线性代数学习指导

王朝瑞　编著

北京理工大学出版社

线性代数学习指导

北京理工

社

线性代数学习指导

王朝瑞　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是为高等工科院校学生学习线性代数课程编写的学习指导用书。

本书在内容安排上，既满足工科本科生的学习要求，又照顾到报考研究生读者的需要。

本书对线性代数中的重点内容进行了详细的阐述，特别着重方法的介绍。通过大量的例题，使读者掌握解题思路、方法和技巧。

本书除了可以作为高等院校线性代数课程的教材外，还可以作为高等院校师生的课外读物或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/王朝瑞编著. —北京：北京理工大学出版社，1999.9
ISBN 7-81045-616-4

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 46851 号

责任印制：李绍英　　责任校对：李　军

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区白石桥路 7 号)
邮政编码 100081　电话 (010)68912824
各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷
*
787 毫米×1092 毫米　16 开本　14.75 印张　353 千字
1999 年 9 月第 1 版　　1999 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—4000 册　　定价：20.00 元

序

本书是为高等工科院校本科学生学习线性代数课程而编写的学习指导用书。

本书的内容是根据原国家教育委员会高等教育司 1995 年修订的高等学校“工科本科基础课程教学基本要求”安排的。

线性代数是工科院校的一门重要基础课程，因其本身具有较强的逻辑性和抽象性，加之线性代数中的证明题较多，因此对初学者来说感到有一定的难度，不易掌握。

为使读者能够较好的理解和掌握线性代数的基本理论和基本方法，积作者 40 年的教学经验，编写这本学习指导书。其目的在于减少初学者学习中的困难，以便更好地掌握线性代数的基本内容，提高应用问题和解决问题的能力。为此目的，本书在编写上突出以下特点：

1. 力求叙述简明，思路清晰易懂，突出重点；

2. 不刻意追求理论的推导，而注重方法的介绍；

3. 每一章的重点内容均安排有较多的例题。这些例题有助于帮助读者加深对概念和定理的理解和运用，开拓思路，掌握计算和证明问题的方法和技巧；提高综合应用和逻辑推理的能力。

全书共六章：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的对角形，二次型。每章均附有一定数量的习题，用以加深对所学知识的理解和掌握。书后附有解答，不仅对计算题给出答案，而且对证明题也给出证明，其目的是使读者可以检验自己证明正确与否。

王朝瑞

1999.6 于北京理工大学

目　　录

第一章　行 列 式

内容：二阶和三阶行列式，n 阶行列式，行列式的性质，行列式按行(列)展开，行列式的计算，克莱姆法则。

重点：行列式的计算

§1.1　二阶和三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

在线性代数中常写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1 - 1}$$

它的解可以用消元法求出：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.1 - 2}$$

我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1 - 3}$$

表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1 - 4}$$

符号(1.1 - 3)称为**二阶行列式**。它有两行(横写的)和两列(竖写的)。数 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 称为行列式的**元素**，其中 i 表示a_{ij}所在的行数，j 表示a_{ij}所在的列数。

注　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示一个数，这个数称为行列式的**值**。它是主对角线(左上角到右下角的对角线)上元素乘积与次对角线上元素乘积的代数和(主对角线元素乘积取正号，次对角线元素乘积取负号)。

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \\ \text{次对角线} & & \text{主对角线} \end{array}$$

利用二阶行列式，方程组(1.1 - 1)的解可以写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例如方程组

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$$

的解是

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{10} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

1.1.2 三阶行列式

考察方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1-5}$$

的解时，可以引入三阶行列式的概念。引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，它的值是

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.1-6}$$

式(1.1-6)称为三阶行列式的**展开式**。

三阶行列式可以下面的图示来计算

$$\begin{array}{c} + \qquad\qquad\qquad - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

例如

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -10 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot(-10)$$

$$-3\cdot(-2)\cdot(-10)-5\cdot4\cdot(-2)-2\cdot0\cdot2$$
$$=8-100-60+40=-112$$

1.1.3 二阶和三阶行列式的特征

从二阶和三阶行列式的展开式中,不难发现它们有如下的特征:

(1)二阶行列式由 $2^2=4$ 个元素组成二行和二列;三阶行列式由 $3^2=9$ 个元素组成三行和三列。

(2)二阶行列式的展开式中,每一项由两个元素构成,它们取自不同的行和不同的列;三阶行列式的展开式中,每一项由 3 个元素构成,它们取自不同的行和不同的列。

(3)二阶行列式的展开式中有 $2!=2$ 项,一项取正号,一项取负号;三阶行列式的展开式中有 $3!=6$ 项,三项取正号,三项取负号。

下面我们来分析一下,行列式的展开式中各项的符号是怎样确定的。

考察三阶行列式,我们把三阶行列式展开式中每一项的三个元素它们的第 1 个下标(即行下标)均按自然数顺序排列,即

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{11}a_{23}a_{32},\ a_{12}a_{21}a_{33}$$

那么上面的六项可以写成

$$a_{1_{j_1}},\ a_{2_{j_2}},\ a_{3_{j_3}}$$

其中 j_1,j_2,j_3 是 1,2,3 的六个排列之一。

取正号的三项,它们第 2 个下标(即列下标)分别是排列

$$123,231,312$$

其反序数[①] 均为偶数:

$$\tau(123)=0,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2$$

取负号的三项,它们的第 2 个下标的反序数均为奇数:

$$\tau(321)=3,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1$$

这样三阶行列式的展开式就可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1_{j_1}}a_{2_{j_2}}a_{3_{j_3}}$$

其中是对 1,2,3 所有可能的排列求和。

对二阶行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1_{j_1}}a_{2_{j_2}}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中是对 1,2 两个数的排列求知。

§1.2 n 阶行列式

在二阶和三阶行列式的基础上,我们给出 n 阶行列式的概念。

---

① 在一个排列中,如果一个较大的数排在较小数之前,则称这两个数构成一个**反序**,用符号 $\tau(j_1,j_2,j_3)$ 记排列 j_1,j_2,j_3 的反序数。

定义 1.2.1 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**。

n 阶行列式是一个数。这个数是 $n!$ 项的代数和。每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数是偶数,则该项取正号,如果反序数是奇数,则该项取负号,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.2-1)$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 $1,2\cdots,n$ 所有可能排列求和,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数。

式(1.2-1)称为 n 阶行列式的**展开式**。

注 (1) 对 4 阶以上的行列式没有类似于二阶和三阶行列式的那种图示表示的计算方法。

(2) 在行列式的定义中,我们约定展开式中每一项的 n 个元素,其行下标按自然数顺序排列。如果不做这种约定,而是将 n 个元素任意意排列,即写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1,i_2\cdots,i_n$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列。在这种情况下,该项的符号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

当我们把列的下标按自然数的顺序排列时,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \qquad (1.2-2)$$

§1.3 利用行列式的定义计算行列式的例

例 1.3.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[解] 这是一个 4 阶行列式共 $4!=24$ 项。其中每一项是取自不同行和不同列的 4 个元素的乘积,考察一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

显然,只有在 $j_1=4, j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 时,即 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$不为零,而其余的项均为零。这一项列下标的反序数 $\tau(4321)=6$ 为偶数,故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

例 1.3.2 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[解] 展开式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为行列式中第 n 行除a_{nn}外全为零,故只能 $j_n=n$,再考察第 $n-1$ 行。由于 j_{n-1}不能取 n,所以 j_{n-1}只能取 $n-1$,即 $j_{n-1}=n-1$。同理可知,$j_{n-2}=n-2,\cdots,j_1=1$。于是展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$外,其余的项均为零,显然,这一项取正号。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同样,可以计算下三角行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注 例 1.3.2 的结论是重要的。在以后的计算中,可以作为已知结论直接运用。

例 1.3.3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[解] 与例 1.3.2 类似,只有

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

不为零,其列下标的反序数:

$$\tau(n\ n-1\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例1.3.4 计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 的系数。

[解] 由行列式的定义知,只有主对角线上元素的乘积才会出现 x^4,这一项带有正号,故 $f(x)$的 x^4 的系数为 2。

例 1.3.5 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[证明] 不考虑符号,行列式的一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

其中 j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 是 1,2,3,4,5 的任一排列。

由于 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}(j_3, j_4, j_5 = 3,4,5)$均为零,又行列式的展开式中的每一项只少要取 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$中的一个数。因此行列式展开式中的每一项均为零,故行列式为零。▎[①]

例1.3.6 证明: 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多,则此行列式等于零。

[证明] n 阶行列式有 n^2 个元素,而且其中等于零的元素的个数比 n^2-n 多。那么不等于零的元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少。这样,行列式展开式中每一项至少有一个零因子,因此行列式为零。▎

例1.3.7 设有两个 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b \neq 0$,证明 $D_1 = D_2$。

---

① 符号"▎"表示证明结束

[证明] 根据行列式的定义，有

$$D_2 = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} b^{1-j_1} a_{2j_2} b^{2-j_2} \cdots a_{nj_n} b^{n-j_n}$$
$$= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)}$$

因为 $j_1, j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2\cdots,n$ 的一个排列，所以 $1+2+\cdots+n = j_1+j_2+\cdots+j_n$。于是，有

$$D_2 = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D_1 \ \blacksquare$$

注 从上面的例子中可以看到，在某些特殊情况下，用行列式的定义计算或证明问题时都是首先考虑其一般项，然后根据所给的条件再来计算或证明。但是在一般情况下利用定义计算 n 阶行列式几乎是不可能的。

§1.4 行列式的计算

如何计算行列式的值是我们讨论的重点。

1.4.1 行列式的性质

性质 1.4.1 将行列式的行和列依次互换，行列式的值不变。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D'$（D' 称为 D 的**转置行列式**）。

[证明] 元素 a_{ij} 在 D' 中位于第 j 行第 i 列，也就是说，i 是它在 D' 中的列下标，j 是它在 D' 中的行下标，于是将 D' 按式(1.2-2)展开有

$$D' = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D \ \blacksquare$$

注 性质 1.4.1 表明，在行列式中行与列所处的地位是相同的，也就是说对行成立的性质，对列也成立。

性质 1.4.2 行列式的任何两行(列)互换，行列式变号。

这个性质的证明这里省略了。我们以三阶行列式为例说明。设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

交换第 2 行和第 3 行：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$- a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$
$$-(-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33})$$
$$= -D$$

性质 1.4.3 若行列式有两行(列)对应元素相等,那么这个行列式等于零。

[证明] 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

的第 i 行和第 k 行对应元素相等。交换 i 行和 k 行后,一方面,行列式不变;另一方面,由性质 1.4.2 应有 $D=-D$。于是 $2D=0$,即 $D=0$。▌

性质 1.4.4 如果将行列式的某一行(列)中所有元素都乘以数 k,等于用 k 乘这个行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[证明] 由行列式的定义,有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \cdots (k a_{i_{j_i}}) \cdots a_{n_{j_n}} \\ &= k \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \cdots a_{i_{j_i}} \cdots a_{n_{j_n}} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$
▌

由性质 1.4.4 可以直接得到:

性质 1.4.5 如果行列式的一行(列)所有元素均为零,则行列式为零。

由性质 1.4.4 和 1.4.5 可以得到:

性质 1.4.6 如果行列式两行(列)对应元素成比例,那么行列式为零。

性质 1.4.7 如果行列式的某一行(列)的每一个元素均为两项的和,那么这个行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[证明] 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&\quad + \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= \text{右端}
\end{aligned}$$ ▌

由性质 1.4.6 和 1.4.7 可以直接得到性质 1.4.8。

性质 1.4.8 把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

1.4.2 利用行列式的性质计算行列式的例

例 1.4.1 设

$$D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = d$$

求下列行列式的值

$$D_1 = \begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}
\end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix}
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}
\end{vmatrix}$$

[解] 将 D_1 的第 n 行与第 $n-1$ 行交换，再与 $n-2$ 行交换。如此继续，其交换 $n-1$ 次，即得 D。于是

$$D_1 = (-1)^{n-1} D = (-1)^{n-1} d$$

将 D_2 的第 n 行逐次与上一行交换，其交换 $n-1$ 次后，得行列式

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}
\end{vmatrix}$$

再将上面的行列式的第 n 行依次与上一行交换，共交换 $n-2$ 次后，得行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}$$

如此继续，直到变成 D 为止，这样从 D_2 到 D 共交换

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次。故有
$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d$$

例1.4.2 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a^4$$

[证明]

$$\text{左端}\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1\text{①}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-3)r_2]{r_3+(-2)r_2}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+(-3)r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

例1.4.3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

[解]

$$D\xlongequal[\substack{l_1+l_3\text{②} \\ \vdots \\ l_1+l_n}]{l_1+l_2}\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

---

① $r_2+(-1)r_1$ 表示第一行乘 -1 加到第 2 行。

② l_1+l_2 表示把第 2 列加到第 1 列，l_1+l_3 表示把第 3 列加到第 1 列，等等。

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1\\ \vdots \\ r_n+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1}(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n+1$$

例1.4.4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

［解］ 方法1

$$D \xlongequal[\substack{r_1+r_3\\ \vdots \\ r_1+r_n}]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+(-a)r_1\\ \vdots \\ r_n+(-a)r_1}]{r_2+(-a)r_1} (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

方法2

$$D \xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1\\ \vdots \\ r_n+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{l_1+l_3\\ \vdots \\ l_1+l_n}]{l_1+l_2}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-a))(x-a)^{n-1}$$

例1.4.5 证明： 关于未知数 x 的多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$