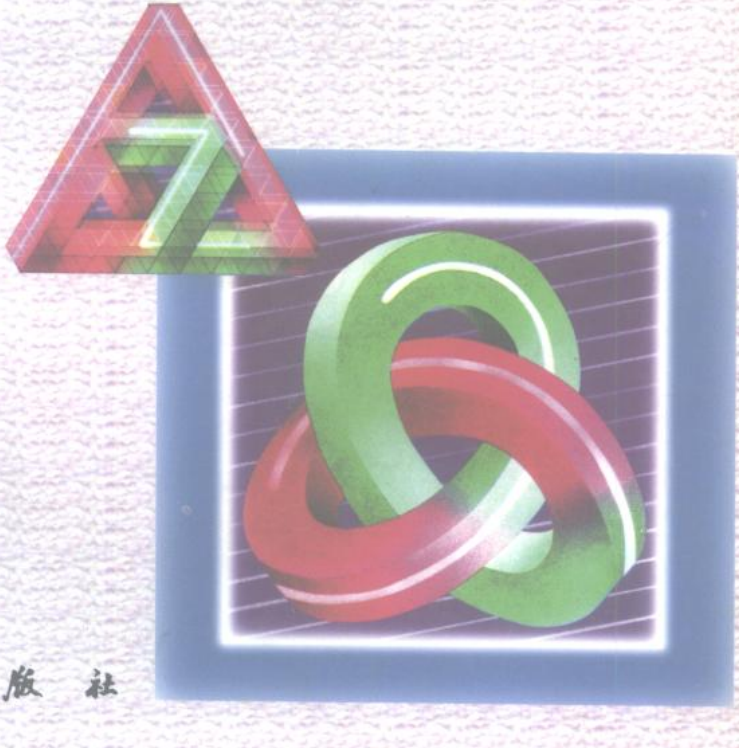
现代数学基础丛书

分析概率论

胡迪鹤 著



科学出版社

现代数学基础丛书

分 析 概 率 论

胡迪鹤 著

科 学 出 版 社
1997

EA01 / 11

内 容 简 介

本书在测度论与初等概率论的基础上，讲述了相互独立的随机变量序列的强、弱极限理论，部分章节后附有习题。

本书可供高等院校数学专业高年级学生、研究生、教师及科学工作者参考。

现代数学基础丛书

分 析 概 率 论

胡迪鹤 著

责任编辑 刘嘉善 吕 虹

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第二次印刷 印张：7 1/4

印数：15901－18920 字数：188 000

ISBN 7-03-005990-5/ O·925

定价： 14.00 元

序

极限理论是概率论的一个重要方面，而相互独立的随机变量序列的极限理论又是其它随机过程的极限理论的基础．本书的目的是论述相互独立随机变量序列的弱极限理论与强极限理论．全书由三大部分组成：第一部分包括本书第一、二章，叙述概率论的一些分析基础；第二部分包括本书第三、四、五、六章，讲述弱极限理论；第三部分，即本书第七章，讲述强极限理论．

本书是根据作者在北京大学数学系讲授“分析概率论”的讲义经过整理而写成的，内容上部分地吸取了许宝騄教授生前领导的“极限理论讨论班”的有关材料．书中大部分章节后面附有一定量的习题．

由于作者学识浅薄，本书的缺点错误定然不少，敬请不吝指教，以期改进．

胡　迪　鹤

1978 年于武汉大学

第二版序言

本版除了对第一版中的个别排印错误及个别文字作了修改以外，在第一版第一章§2后面加了一段，论述 Hausorff 测度及其简单性质，第七章§1后面加了一段，论述完全收敛性.

胡迪鹤

1997 年于武汉大学

目　录

第一章　R^N 上的 L-S 测度及Hausdorff测度 …… 1
§1　集合族及其上的测度 …… 1
§2　$L-S$ 测度及 Hausdorff 测度 …… 3
§3　弱收敛、全收敛及海来定理 …… 10
第二章　特征函数 …… 25
§1　定义及反演公式 …… 25
§2　简单性质及例子 …… 28
§3　连续性定理 …… 32
§4　不等式 …… 36
§5　可微性和泰勒展开 …… 46
§6　非负定函数,辛钦-波赫纳定理 …… 49
§7　多维特征函数 …… 54
习题 …… 61
第三章　大数定律与中心极限定理 …… 64
§1　相互独立相同分布的随机变量序列的大数定律 …… 64
§2　相互独立相同分布的随机变量序列的中心极限定理 …… 67
§3　相互独立的随机变量序列的大数定律 …… 68
§4　相互独立的随机变量序列的中心极限定理 …… 75
习题 …… 83
第四章　无穷可分分布律 …… 85
§1　问题的提法 …… 85
§2　二阶矩存在的情形，柯氏族 …… 89
§3　无穷可分分布律 …… 99
§4　普遍极限定理 …… 113
§5　应用 …… 134
第五章　L 族 …… 146
§1　预备知识 …… 146
§2　L 族 …… 158

第六章　稳定族……………………………………………………… 171
§1　问题的提法 ……………………………………………………… 171
§2　稳定族 …………………………………………………………… 172
第七章　强极限定理………………………………………………… 185
§1　三级数定理及强大数定律 ……………………………………… 185
§2　无穷乘积 ………………………………………………………… 199
§3　独立随机变量之和的收敛性与其对应的特征函数的收敛性之间的关系 ………………………………………………………… 202
§4　无条件 [a. e.] 收敛 …………………………………………… 209
习题 ………………………………………………………………… 214

第一章　R^N上的$L-S$测度及Hausdorff测度

本书是基于测度论之上而写的．但是为了陈述方便及本书的特殊需要，测度论中的某些有关概念及结果，特别是N维欧氏空间中的勒贝格-斯蒂尔吉斯测度及其弱收敛性，仍给以扼要的论证．§1，§2是测度论的一些基本概念，易于查找，故只简略叙述，而不加证明．§3是弱收敛性，给出了必要的证明．

§1　集合族及其上的测度

关于集合的运算，我们沿用习惯的术语与符号．例如，$\bigcup\limits_n A_n$表示集合族$\{A_n\}$的和(并)，$\bigcap\limits_n A_n$表示集合族$\{A_n\}$的积(交)，$A\backslash B$表示A与B之差，$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$表示$A$与$B$的对称差，$\overline{A}$表示$A$的补集，$\{A_n, \text{i. o.}\}=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，$\{A_n, \text{a.a.}\}=\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

定义 1.1　设Ω为一集合．由Ω的一族子集构成的集合族$\mathscr{P}$称为一个半环，如果：(1) $\varnothing\in\mathscr{P}$ ($\varnothing$表空集)；(2) $E_1, E_2\in\mathscr{P}\Longrightarrow E_1\cap E_2\in\mathscr{P}$；(3) $E, F\in\mathscr{P}$，$E\supset F\Longrightarrow E\backslash F=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$，$E_i\in\mathscr{P}$，$E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i, j=1, 2, \cdots, n$.

称Ω的子集族$\mathscr{R}$是一个环，如果$E, F\in\mathscr{R}\Longrightarrow E\cup F\in\mathscr{R}$，$E\backslash F\in\mathscr{R}$.

称Ω的子集族$\mathscr{F}$为一个域，如果$\mathscr{F}$是环而且$\Omega\in\mathscr{F}$.

称域$\mathscr{F}$是波莱尔(Borel, E.)域，如果$\mathscr{F}$中可数个集之和仍属于$\mathscr{F}$.

称Ω的子集族$\mathfrak{M}$是一个π系，如果$E_i\in\mathfrak{M}$ ($i=1, \cdots, n)\Longrightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i\in\mathfrak{M}$.

称Ω的子集族$\mathscr{D}$是一个D系，如果$\Omega\in\mathscr{D}$；而且$A,B\in\mathscr{D}$，$A\subset B\Longrightarrow B\backslash A\in\mathscr{D}$；$A_n\in\mathscr{D}$，$A_n\subset A_{n+1}\Longrightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{D}$.

若$\mathfrak{M}$是Ω的一个子集族，包含$\mathfrak{M}$的最小波莱尔域称为由$\mathfrak{M}$所产生的波莱尔域，记之为$\mathscr{B}(\mathfrak{M})$. 类似地，包含$\mathfrak{M}$的最小$D$系称之为由$\mathfrak{M}$所产生的$D$系，记之为$\mathscr{D}(\mathfrak{M})$.

可以证明:

1.若$\mathscr{D}$既是π系又是D系，则$\mathscr{D}$必为波莱尔域.

2.若$\mathfrak{M}$是π系，则$\mathscr{D}(\mathfrak{M})=\mathscr{B}(\mathfrak{M})$.

定义 1.2 设$\mathfrak{M}$是Ω的一族子集（不妨令$\varnothing\in\mathfrak{M}$）. 定义在$\mathfrak{M}$上的取广义实数值（即添加了$\infty$的实数集）的集函数$\mu$称为一个测度，如果$\mu$满足:

(μ_1)　μ在$\mathfrak{M}$上非负；

(μ_2)　μ在$\mathfrak{M}$上有完全可加性，即对任何$E_n\in\mathfrak{M}$，$E_m\cap E_n=\varnothing$　$(m\neq n)$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathfrak{M}$，都有$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$；

(μ_3)　$\mu(\varnothing)=0$.

特别地，若测度μ只取实值，则称μ为有限测度，若对任何$E\in\mathfrak{M}$，都有$E_n\in\mathfrak{M}$，$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，使$\mu(E_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots)$，则称μ是σ有限测度. 显然有限测度必为σ有限测度. 若$\mu(\Omega)=1$，则称μ为正则化测度或概率测度.

定理 1.1 若μ是环$\mathscr{R}$上的广义实值集函数，且满足定义 1.2 中的(μ_1)及(μ_3)及

(μ_2^*)　μ在$\mathscr{R}$上具有有限可加性且

$$E_n\in\mathscr{R},\ E_n\supset E_{n+1},\ \bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0,$$

则μ是$\mathscr{R}$上一个测度.

定理 1.2 若μ是半环$\mathscr{P}$上一个有限测度，则μ可以唯一地扩张到$\mathscr{B}(\mathscr{P})$上去，即存在唯一一个定义在$\mathscr{B}(\mathscr{P})$上的测度

μ^* 满足 $\mu(E)=\mu^*(E)$（当 $E\in\mathscr{P}$ 时）.

§2 $L-S$ 测度及 Hausdorff 测度

定义 2.1 设 Ω 为一集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个波莱尔域，则称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一个可测空间，$\mathscr{F}$ 中每一集合 A 都称为可测集．如在 $\mathscr{F}$ 上定义了一个测度 μ，则称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间．特别地，若 μ 是概率测度，即满足 $\mu(\Omega)=1$ 的测度，则称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是概率空间．概率测度常用 P 表示，所以今后总用 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 表示概率空间．

定义 2.2 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为二个可测空间．变换 X 把 Ω_1 的点映射到 Ω_2 中．如果对任何 $A\in\mathscr{F}_2$，都有 $X^{-1}(A)\equiv\{\omega_1|X(\omega_1)\in A,\ \omega_1\in\Omega_1\}\in\mathscr{F}_1$，则称 X 是 $(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)$ 可测的，或者说 X 可测 $(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)$．特别地，若 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 是 $(R^1,\mathscr{B}^1)$（其中 R^N 是 N 维欧氏空间，$\mathscr{B}^N$ 是全体开集所产生的波莱尔域），则称 $(\mathscr{F}_1,\mathscr{B}^1)$ 可测变换为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 上的可测函数．概率空间上的可测函数 X 称为随机变量，用 R. V. 表示．

若 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间，f 是其上的可测函数，$A\in\mathscr{F}$，f 在 A 上关于测度 μ 的积分记之为

$$\int_A f(\omega)d\mu(\omega)\ \text{或}\ \int_A f(\omega)\mu(d\omega)\ \text{或}\ \int_A fd\mu.$$

涉及随机变量时，总是某个概率空间上的随机变量，只不过有时为简便而把概率空间隐去不提而已．

定义 2.3 设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，函数 $F(x)\equiv P(X<x)$ 称为 X 的分布函数，用 d. f. 表示．若 X 至多只能取可数个值，则称 X 是离散的；若 $F(x)$ 绝对连续，即存在非负勒贝格可积函数 $p(t)$，使

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt,\quad x\in R^1,$$

则称 X 是连续的．这时，称 $p(t)$ 为 X（或者 $F(x)$）的密度函数．显然，$p(t)$ 差一勒贝格 (Lebesgue, H. L.) 零测集而唯一确定．“X 具有分布函数 $F(x)$”有时也称作“X 服从 $F(x)$ 分布”．

显然分布函数 $F(x)$ 具有下述性质:

(c_1) $F(x)$ 是实值函数;

(c_2) $F(x)$ 单调非降;

(c_3) $F(x)$ 左连续;

(c_4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$;

(c_5) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$.

易证: 分布函数在 R^1 上最多只能有可数个间断点,而且都是第一类的. 分布函数由其连续点上的函数值所唯一决定.

定义 2.4 设 $X_1, \cdots, X_N$ 都是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量,则称 $X=(X_1, \cdots, X_N)$ 为N维随机向量,或N维随机变量. 函数 $F(x_1, \cdots, x_N)\equiv P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{N}\{X_i<x_i\}\right)$ 称为 X 的联合分布函数,简称分布函数. 如果 $X=(X_1, \cdots, X_N)$ 最多只能取 R^N 中可数个点, 则说 $X=(X_1, \cdots, X_N)$ 是离散的; 如果 $F(x_1, \cdots, x_N)$ 是绝对连续的, 即存在非负勒贝格可积函数 $p(t_1, \cdots, t_N)$, 使

$$F(x_1, \cdots, x_N)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_N} p(t_1, \cdots, t_N)dt_1\cdots dt_N,$$

则说 $(X_1, \cdots, X_N)$ 是连续的, $p(t_1, \cdots, t_N)$ 称为 $(X_1, \cdots, X_N)$ (或 $F(x_1, \cdots, x_N)$) 的联合密度函数,简称密度函数. $p(t_1, \cdots, t_N)$ 差一个勒贝格零测集而唯一决定.

显然, $X=(X_1, \cdots, X_N)$ 的联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_N)$ 也满足:

(c_1) $F(x_1, \cdots, x_N)$ 是实值函数;

(c_2) 对任何N维非空(半开闭)区间

$$\begin{aligned} I&=[a, b)=[a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N)\\ &=\{x=(x_1, \cdots, x_N)\mid a_i\leqslant x_i<b_i,\ i=1, \cdots, N\}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} F(I)\equiv{}& F(b_1, \cdots, b_N)\\ &-[F(a_1, b_2, \cdots, b_N)+\cdots+F(b_1, \cdots, b_{N-1}, a_N)] \end{aligned}$$

$$+ [F(a_1, a_2, b_3, \cdots, b_N) + \cdots + F(b_1, \cdots, b_{N-2}, a_{N-1}, a_N)]$$
$$- \cdots + (-1)^N F(a_1, \cdots, a_N) \geq 0;$$

(c_3) $F(x_1, \cdots, x_N)$ 对每一个自变量皆左连续;

(c_4) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \cdots, x_N) = 0$, $i = 1, \cdots, N$;

(c_5) $\lim\limits_{\substack{x_i \to \infty \\ i=1,\cdots,N}} F(x_1, \cdots, x_N) = 1$.

定义 2.5 设 $(X_1, \cdots, X_N)$ 是 N 维随机向量,从其中任取 i 个 $(i \leqslant N)$ 分量所构成的 i 维随机向量 $(X_{j_1}, \cdots, X_{j_l})$ 的联合分布函数相对于 $(X_1, \cdots, X_N)$ 的联合分布函数来说,就称为边缘分布函数.

显然边缘分布函数由联合分布函数唯一决定,但逆命题一般不成立. 反例如下:

设 (X_1, X_2) 服从二维正态分布函数,即它有联合密度函数:

$p(x, y)$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}\,\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

其中 $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ 为常数, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $r^2 \leqslant 1$.

可以算出 X_i 的密度函数为

$$p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_i}{\sigma_i}\right)^2}$$

与 r 无关. 这说明了 X_1, X_2 的分布函数确定以后, (X_1, X_2) 的联合分布函数还不确定(r 可以取不同的常数).

什么情况下边缘分布函数唯一确定了联合分布函数呢? 这就需要引进随机变量的独立性的概念. 而本书的中心论题, 正是独立随机变量和的极限理论.

定义 2.6 称概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量 $X_1, \cdots, X_N$ 是相互独立的,简称独立,如果

$$P(X_1 < x_1, \cdots, X_N < x_N)$$
$$= P(X_1 < x_1) \cdots P(X_N < x_N),\ x_i \in R^1,\ i = 1, 2, \cdots N,$$

即联合分布函数等于边缘分布函数之积.

由此看出：若随机变量 $X_1, \cdots, X_N$ 相互独立，则其联合分布函数与边缘分布函数相互唯一决定.

下面我们将要由分布函数 $F(x_1, \cdots, x_N)$ 产生 $(R^N, \mathscr{B}^N)$ 上的勒贝格-斯蒂尔吉斯(Lebesgue－Stieltjes)测度(L-S 测度). 令

$$I = [a, b) = [a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N)$$
$$= \{x = (x_1, \cdots, x_N) | a_i \leqslant x_i < b_i, \ i = 1, \cdots, N\}$$

为 R^N 中的(半开闭)区间，(本书所言之区间，意即此种半开闭区间)仿之可以定义 R^N 中之闭区间 $I^c = [a, b] = [a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N]$，开区间 $I^0 = (a, b) = (a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N)$. 再令 $\mathscr{I}_N = \{R^N$ 中一切区间$\}$，$\mathscr{I}_N^c = \{R^N$ 中一切闭区间$\}$，$\mathscr{I}_N^0 = \{R^N$ 中一切开区间$\}$. 只要有一个 $b_i < a_i$，则 $[a, b) = [a, b] = (a, b) = \varnothing$，所以 $\varnothing \in \mathscr{I}_N$, $\mathscr{I}_N^c$, $\mathscr{I}_N^0$. 显然 $\mathscr{I}_N$ 是半环，$\mathscr{B}^N = \mathscr{B}(\mathscr{I}_N) = \mathscr{B}(\mathscr{I}_N^c) = \mathscr{B}(\mathscr{I}_N^0) = \mathscr{B}(R^N$中一切闭集$) = \mathscr{B}(R^N$ 中一切开集$)$.

设 $x = (x_1, \cdots, x_N)$, $y = (y_1, \cdots, y_N) \in R^N$, $x < y$ (或 $x \leqslant y$) 意即 $x_i < y_i$ (或 $x_i \leqslant y_i$) 对一切 $1 \leqslant i \leqslant N$ 成立. R^N 上的点函数 $F(x_1, \cdots, x_N)$ 有时记为 $F(x)$.

定义 2.7 设 $F(x) = F(x_1, \cdots, x_N)$ 是定义在 R^N 上的点函数. 如果它满足定义 2.4 后面的 (c_1)—(c_3)，则说它是典范函数. 若它满足 (c_1)—(c_4) 及

$$(c_5') \qquad \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i = 1, \cdots, N}} F(x_1, \cdots, x_N) \leqslant 1,$$

则称之为准分布函数. 若它满足 (c_1)—(c_5)，则称之为分布函数.

定理 2.1 设 $F(x) = F(x_1, \cdots, x_N)$ 是典范函数，任取 $I \in \mathscr{I}_N$，定义

$$F(I) = 0 \quad (\text{若 } I = \varnothing),$$

$$\begin{aligned} F(I) = {} & F(b_1, \cdots, b_N) \\ & - [F(a_1, b_2, \cdots, b_N) + \cdots + F(b_1, \cdots, b_{N-1}, a_N)] \\ & + [F(a_1, a_2, b_3, \cdots, b_N) + \cdots + F(b_1, \cdots, b_{N-2}, a_{N-1}, a_N)] \end{aligned}$$

$-\cdots+(-1)^N F(a_1,\cdots,a_N)$

(若 $I=[a,b)=[a_1,b_1;\cdots;a_N,b_N)\neq\varnothing$),

则 F 是半环 $\mathscr{I}_N$ 上的一个有限测度．用定理 1.2，它可以唯一地扩张到 $\mathscr{B}^N=\mathscr{B}(\mathscr{I}_N)$ 上去，所得到的测度仍用 F 表之．此测度称为由典范函数 $F(x)$ 所产生的勒贝格-斯蒂尔吉斯测度（L-S 测度）．

特别地，若 $F(x)$ 是准分布函数，则它所产生的 $\mathscr{B}^N$ 上的 L-S 测度满足 $F(R^N)\leqslant 1$．更特别地，若 $F(x)$ 是分布函数，则它所产生的 L-S 测度是概率测度．

注 若 $F(x)=F(x_1,\cdots,x_N)$ 只满足 (c_1) 和 (c_2)，则在定理 2.1 中所定义的集函数 F 在 $\mathscr{I}_N$ 上未必有完全可加性． 例如，$F(x)=(x)$（(x) 表示比 x 大的最小整数），则 $F(x)$ 满足 (c_1) 和 (c_2)，但不满足 (c_3)．取 $I=[1,2)$，$I_n=\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i},\ \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\right)$，则 $\{I_n\}$ 两两不交，$I=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，但 $F(I)=1$，$F(I_n)=0$ $(n\geqslant 1)$，所以 F 在 $\mathscr{I}_N$ 上不满足完全可加性．

虽然满足 (c_1)，(c_2) 的点函数 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 按定理 2.1 的方式定义的 $\mathscr{I}_N$ 上的集函数 F 未必是测度，但我们可以找出与此集函数对应的测度，而且这种测度在某种限制下还是唯一的．这样，我们从只满足 (c_1)，(c_2) 的点函数出发，仍可导出 $\mathscr{B}^N$ 上的测度．

定理 2.2 设 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 定义在 R^N 的全部有理点(即每个坐标都是有理数)上，而且满足 (c_1)，(c_2)，造集函数 F 如下：对有理区间 $[a,b)=[a_1,b_1;\cdots;a_N,b_N)$（即此区间的每个顶点皆为有理点，也就是每个 a_j，b_i 皆为有理数），定义 $F(I)$ 如定理 2.1，则在 $\mathscr{B}^N$ 上存在唯一一个测度 F^*，使得对任意有理区间 I，只要 $I^c\subset J^0$，就有 $F(I)\leqslant F^*(J)$；只要 $I^0\supset J^c$，就有 $F(I)\geqslant F^*(J)$，其中 $J\in\mathscr{B}^N$，A^0，A^c 分别表示集 A 的内部及闭包．

实际上，本定理只要求 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 定义在某点集 $A=\{(x_1,\cdots,x_N)\,|\,x_i\in D,\ i=1,\cdots,N\}$ 上，其中 D 在 R^1 中处处稠密．

测度 F^* 称为 $F(x_1,\cdots,x_N)$（或集函数 F）的伴随测度．若

$F(x_1,\cdots,x_N)$ 是定义在 R^N 上的典范函数，则集函数 $F(I)$ ($I\in\mathscr{I}_N$) 是 $\mathscr{I}_N$ 上的测度，伴随测度就是 F 在 $\mathscr{B}^N$ 上的扩张，即 F^* 就是由 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 所产生的 L-S 测度.

易证：$F(x_1,\cdots,x_N)$ 的伴随测度 F^* 具有下列性质：

$$F^*([a,b])=\lim_{\substack{a'\uparrow a\\ b'\downarrow b}}F([a',b']);$$

$$F^*((a,b))=\lim_{\substack{a'\downarrow a\\ b'\uparrow b}}F([a',b']).$$

定理 2.1 说明 R^N 上的任一典范函数 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 均可产生一个 $\mathscr{B}^N$ 上的 L-S 测度 F. 现在反过来问：任给 $\mathscr{B}^N$ 上一个测度 F，是否存在一个典范函数 $F(x_1,\cdots,x_N)$，其所产生的 L-S 测度就是 F？再问：这样的函数是否唯一？如果一般说不唯一，那么在什么条件下唯一？

（甲） 如果 $\mathscr{B}^N$ 上的测度 F 满足 $F(I)<\infty$ ($I\in\mathscr{I}_N$)，则存在 R^N 上的典范函数 $F(x_1,\cdots,x_N)$，其伴随测度（在此场合，它就是此典范函数所产生的 L-S 测度）就是 F，而且这样的典范函数有无穷多个.

例如，$\mathscr{B}^1$ 上给定一个测度 F，它满足 $F(I)<\infty$ ($I\in\mathscr{I}_1$)，造点函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{[0,x)}dF, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ \displaystyle-\int_{[x,0)}dF, & x<0,\end{cases}$$

则 $F(x)$ 是典范函数，而且 $F(x)$ 的伴随测度（L-S 测度）就是 F，不仅如此，$F(x)+c$（c 为任一实数）也满足上述一切要求.

由此看出：R^N 上的典范函数与 $\mathscr{B}^N$ 上的满足 $F(I)<\infty$ ($I\in\mathscr{I}_N$) 的测度之间存在一个多对一的对应关系.

（乙） 若 $\mathscr{B}^N$ 上的测度 F 满足

（A） $F(\{(x_1,\cdots,x_N)\,|\,x_i<a_i,\ i=1,\cdots,N\})<\infty$，

其中 a_i 是实数，则恰有唯一一个满足 (c_1)—(c_4) 的点函数

$F(x_1, \cdots, x_N)$，它的伴随测度（L-S 测度）就是 F。

事实上，取 $F(a_1, \cdots, a_N) = F(\{(x_1, \cdots, x_N) | x_i < a_i, i = 1, \cdots, N\})$ 即为所求。若 $F_i(x_1, \cdots, x_N)$ $(i = 1, 2)$ 都满足 (c_1)—(c_4)，且它们的伴随测度都是 F，则

$$F_1(b_1, \cdots, b_N) = \lim_{a_1 \to -\infty} \cdots \lim_{a_N \to -\infty} F([a, b)) = F_2(b_1, \cdots, b_N).$$

所以，R^N 上满足 (c_1)—(c_4) 的点函数与 $\mathscr{B}^N$ 上满足(A)的测度之间存在一一对应的关系。正因为如此，我们既用 F 表示满足 (c_1)—(c_4) 的点函数，又用 F 表示满足 (A) 的测度。特别地，R^N 上的分布函数与 $\mathscr{B}^N$ 上的概率测度存在一一对应关系。

为方便计，我们有时也说：典范函数 $F(x)$ 在某一点 x_0 的测度，那意思就是 $F(x)$ 的伴随测度在 $\{x_0\}$ 的测度。

定义 2.8 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 是 R^N 上的准分布函数，F_1，F_2 分别为其伴随测度，则

$$F(A) = \int_{y+z \in A} dF_1(y) dF_2(z) \quad (A \in \mathscr{B}^N)$$

是 $\mathscr{B}^N$ 上的测度，且 $F(R^N) \leqslant 1$，从而

$$F(x) = \int_{y+z<x} dF_1(y) dF_2(z)$$

是 R^N 上的准分布函数。我们称 F 是 F_1 与 F_2 的卷积测度，$F(x)$ 称为 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 的卷积函数，F（或 $F(x)$）简称为 F_1 和 F_2（或 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$）的卷积，记作

$$F = F_1 * F_2 \quad (\text{或 } F(x) = (F_1 * F_2)(x)).$$

由卷积的定义出发，易证

$$(F_1 * F_2)(x) = \int_{R^N} F_1(x-y) dF_2(y) = \int_{R^N} F_2(x-y) dF_1(y).$$

由于准分布函数的卷积还是准分布函数，所以可以定义 M 个准分布函数的卷积。易证：N 个相互独立的随机变量的和的分布函数是这 N 个随机变量的分布函数的卷积。

定义 2.9 设 X，Y 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量。