

● 非线性科学丛书 ●

随机力与非线性系统

胡 岗 著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

随机力与非线性系统

胡 岗 著

郑伟谋 赵凯华 审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书以非平衡系统动力学中的朗之万方程和福克-普朗克方程为工具,分析在随机力作用下非线性系统的行为,研究了系统的定态解、时间演化、色噪对非线性系统的影响、噪声诱导相变及随机共振。全书内容丰富、论及的题材较宽。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中有关研究人员参考。

本书由郑伟谋、赵凯华审阅。

非线性科学丛书

随机力与非线性系统

胡 岗 著

郑伟谋 赵凯华 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路 393 号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 224,000

1994 年 10 月第 1 版 1995 年 9 月第 2 次印刷

印数 3301—6200 本

ISBN 7-5428-0893-1/O·53 定价:(精装本)14.10 元

Advanced Series in Nonlinear Science
Stochastic forces and nonlinear systems

Hu Gang

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1994

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作岭
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的高新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

Abstract

Nonlinear systems with bistable potentials subject to stochastic forces are investigated. The topics of stationary solution; initial value problem; relaxation from unstable points; escape from attracting basins; colored noise problem; noise-induced phase transition; and stochastic resonance are considered. Readship includes graduate students and scientists involved in nature science and engineering activities.

目 录

非线性科学丛书出版说明

第1章 引论	1
§1 物理学研究的三个层次	2
§2 随机事件和概率	6
§3 朗之万方程	17
§4 福克-普朗克方程	25
第2章 FPE 的定态解和广义势函数	35
§5 FPE 的渐近解	35
§6 FPE 的定态解——精确可解模型	38
§7 弱噪声展开, 广义势函数	43
§8 FPE 定态解的幂级数展开	55
第3章 FPE 的时间演化, 本征值问题	65
§9 昂斯坦-乌伦贝克过程	65
§10 Ω 展开, 高斯近似	68
§11 FPE 的本征值问题, 精确解模型	74
*§12 求解非定态问题的微扰方法	85
第4章 不稳定态的演化, 淬火问题	95
§13 淬火问题	95
§14 不稳定态的演化, 标度理论	100
§15 格林函数的 Ω 展开	107
§16 淬火过程中的维数约化	119
第5章 稳态的演化, 逃逸和跃迁	125
§17 在随机力作用下稳态的演化	126
§18 逃逸问题	131

§ 19	一维双势井之间的概率跃迁	140
§ 20	多维多稳态之间的概率跃迁	144
第 6 章	噪声诱导相变	150
§ 21	随机力对非平衡相变的影响	150
§ 22	噪声诱导相变	160
§ 23	双奇异随机系统的相变问题	172
第 7 章	色噪声对非线性系统的作用	184
§ 24	色噪声的相关时间	184
*§ 25	一维马尔可夫近似, 有效 FPE	189
§ 26	一维色噪声问题的二维描述	199
§ 27	实际系统中的色噪声	209
第 8 章	随机共振	218
§ 28	信号、噪声与非线性系统	220
§ 29	随机共振理论	222
§ 30	随机共振的实验研究	240
§ 31	各类随机共振系统	253
科学家中外译名对照表		255
参考文献		256

Contents

1. Introduction	1
§ 1 Three levels in physics in describing macroscopic systems	2
§ 2 Random events and probability.....	6
§ 3 Langevin equations.....	17
§ 4 Fokker-Planck equations.....	25
2. Stationary solution of FPE and generalized potential function	35
§ 5 Asymptotic solution of FPE.....	35
§ 6 Stationary solution of FPE—exactly solvable models.....	38
§ 7 Weak noise expansion, generalized potential function	43
§ 8 Power expansion of the stationary solution of FPE.....	55
3. Time evolution of FPE, eigenvalue problem...	65
§ 9 Ornstein-Uhlenbeck process	65
§ 10 Ω expansion, Gaussian approximation.....	68
§ 11 Eigenvalue problem of FPE, exactly solvable models.....	74
*§ 12 Perturbation approach applied to the initial value problem	85
4. Evolution from an unstable state, quenching problem.....	95
§ 13 Quenching problem	95

§ 14	Evolution from an unstable state, scaling theory...	100
§ 15	Ω expansion of the Green function.....	107
§ 16	Reduction of dimensions in quenching problem...	119
5.	Evolution from a stable state, escapes and transitions.....	126
§ 17	Stochastic process from a stable state.....	126
§ 18	Escape problem.....	131
§ 19	probability transitions between two potential wells in one-dimensional systems.....	140
§ 20	Probability transitions between multiple wells in multi-dimensional systems.....	144
6.	Noise induced phase transitions.....	150
§ 21	Influence of stochastic forces on nonequilibrium phase transitions	150
§ 22	Noise induced phase transitions.....	160
§ 23	Phase transitions in stochastic systems with double singularities	172
7.	Coloured noise and nonlinear systems.....	184
§ 24	Correlation time of coloured noise.....	184
§ 25	One-dimensional Markov approximation, effective FPE	189
§ 26	Two-dimensional description of one-dimensional coloured noise problem.....	199
§ 27	Coloured noise in practical systems.....	209
8.	Stochastic resonance	219
§ 28	Signal noise and nonlinear systems.....	220
§ 29	Theory of stochastic resonance.....	222
§ 30	Experimental study of stochastic resonance.....	246
§ 31	Various stochastic resonance systems.....	253

第1章

引 论

十九世纪下半叶, 统计物理作为一门新兴的分支学科进入了物理学. 玻尔兹曼著名的等概率原理和玻尔兹曼方程^[1]为统计物理的创立奠定了基础. 玻尔兹曼、麦克斯韦^[2]等人将概率的语言引入被决定性理论统治的物理学, 是物理学发展史上的一场革命. 二十世纪初, 吉卜斯系综理论的建立, 标志着平衡态统计物理理论已趋成熟^[3].

整个二十世纪, 量子力学、相对论和统计物理的建立和发展, 代表了物理学在探索基本粒子的微观世界、宇宙天体的宏观世界和耗散不可逆的复杂性这三个最主要的前沿. 特别是统计物理的研究对象覆盖了各种不同的空间和时间尺度的过程, 与人们的日常生活紧密联系, 这一分支的前沿发展正引起广泛的学者的密切关注和强烈兴趣.

爱因斯坦对布朗粒子运动的开创性研究^{[4], [5]}和著名的朗之万(P. Langevin)方程的建立^[6], 开始了统计物理探索非平衡系统的动力学行为的重要阶段. 从此, 把随机性作为一个专门的对象, 研究随机力的性质以及它对各类宏观系统的影响, 成为统计物理的一大分支.

本世纪下半叶, 非线性科学的蓬勃发展是整个自然科学领域的一件大事. 这一发展使统计物理大大开拓了自己的领域, 得到了新的强劲的发展动力. 70年代起, 研究随机力对非线性系统的作用也成了非线性科学发展和现代统计物理理论的一个重要前沿.

§1 物理学研究的三个层次

§1.1 微观层次——牛顿方程和刘维方程

我们从一个具有 N 个自由度的经典哈密顿系统开始. 给定一哈密顿量

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N) \quad (1.1)$$

(以后我们简单地用矢量 $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ 代表共轭的 N 个广义坐标和动量), 我们可以得到 $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ 运动的正则方程^{[7], [8]}

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.2)$$

其中 $i=1, 2, \dots, N$.

正则方程(1.2)可以用另一等效的刘维方程来代替. 我们考虑 M 个具有完全相同哈密顿(1.1)的系统(这 M 个全同系统的集合叫作系综). 以 N 个 q_i 坐标和 N 个 p_i 坐标构成 $2N$ 维的笛卡尔坐标(Γ 空间)^{[9]~[13]}. 对应每个系统的一组 $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ 坐标, 在 Γ 空间中有一个代表点; 而对应一个系综的 M 个系统, 在 Γ 空间有 M 个代表点. 令 $D(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 为系综在 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 处代表点的密度, 那么

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{D(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{M} \quad (1.3)$$

显然是系综中一个代表点落到 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 处的概率密度. 在统计物理中人们已经熟知, 描述系统运动轨道的正则方程(1.2)可以用描述概率密度(1.3)的刘维方程来等效地表示:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial t} &= \{H, \rho\}, \\ \{H, \rho\} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

原则上只要我们给出 $2N$ 个初始坐标 $q_i(0), p_i(0), i=1, 2, \dots, N$; 或给出概率密度函数的初始分布 $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t=0)$, 正则方程

(1.2)就唯一地决定了 Γ 空间的一条轨道(或刘维方程(1.4)唯一地决定了概率密度函数的演化过程 $\rho(q, p, t)$)。如果我们能解出这条轨道(或解出刘维方程),那么系统的一切性质都一目了然了。所以,用正则方程(1.2)或刘维方程(1.4)来描述系统的层次被称作微观层次。尽管在以上讨论中我们以经典的力学系统为例,但这类在微观层次描述系统的图象在物理系统中是普遍存在的:无论力学系统是经典的还是量子的,是牛顿的还是爱因斯坦的;也无论系统是力学的还是电磁学或其他类型的。

§ 1.2 宏观层次——确定性方程

微观层次描述的优点,是这种描述给出了系统演化的详细信息。然而,在许多场合,这种描述是不现实的。人们已经知道,即使看来十分简单的二维哈密顿系统,只要 H 中包含 q_i, p_i 二次以上的项,要预言正则方程(1.2)所决定的轨道的长时间行为将会十分困难,很多情况下系统的运动已经是混沌的^{[14]~[16]}。随着 N 的增加,求解(1.2)的困难将迅速增加。所以,对于我们感兴趣的宏观系统($N \gg 1$),求解(1.2)的轨道就成为根本不可能。考虑室内 N 个相互作用的分子($N \approx 10^{28}$)的运动。首先我们不可能全部掌握 $t=0$ 时 N 个分子中每个所处的位置和速度;假设知道了这些初始条件,也不可能严格解出这么多的联立方程;即使有朝一日我们会做以上两件事(当然这是不可能的),所得到的轨道对外界微扰也极为敏感,一个细微的外界环境变化会根本地改变轨道的运动形式,而对外界的微小影响我们是永远也无法控制的。幸好在实际问题中我们根本不感兴趣于每个分子在每一时刻的状况。我们经常只感兴趣于这些众多分子的集体行为所表现出来的宏观性质,如某处的温度、压强、分子密度分布等。这就提出了一个任务:根据问题的性质和我们感兴趣的物理内容,将微观层次的描述转化为其他可以进行数学处理的问题来处理。

实际问题中我们感兴趣或可以测量的宏观物理量,是对各种

可能的微观轨道的统计平均的结果. 在进行这种统计处理时, 刘维方程(1.4)及相应的系综分布函数 $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 可以作为比正则方程更方便的出发点. 假设实际问题涉及以下宏观物理量 x_i :

$$x_i = \int x_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{q} d\mathbf{p}, \text{ 其中 } i=1, 2, \dots, n; n \ll N. \quad (1.5)$$

又假设这些宏观量遵循以下封闭的宏观演化方程

$$\dot{x}_i = f_i(x), \text{ 其中 } i=1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

(显然, 我们一般不可能从微观方程(1.2)或(1.4)严格得到方程(1.6), 由于 $n \ll N$, x_i 的方程通常不可能封闭.) 适当地选择宏观变量 x_i 和宏观变量数 n , 我们可以把引起宏观变量演化的原因唯象地分成两个部分: 一部分为持续对宏观变量的动力学过程起作用的因素, 由方程(1.6)表示; 另一部分为除(1.6)以外由(1.4)必然导出的其他部分. 这后一部分的性质极为复杂, 它通常反映了微观粒子运动对宏观变量的影响, 这些影响往往各自独立, 互不关联. (以下我们简单地把这部分影响叫作微观作用.) 在 N 非常大时, 后一部分微观作用与前一部分宏观动力因素相比要小得多. 忽略微观因素的干扰, 方程(1.6)常常是描述宏观变量的很好的近似. 所以, 方程(1.6)被称作宏观方程(又叫作热力学方程)^{[20], [21]}. 用宏观方程来研究宏观变量演化的方法, 也叫作宏观描述(热力学描述). 在本书中, 我们将(1.6)称作确定性方程. 因为它确定了宏观量的初值与其演化轨道之间的一一对应.

§ 1.3 随机层次——随机力

要想精确求出在宏观方程(1.6)中被略去的部分是不可能的, 因为这相当于精确求解方程(1.2)或(1.4). 但对这一微观作用的性质作一些粗略分析则是可能的. 首先, 这一作用与宏观变量相比是很小的; 其次, 既然它反映了微观世界的运动对宏观变量的影响, 它变化的时间尺度与宏观运动相比要小得多; 从而这一影响