高等学校教学参考书

微分几何讲义

吴从炘 唐余勇 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

微分几何讲义

吴从炘　唐余勇　编

高等教育出版社

内容提要

本书是为机械工程方面有关专业的学生、研究生以及科技工作者编写的一本微分几何参考书．内容除包括曲线论、曲面论等机械工程方面所需要的微分几何基础知识外，还包括介绍微分几何基本解题方法和微分几何知识在机械工程中应用的两个附录．

本书叙述简明，同时不乏必要的分析与说明，因而也适合学过高等数学课程的读者自学。

高等学校教学参考书

微分几何讲义

吴从炘　唐余勇　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 5.25　字数 122,000

1985年4月第1版　1985年5月第1次印刷

印数 0,000—8,130

书号 13010·01013　　定价 1.40 元

序

本书是为机械工程方面有关专业的学生、研究生和科技工作者编写的一本微分几何参考书，因此书中只假定读者具有相当于樊映川等编《高等数学讲义》的数学基础．考虑到机械类有关专业数学时数不多，我们在讲述方法上力求简明，对某些定理和公式未作严密的推证，如对这些内容有需要的读者可查阅参考书[7]、[8]的相应内容．由于本学科科学性的要求，书中引用了数学专业的数学分析教材中的隐函数存在定理．此外为了便于自学，在行文中，有关理论的叙述作了一些必要的分析和说明，因而本书又是一本比较简易、通俗的读物．

本书的正文部分除了叙述机械工程方面所需要的微分几何的基础知识外，每节都配有适量的习题，这些习题有些是正文的补充，有些则有助于消化、理解正文的内容，因而可以看成是正文的有机部分．读者还会发现，有些习题对后继内容的学习将起到诱导和启发作用，因此，尽量多做一些习题是有益的．

本书的附录 I 主要是介绍微分几何中解题的一些常用而又具有本学科特点的基本方法，起着习题课的作用，因而对自学者尤其有益．

附录 II 主要介绍微分几何知识在机械工程中的应用，其中列举了几个工程实例，借以引导读者提高化机械工程问题为微分几何问题的能力．

最后的资料索引只是为某些读者查找书中所直接引用的有关问题提供方便，而不是这方面的主要文献的目录．

本书正文部分不带*的节段，讲授只须三十学时左右，即使全

部都讲，四十学时也就足够了．由于各节段具有一定的相互独立性，因此对某些专业，学时可以更少．

应当指出，本书主要采用吴大任教授编的《微分几何讲义》的部分内容和方法；另外还参考了复旦大学、厦门大学、哈尔滨工业大学等单位的有关著作和资料（这些著作、资料的名称见资料索引）．

在本书的编写过程中，秦裕瑗和刘钦圣两同志分别对我们的初稿和修改稿进行了认真的审阅，为我们提出了很好的修改意见，还有教育部工科院校数学教材编审委员会富景隆副教授也曾给予我们大力支持，在这里谨向他们致以深切的谢意．

由于我们的水平有限，机械工程方面的专业知识尤显不足，因此，本书肯定有不少问题，欢迎广大读者批评指正．

吴从炘　唐余勇

一九八四年五月

目　　录

曲 线 论

§1. 矢量代数、矢量分析简述

这一节原是解析几何和矢量分析及场论中的部分内容，作为本书的预备知识，在此作一简介。

(一) 矢量代数简述

本书中出现的数均指实数，常用具体的数或小写字母来表示。而既有长度、又有方向的量，即矢量则常用两大写字母上加带箭头的横线或粗体小写字母表示，如 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{r}$ 等；至于它的模，即矢量的长度就常用 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{r}|$ 表示．两矢量相等意味着不但模相等并且方向也相同．模等于 1 的矢量叫做幺矢；模等于零的矢量叫做零矢量，记作 $\mathbf{0}$，它的方向是不确定的，可以任取．

我们采用的坐标系均为右手直角坐标系 $[O;\ x,\ y,\ z]$，并且记三轴正向幺矢依次为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则矢量 $\boldsymbol{r}$ 可表为

$$\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ z\}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

其中 x、y、z 分别为 $\boldsymbol{r}$ 对各个坐标轴的射影，叫做 $\boldsymbol{r}$ 在各个坐标轴上的分量．于是有

i) $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

ii) $\lambda\boldsymbol{r}=\{\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z\}$,

其中 λ 为实数，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{r}$ 的方向可以任取．此外，$\boldsymbol{r}$ 的同向幺矢可表为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}$，当然这里的 $\boldsymbol{r}$ 不为 $\mathbf{0}$.

又若 $\qquad \boldsymbol{r}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}\quad (i=1,\ 2),$

则有

i) $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2$ 当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$;

ii) $\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2=\{x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\}$;

iii) 矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的点乘积(数量积)

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\langle\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

其中 $\langle\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2\rangle$ 表示 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 的正向间较小的夹角，即有 $0\leqslant\langle\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2\rangle\leqslant\pi$.

特别有 $$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^2=x^2+y^2+z^2=|\boldsymbol{r}|^2;$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0;$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1.$$

iv) 矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 的叉乘积(矢量积)

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\langle\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2\rangle\boldsymbol{e}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 为幺矢，$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ 垂直于 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，并且($\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$)构成右手系.

特别有 $$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

再若 $$\boldsymbol{r}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}\quad(i=1,\ 2,\ 3),$$

则有

i) 三矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 的混合积

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)\cdot\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{r}_2=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix};$$

ii) 三矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 的二重矢积

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

由上可知：若把零矢量看作是与任何矢量垂直且平行的矢量，则

两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 互相垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0.$$

两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 互相平行的充要条件是

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0},$$

或为

$$\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0},$$

其中 λ、μ 为不同时为零的实数.

三矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 共面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)=0,$$

或为

$$\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2+\nu\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0},$$

其中 λ、μ、ν 为不同时为零的实数.

若用分量表示，亦可得到上述几个充要条件的对应形式. 请读者自行推导.

显然矢量的加减、数乘以及数量积可以像通常代数中的数那样进行运算，满足相应的运算法则. 然而矢量的矢量积、混合积、二重矢积并不如此，如

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

对于矢量代数，这一点必须予以注意.

〈二〉 矢量分析简述

给定矢函数（变矢）

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \quad t\in[t_1, t_2],$$

即对$[t_1, t_2]$中每一个 t 值，都有一个确定的矢量 $\boldsymbol{r}$ 与之对应. 显然如同数学分析那样，我们可以类似地引入矢函数的极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等概念，为了避免不必要的重复，这里只叙述一下矢函数的导数的定义.

定义 对于矢函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$和 $t_0\in(t_1, t_2)$，若

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时的极限存在，则称此极限为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 处的**导矢**. 又若 $\boldsymbol{r}(t)$在(t_1, t_2)中的每一点均有导矢，则称这些点的导矢所构成的矢函数为**导矢函数**，简称**导矢**，并记作 $\boldsymbol{r}'(t)$ 或 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

因为一般的说，$\boldsymbol{r}(t)$的终点轨迹为一条曲线，因而 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是该曲线上参数分别为 t_0 和 $t_0+\Delta t$ 的两点所引的弦上的矢量. 易见当 Δt 为正值时，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 同向；反之异向；总之它总是指向 t 增加的一方. 为此我们约定今后讨论的是**有向曲线**，并把 t 增加的方向作为**曲线的正向**. 于是当 $\Delta t\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 的极限显然就是 t_0 处的切线方向的矢量，并且它总是指向曲线的正向. 此处自然已经假定 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{r}'(t_0)=\boldsymbol{0}$，则需详细讨论切线的存在问题，情况比较复杂，这里就不作介绍了.

如果我们把矢函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$用三个分量来表示，即

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t), y(t), z(t)\},$$

那末为人们熟悉的数学分析中的种种概念对各个分量就自然适用，因为它们都是普通的数量函数. 将数学分析中的理论用于各个分量，然后再结合方向幺矢，稍加处理，便成了矢量分析的相应内容.

特别，如下一些结论值得注意：

i) 若

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\},\ \boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\},$$

则

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

成立的充要条件是

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0.$$

ii) $\boldsymbol{r}'(t)=\{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\}$.

iii) $$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t)\Delta t^n+\boldsymbol{\varepsilon}\Delta t^n,$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是无穷小矢量，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}.$$

iv) $$\int_a^b\boldsymbol{r}(t)dt=\boldsymbol{i}\int_a^b x(t)dt+\boldsymbol{j}\int_a^b y(t)dt+\boldsymbol{k}\int_a^b z(t)dt.$$

当然上述诸式中的矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 需要满足各自所必需的条件.

还应当指出的是除了罗尔定理及其有关定理外，数学分析中的其它理论都可以引用到矢量分析中来，因此就不再一一列举.同样为了避免不必要的重复，在以后的讨论中，我们假定所论的矢函数都具有足够阶的连续导函数.

〈三〉 直线和平面的矢量式方程

若已知直线 L 上的一点 P_0 的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$, L 的方向矢量为 $\boldsymbol{v}$, 则该直线 L 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为直线 L 上任一点 P 的矢径，λ 为实数.

又若已知平面 π 上一点 P_0 的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$, 平面 π 的法向矢量为 $\boldsymbol{n}$, 则平面 π 的方程为

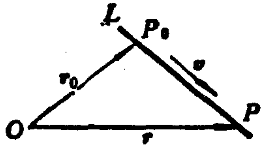

图 1

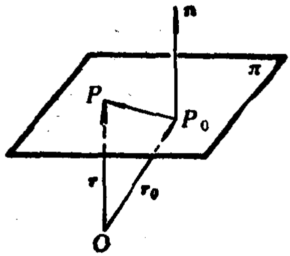

图 2

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为平面 π 上的任一点 P 的矢径.

特别当 $\boldsymbol{n}$ 为幺矢时，又记

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0=p,$$

则 p 为原点 O 到平面 π 的距离，即在由 O 点所引平面 π 的垂线上，O 到垂线与平面交点的线段之长，此时(1)式化为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-p=0.$$

<四> 几种特殊的矢函数

1) 定长变矢

定长变矢指具有固定长度的变矢．显然可以用条件

$$|\boldsymbol{r}(t)|=c$$

表示，其中 c 为常数.

定理 1 矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 为定长变矢的充要条件是

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0.$$

证 必要性 因为

$$|\boldsymbol{r}(t)|=c,$$

故
$$\boldsymbol{r}^2(t)=c^2,$$

对上式求导有

$$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0,$$

于是 $$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0.$$

充分性 因上述推导每步均可逆，故结论显然成立.

在几何上，定理1中变矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 若为矢径，则它表示球心在原点，半径为 c 的球面上的曲线. 这等于说：曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为球心在原点的球面曲线的充要条件是曲线上每一点的切线和这点的矢径垂直.

ii) 定向变矢

定向变矢指具有固定方向的变矢. 显然可以用条件

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$$

表示，其中 $\lambda(t)$ 为数量函数，$\boldsymbol{e}$ 为常幺矢.

定理2 不为零的变矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 为定向变矢的充要条件是

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}.$$

证 必要性 对

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$$

求导有 $$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e},$$

于是可得 $$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\lambda\boldsymbol{e}\times\lambda'\boldsymbol{e}=\lambda\lambda'\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}.$$

充分性 首先应当指出，任何不为零的变矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 均可表为

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t), \tag{1}$$

其中 $\lambda(t)$ 为数量函数，并且 $\lambda(t)\neq 0$，$\boldsymbol{e}(t)$ 为平行于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的幺矢. 显然我们只须证明此时 $\boldsymbol{e}(t)$ 为常幺矢. 对(1)式求导有

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'\boldsymbol{e}(t)+\lambda\boldsymbol{e}'(t), \tag{2}$$

于是根据条件即得

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\lambda\boldsymbol{e}(t)\times(\lambda'\boldsymbol{e}(t)+\lambda\boldsymbol{e}'(t))=\lambda^2\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t)=\boldsymbol{0},$$

从而

$$\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t)=\boldsymbol{0}; \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{e}(t)$ 为定长变矢，所以由定理1有

$$\boldsymbol{e}(t)\cdot\boldsymbol{e}'(t)=0, \tag{4}$$

比较(3)、(4)式，并且注意到任一非零矢量不可能既平行又垂直于另一非零矢量便知

$$\boldsymbol{e}'(t)=\boldsymbol{0},$$

因此 $\boldsymbol{e}(t)$为常幺矢.

从几何上看，定理 2 中变矢 $r(t)$若为矢径，则它表示过原点的直线.

iii) 平行于某一平面的变矢

显然，若变矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$为定向变矢，则亦可视为平行于某一平面的变矢. 由定理 2 可知，$\boldsymbol{r}(t)$为定向变矢的充要条件是$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$，为避免不必要的重复，我们只讨论 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$ 的情形. 容易验证下述定理在 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$ 时亦成立.

定理 3 若 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$，则变矢 $\boldsymbol{r}(t)$平行于某一平面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'')=0.$$

证 必要性 取不为零的确定的矢量 $\boldsymbol{n}$ 为该平面的法向矢量，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0, \tag{5}$$

对上式两次求导得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''=0, \tag{6}$$

由(5)、(6)式易见，$\boldsymbol{n}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}''$，故 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}''$ 共面，所以必有

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'')=0.$$

充分性 显然，此时要证明结论成立，只须找出某不为零的定向矢量 $\boldsymbol{n}$，使得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0. \tag{7}$$

今取

$$\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}, \tag{8}$$

则(7)式显然成立，故又只须证明 $\boldsymbol{n}(t)$ 为定向矢量. 因为

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'')=0,$$

即 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}''$ 共面，又 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 不平行，从而有

$$\boldsymbol{r}''=\lambda(t)\boldsymbol{r}+\mu(t)\boldsymbol{r}'. \tag{9}$$

其中 $\lambda(t)$、$\mu(t)$ 为数量函数. 于是对(8)式求导并利用(9)式可得

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}''=\lambda\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\mu\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\mu\boldsymbol{n},$$

即有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{0},$$

由定理 2 便知 $\boldsymbol{n}(t)$ 为定向变矢.

习题

(1) 证明拉格朗日恒等式

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3).$$

(2) 证明

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2,\ \boldsymbol{R}_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{R}_3\\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{R}_3\\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{R}_3\end{vmatrix}.$$

(3) 证明：若 $\boldsymbol{r}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处连续，则存在含 t_0 的闭区间，使在该闭区间上恒有 $\boldsymbol{r}(t)\neq\boldsymbol{0}$.

(4) 证明

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\pm\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t).$$

(5) 证明

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda\boldsymbol{r}'+\lambda'\boldsymbol{r},$$

$$(\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\pm\boldsymbol{r}_2',$$

$$(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2',$$

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2',$$

$$(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)'=(\boldsymbol{r}_1',\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2',\ \boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3'),$$