力学名著译丛

理论流体动力学

上册

〔英〕H. 兰姆 著

科学出版社

力学名著译丛

理论流体动力学

上册

〔英〕H. 兰姆 著

游镇雄 牛家玉 译

游镇雄 校

科学出版社

1990

内 容 简 介

原著为经典名著，1879年首次出版后多次再版．书中系统地讲解了有关经典流体动力学方面的基本理论，侧重于流体力学的数学理论，推理严密，编写精练，应用广泛．中译本分上、下两册出版．上册包括运动方程、特殊情况下方程的积分、无旋运动、动力学理论、旋涡运动和潮汐波等内容．

本书对于理工科大专院校流体力学和空气动力学专业的学生、研究生是一本不可多得的基础理论参考书，对于从事流体力学和空气动力学等方面的科技工作者也是一本必备的参考书．

第II,III,IV章由牛家玉同志翻译，游镇雄同志校订，其余诸章均由游镇雄同志翻译．

Sir Horace Lamb, M. A., LL. D., Sc. D., F. R. S.

HYDRODYNAMICS

Sixth Edition

Cambridge at the University Press 1932

力学名著译丛

理 论 流 体 动 力 学

上 册

〔英〕H. 兰 姆 著

游镇雄 牛家玉 译

游镇雄 校

责任编辑 朴玉芬 李成香

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990年9月第一版 开本：850×1168 1/32

1990年9月第一次印刷 印张：14 3/4

印数：平1—1200 插页：精2

精1—700 字数：385000

ISBN 7-03-001750-1/O·341（平）

ISBN 7-03-001751-X/O·342（精）

定价：平 装 15.00元

布脊精装 16.60元

序

本书可视为1879年所出版的《流体运动的数学理论》一书的第六版．在那本书之后的各版本经过重大改编和扩充，均已改为现用的书名．

本版未变更总体布局，但却再次对全书作了修改，适当地作了某些重要的删减，并增加了许多新的内容．

本门学科在近几年中有了重大的发展，例如在潮汐理论方面以及在与航空技术有关的许多方向上．因此，可以饶有兴味地看到，经常笼罩着贬值乌云的“经典”理论流体动力学已具有了一个正在扩展着的实用方面的领域．由于某些研究过于复杂，不可能都在本书的篇幅内作出充分的描述，但本书仍试图在适当场合对较重要的结论及其所用方法给予叙述．

和前几版一样，书中所涉及的专家们的有关工作，在脚注中都详细地列出，但似乎应该说明，本书已把原始的推证几乎都作了重大的修改．

再次向剑桥大学出版社的工作人员致谢，他们为印刷本书提供了很有价值的帮助．

H. 兰　姆

1932年4月

目　　录

第I章　运动方程组

1，2.　流体的基本性质……………………………… 1
3.　两种探讨方法……………………………… 2
4—9.　Euler 形式的运动方程组．动力学方程组．连续性方程．物理方程．表面条件……………………………… 3
10.　能量方程……………………………… 9
10a.　动量的变化……………………………… 12
11.　由脉冲力所引起的流动……………………………… 13
12.　以动坐标系为参考系的 Euler 方程组……………………………… 15
13.14.　Lagrange 形式的运动方程组和连续性方程……………………………… 16
15,16.　Weber 变换……………………………… 18
16a.　平面极坐标系和球极坐标系中的 Euler 方程组……………………………… 20

第II章　运动方程在特殊情况下的积分形式

17.　速度势．Lagrange 定理……………………………… 22
18，19　关于 φ 的物理叙述和运动学叙述……………………………… 23
20.　存在速度势时运动方程的积分．压力方程……………………………… 24
21—23.　定常运动．从能量原理导出压力方程．极限速度……………………………… 26
24.　液体的流动；射流颈……………………………… 29
24a，25.　气体的流动……………………………… 32
26—29.　旋转着的液体之例：均匀旋转；Rankine 的"组合涡"；在电磁场中的旋转……………………………… 34

第III章　无旋运动

30.　把一个流体微元的微分运动分解为变形和旋转……………………………… 38
31，32.　"流动"和"环量"．Stokes 定理……………………………… 40
33.　一个运动着的回路上的环量守恒性……………………………… 44

34, 35. 单连通空间中的无旋运动；单值速度势…………………… 45
36—39. 不可压缩流体；流管． ϕ不能为极大或极小． 速度不能为极大． ϕ在球面上的平均值……………………… 46
40,41. 关于ϕ的确定性条件……………………………………… 50
42—46. Green 定理；动力学解释；用于动能的公式． Kelvin 的最小动能定理……………………………………………… 53
47, 48. 多连通区域；“回路”和“屏障”……………………………… 60
49—51. 多连通空间中的无旋运动；多值速度势；循环常数………… 62
52. 不可压缩流体的情况． 关于ϕ的确定性条件…………… 65
53—55. Green 定理的 Kelvin 推广；动力学解释；在一个循环空间中作无旋运动的液体的动能……………………………… 66
56—58. “源”和“汇”；双源． 用源的面分布来表示液体的无旋运动………………………………………………………… 70

第 IV 章 液体的二维运动

59. Lagrange 的流函数……………………………………………… 76
60, 60a. 流函数与速度势之间的关系． 二维源． 电模拟……… 78
61. 动能………………………………………………………………… 80
62. 二维无旋运动和复变函数理论之间的联系………………… 81
63, 64. 几个简单的循环运动和非循环运动． 一个源在圆形障碍物中的镜像． 一列源的势函数……………………… 83
65, 66. 逆关系． 共焦曲线组． 出入明渠的流动……………… 87
67. 普遍公式；Fourier 方法 ………………………………………… 90
68. 圆柱体的运动(无环量)；流线………………………………… 91
69. 圆柱体的运动(有环量)；“升力”． 常力作用下的次摆线路径…………………………………………………………… 93
70. 对较为一般的情况的注释． 变换的方法；Kutta 问题…… 96
71. 逆方法． 由一个柱体作平移而引起的运动；柱截面为椭圆时的情形． 绕过倾斜薄板的流动；由流体压力所产生的力偶…………………………………………………… 98
72. 由旋转的边界所引起的运动． 不同截面的旋转棱柱形容器． 在无限流体中的旋转椭圆柱；带有环量的一般情况………………………………………………………………… 102

72a. 用一个双源来表示移动着的柱体对远处的影响 …… 107
72b. 环绕一个固定柱体作无旋运动的流体对柱体作用力的 Blasius 表达式. 应用; Joukowski 定理;由简单源所引起之力 …… 108
73. 自由流线. 保角变换的 Schwarz 方法 …… 111
74—78. 例. Borda 管嘴的二维形式;从长孔流出的流体; 收缩系数. 液流对薄板的冲击(正冲击和斜冲击); 阻力. Bobyleff 问题 …… 114
79. 不连续的运动 …… 125
80. 曲面上的薄层流动 …… 128

第 V 章 液体的三维无旋运动

81, 82. 球谐函数. Maxwell 的极点理论 …… 130
83. 球极坐标系中的 Laplace 方程 …… 133
84, 85. 带谐函数. 超几何级数 …… 134
86. 田谐函数和扇谐函数 …… 138
87, 88. 球面谐函数的共轭性. 把函数展为球面谐函数的级数 …… 141
89. Laplace 方程的符号解. 定积分形式 …… 142
90, 91. 在流体动力学中的应用. 一个球形表面上的脉冲压力. 规定了法向速度的情况. 流体运动的功能 …… 144
91a 例. 空泡的消失问题. 气穴由于内部压力而膨胀的问题 …… 146
92, 93. 圆球在无限液体中的运动; 惯性系数. 同心刚性边界的影响 …… 148
94—96. Stokes 的流函数. 用球谐函数表示的公式. 圆球的流线. 简单源和双源对球面的镜像. 作用于球上之力 …… 151
97. Rankine 的逆方法 …… 156
98, 99. 两个圆球在液体中运动. 运动学公式. 惯性系数 …… 157
100, 101. 柱谐函数. 用 Bessel 函数表示 Laplace 方程的解. 任意函数的展开 …… 162
102. 流体动力学中的例子. 穿过一个圆孔的流动. 一个圆

盘的惯性系数……………………………………………… 165
103—106. 用于回转长椭球体的椭球谐函数. 一个回转长椭球体的平移和转动……………………………………………… 169
107—109. 用于回转扁椭球体的谐函数. 穿过一个圆孔的流动. 一个圆盘的流线. 回转扁椭球体的平移和转动……… 174
110. 液体在椭球形容器中的运动……………………………… 180
111. 一般正交坐标系. $\nabla^2\varphi$ 的变换……………………… 181
112. 一般椭球坐标系；共焦二次曲面………………………… 183
113. 穿过一个椭圆孔的流动…………………………………… 185
114, 115. 椭球体在液体中的平移和转动；惯性系数………………… 187
116. 其它问题的参考文献……………………………………… 194
附录: 一般正交坐标系中的流体动力学方程组………………… 194

第 VI 章　固体在液体中运动的动力理论

117, 118. 一个物体在液体中运动时的运动学公式……………………… 198
119. "冲量"理论………………………………………………… 200
120. 相对于和物体固连的坐标系的动力学方程………………… 201
121, 121a. 动能;惯性系数. 用一个双源来表示远处的流体运动……………………………………………………… 202
122, 123. 冲量的分量. 反逆公式…………………………………… 205
124. 流体动力作用力的表达式. 三个恒定平移；稳定性…… 208
125. 定常运动的可能模式. 由脉冲力偶引起的运动………… 211
126. 流体动力学上的对称性类型……………………………… 213
127—129. 回转体型固体的运动. 沿轴线运动的稳定性. 旋转的影响. 其它形式的定常运动…………………………… 216
130. "螺旋体"的运动…………………………………………… 221
131. 在刚性外壳内的流体的惯性系数………………………… 222
132—134. 穿过带孔固体中孔道的流动为循环运动时的情况. 一个环的定常运动；稳定性的条件…………………………… 222
134a. 柱体作二维运动时所受到的流体动力作用力……………… 227
135, 136. 广义坐标中的 Lagrange 运动方程. Hamilton 原理. 在流体动力学中的应用…………………………………… 232
137, 138. 例。 靠近刚性边界的一个圆球的运动。 两个圆球沿球

心连线的运动……………………………………………… 236
139—141. Lagrange 方程在循环运动中的修正；被遗坐标法． 陀螺系统的方程………………………………………………… 238
142，143. 运动-静力学． 浸没于非均匀流动中的固体所受到的流体动力作用力……………………………………………… 245
144. 对动力学原理直觉推广的注释……………………………… 250

第VII章 涡旋运动

145. “涡线”和“涡丝”；运动学性质……………………………… 251
146. 涡旋的守恒性； Kelvin 的证明． Cauchy, Stokes 和 Helmholtz 的方程． 在固定椭球形外壳中具有均布涡量的运动………………………………………………… 253
147. 确定性的条件………………………………………………… 258
148，149. 用膨胀率和涡量来表示速度；电磁模拟． 由一个孤立涡旋所引起的速度……………………………………………… 259
150. 由一个涡旋所引起的速度势………………………………… 263
151. 涡旋层………………………………………………………… 265
152，153. 涡旋系的冲量和能量……………………………………… 268
154，155. 直线涡旋．一个涡偶的流线族． 其它例子……………… 274
156. 对一列涡旋和两列涡旋稳定性的探讨． Kármán “涡街” ……………………………………………………………… 281
157. Kirchhoff 关于平行涡旋系的理论 ………………………… 288
158，159. 有限大小截面柱状涡旋的稳定性；Kirchhoff 的椭圆形涡旋 ……………………………………………………………… 289
159a. 一个固体在具有均匀涡量的液体中的运动………………… 293
160. 曲面上薄层流体中的涡旋…………………………………… 296
161—163. 圆形涡旋；一个孤立的圆形涡旋的势函数和流函数；流线． 冲量和能量． 一个涡环的移动速度……………………… 297
164. 诸涡环的相互作用． 一个涡环在球内的镜像……………… 303
165. 液体作定常运动的一般性条件． 柱形和球形涡旋……… 306
166. 参考材料……………………………………………………… 310
166a. Bjerknes 定理……………………………………………… 310
167. 流体动力学方程的 Clebsch 变换………………………… 311

第VIII章 潮 汐 波

168. 微小振荡的一般性理论;正则振型;强迫振荡……………… 315

169—174. 均匀渠道中的自由波动;初始条件的影响;近似假定所适用的情况;能量 …………………………………………… 320

175. 化为定常运动的技巧…………………………………… 328

176. 波系的叠加;反射 ……………………………………… 330

177—179. 扰力的影响;有限长度渠道中的自由振荡和强迫振荡 …… 331

180—184. 潮汐的沟渠理论. 扰力的势函数. 沿赤道的渠道和平行于赤道的渠道中的潮汐; 半日潮和全日潮. 与子午线重合的渠道;平均水位的变化;两周潮. 沿赤道的有限长度渠道; 潮汐的滞后…………………………… 336

185, 186. 变截面渠道中的波动. 自由振荡和强迫振荡之例; 浅海和港湾中潮汐的增大现象………………………………… 345

187, 188. 有限振幅波; 行波中形状的变化. 二阶潮……………… 351

189, 190. 水平水层中的二维波动; 普遍方程组. 矩形水池中的振荡…………………………………………………… 356

191, 192. 圆形水池中的振荡; Bessel 函数;等高线. 椭圆形水池; 最缓慢振型的频率的近似值……………………………… 359

193. 变深度的情况. 圆形水池………………………………… 366

194—197. 从中心处所发出的扰动的传播;第二类 Bessel 函数. 由局部的周期性压力所产生的波. 发散波的一般公式. 瞬态局部扰动…………………………………………… 369

198—201. 球形水层的振荡; 自由波动和强迫波动. 水质点间相互引力的影响. 由子午线和纬线所围圈的海洋………… 380

202, 203. 动力系统相对于转动坐标系的运动方程组………………… 387

204—205a. 转动系统的微小振荡;"寻常的"稳定性和"长期的"稳定性. 微弱转动对正则振型的形态和频率的影响……… 391

205b. 频率的近似计算…………………………………………… 396

206. 强迫振荡…………………………………………………… 399

207, 208. 流体动力学中的实例;转动着的平面水层中的潮汐振荡;直渠道中的波动……………………………………… 401

209—211. 转动着的具有均匀深度的圆形海盆；自由振荡和强迫振荡 ········ 405
212. 变深度的圆形海盆 ········ 412
212a 近似方法之例 ········ 412
213, 214. 旋转球体上的潮汐振荡. Laplace 的动力理论 ········ 417
215—217. 对称振荡. 长周期潮汐 ········ 422
218—221. 全日潮和半日潮. 对 Laplace 解的讨论 ········ 432
222, 223. Hough 的研究；某些摘录和结果 ········ 440
223a. 对进一步探索的介绍 ········ 447
224. 由于海洋的实际位形而对动力理论所作出的某些修正；相位问题 ········ 448
225, 226. 海洋的稳定性. 关于运动稳定性的一般理论的补充说明 ········ 451
附录: 关于引潮力 ········ 454

第 I 章
运动方程组

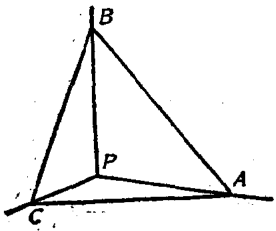
1. 在今后的探讨中,我们假定所涉及的物质可以在实用上把它的结构看作是连续的和均匀的,也就是,当我们假设把它分割为一个个最小的部分时,这些最小部分和物质整体具有相同的性质.

流体的基本性质是: 如果流体中的应力状态使两个相邻部分之间的相互作用力和公共面斜交,那么,流体就不能处于平衡状态.这一性质是流体静力学的基础,并由该学科所得出的结论与实验完全相符而证实.然而,在运动着的流体中,斜向应力是可能存在的.一个很简单的观察就足以使我们确信这一点了.例如,设想一个盛着水或其它液体的圆柱形容器绕其轴线(它是沿着铅垂方向的)而转动,如果容器的角速度保持不变,那么其中的流体很快就会全部跟着容器一起转动,就好像是一块固体那样.现在,如果使容器停止转动,则其中的流体仍可继续运动一段时间,但将逐渐平息下来,最终会全部停止运动.而在这一过程中可以看到,距轴线较远的流体比较近的流体会运动得慢些,其运动受到更快的制止.这些现象指出,在相接触的流体微元之间存在着与公共面部分地相切的相互作用力.因为如果相互作用力处处都与公共面正交,那么很明显,由绕容器轴线的任一回转面所包围圈的流体绕轴线的动量矩是不会改变的.此外,我们还可断定,只要流体像一块固体那样运动,就不会出现这种切向应力;只有当流体中某些部分正在发生变形时,切向应力才会出现,并具有反抗变形的趋势.

2. 然而,通常都先把切向应力完全忽略掉.切向应力在许多场合中的作用是很小的,而且,不管这种作用的大小如何,首先探讨单纯正应力的效应以分散我们课题中并非微不足道的困难也是适宜的做法.因此,切向应力的规律将推迟到第 XI 章再作进一

步考虑。

如果在位于流体中一点P处的任一微小平面上所作用的应力都是法向的，则应力的强度(单位面积上的作用力)对于任何方向的小平面都是相同的。这一定理可证明如下，以作为依据。过P点作三根互相垂直的直线PA，PB和PC，设一相对于此三直线的方向余弦分别为l，m，n，且无限靠近P点的平面与此三直线分别相交于A，B，C。令p，p_1，p_2和p_3分别是作用于四面体$PABC$中ABC，PBC，PCA和PAB诸面上的应力强度[1]。若Δ为上述第一个面的面积，则其它诸面的面积就依次为$l\Delta$，$m\Delta$和$n\Delta$。因此，如果在平行于PA的方向上列出四面体的运动方程，可以得到$p_1 \cdot l\Delta = pl \cdot \Delta$。在该式中，我们略去了表示动量变化率和外力分量的两项，因为它们正比于四面体的质量，因而是线性小量的三阶项，而所保留下来的量则为二阶项。于是我们最后得到$p = p_1$，并依同理可得$p = p_2 = p_3$，这就证明了上述定理。



3. 我们可以看到，相应于如何在给定的作用力和给定的条件下来确定流体的运动有两种方法，流体运动方程组也就有两种形式。我们可以或者把流体所占据的所有空间点处在任一时刻的速度、压力和密度的分布情况定为研究目标，或者设法确定每一个质点的经历。由这两种意图所得到的两种方程组，可以像德国数学家所做的那样，方便地称之为流体运动方程组的 Euler 形式和 Lagrange 形式，虽然这两种形式实际上都应归功于 Euler[2]。

1) 如为压力则取为正值，拉力则取为负值。但由于绝大多数流体在通常条件下并不能承受极其微小的拉力，因而p几乎总是正值。

2) "Principes généraux du mouvement des fluides", *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 1755.

"De principiis motus fluidorum", *Novi Comm. Acad.Petrop.xiv.* 1(1759).

Lagrange 对运动方程组发表过三次。第一次是在与最小作用量原理相联

Euler 方 程 组

4. 设 u, v, w 为时刻 t 时、在 (x, y, z) 点处的速度平行于坐标轴的分量. 于是,这些量就是自变量 x, y, z, t 的函数. 对于任一特定的 t, 它们表明了该时刻在流体所占据的空间所有各点处的运动; 而对于特定的 x, y, z, 则它们给出在该特定地点所发生的历史.

在绝大多数情况下,我们将假定不仅 u, v, w 为 x, y, z 的有限和连续的函数,而且它们的一阶空间导数 ($\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial w/\partial x$ 等)也处处都是有限的[1]. 我们将把术语"连续运动"理解为符合上述限制的运动. 如果出现了例外的情况, 就需要另外作出考察了. 在连续运动中,如所定义的那样,任意两个相邻质点 P 和 P' 之间的相对速度始终是无穷小量, 因此, 线段 PP' 始终保持同样的量级. 随之可知,如果我们设想包围 P 点作一个微小的闭曲面,并假定它随着流体一起运动, 它将永远包围原来那部分流体. 而随着流体一起运动的一个不论什么样的曲面, 就完全而且永远把它两边的流体分开.

5. u, v, w 在相继的 t 值下的值就像是各时刻流动情况的一串图片,然而,却不能从它们直接看出任一质点的行踪.

为了对一个运动着的质点计算任一函数 $F(x, y, z, t)$ 的变化率,我们可注意到,时刻 t 位于 (x, y, z) 处的质点在时刻 $t+\delta t$ 时将到达 $(x+u\delta t,\ y+v\delta t,\ z+w\delta t)$, 故相应的 F 值变为

$$F(x+u\delta t,\ y+v\delta t,\ z+w\delta t,\ t+\delta t)$$

---

1) 应记住,为今后讨论涡旋运动的需要,并不要求假定这些导数也是连续的.

系时附带地提到的,发表于 *Miscellanea Taurinensia, ii* (1760) [*Oeuvres*, Paris, 1867—92, i.]; 第二次发表于 "Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides", *Nouv. mem. de l'Acad. de Berlin*, 1781 [*Oeuvres*, iv.]; 第三次发表于 *Mécanique Analytique*. 在最后一次阐述中, 他由运动方程组的第二种形式(见后面第 14 节)出发,但立即把它们改写为 Euler 符号.

$$= F + u\delta t\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\delta t\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\delta t\,\frac{\partial F}{\partial z} + \delta t\,\frac{\partial F}{\partial t}.$$

如果像 Stokes 那样，用符号 D/Dt 来表示随运动着的流体而取的导数，并以 $F + (DF/Dt)\delta t$ 表示 F 的新值，则有

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\,\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\frac{\partial F}{\partial y} + w\,\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{1}$$

6. 为得出动力学方程组，设时刻为 t 时，在 (x, y, z) 点处的压力为 p，密度为 ρ，单位质量上所受到的外力分量为 X, Y, Z. 我们以 (x, y, z) 点为中心取一微元，其棱边为 δx, δy, δz, 分别平行于直角坐标系的三个轴. 这一微元的动量在 x 方向上的分量的增长率为 $\rho\delta x\delta y\delta z Du/Dt$，它必须等于微元所受作用力的 x 分量. 在作用力的 x 分量中，外力给出 $\rho\delta x\delta y\delta z X$，压力在靠近坐标原点的 yz 侧面上给出

$$\left(p - \frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\delta z\text{[1]},$$

而在其对面则给出

$$\left(p + \frac{1}{2}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\delta z.$$

以上两式之差给出沿 x 轴正方向的合力为 $-\partial p/\partial x \cdot \delta x\delta y\delta z$. 其它侧面上的压力所产生的作用力则垂直于 x 轴. 于是有

$$\rho\delta x\delta y\delta z\,\frac{Du}{Dt} = \rho\delta x\delta y\delta z X - \frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\delta y\delta z.$$

从 (1) 式把 Du/Dt 代入上式，并写出另外两个对称的方程，就得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1) 根据 Taylor 定理，不难理解，微元 $\delta x\delta y\delta z$ 的任一侧面上的平均压力可以取为与该侧面中心处的压力相等.

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

7. 对以上动力学方程组，我们首先必须再并列上一个 u, v, w, p 之间的运动学关系式，它可求之如下。

若 Q 为一运动着的微元的体积，则由于微元的质量不变，有

$$\frac{D\cdot \rho Q}{Dt}=0,$$

即

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=0. \tag{1}$$

为计算 $(1/Q)DQ/Dt$ 之值，把该微元取为在时刻 t 充满于一个直角平行六面体 $\delta x\delta y\delta z$ 中，其一顶点 P 在 (x, y, z) 处，棱边 PL, PM 和 PN 平行于诸坐标轴．到时刻 $t+\delta t$，这一微元变为一个斜平行六面体，并由于质点 L 相对于质点 P 的速度为 $(\partial u/\partial x)\delta x$，$(\partial v/\partial x)\delta x$ 和 $(\partial w/\partial x)\delta x$，因而经过 δt 后，棱边 PL 在三个坐标轴上的投影分别变为

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta t\delta x.$$

准确到一阶 δt，这一棱边之长就是

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x;$$

对于其它棱边，也可得到类似结果．由于斜平行六面体的隅角与直角相差为无穷小，其体积仍可按三棱边的乘积来计算(准确到一阶 δt)，即有

$$Q+\frac{DQ}{Dt}\delta t=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}\delta x\delta y\delta z,$$

亦即

$$\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2}$$

因而，(1) 式可变为

$$\frac{D\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{3}$$

上式称为“连续性方程”。

如我们已经看到的，表达式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4}$$

表示流体在 (x, y, z) 点处的扩展率的大小，可以方便地称之为在该点处的“膨胀率”。从一个更普遍的观点来看，表达式(4)称为速度矢量 (u, v, w) 的“散度”，并常被简明地表示为

$$\operatorname{div}(u, v, w).$$

上述探讨实质上是由 Euler 所作出的[1]。另一个现在常用的获得连续性方程的方法是并不追随流体微元的运动，而是把注意力集中在一个空间微元 $\delta x\delta y\delta z$ 上，并计算由于穿过其边界面的通量而使该空间内部所产生的质量变化。设这一空间微元的中心位于 (x, y, z) 处，则在单位时间中由靠近坐标原点的 yz 侧面流入的物质数量为

$$\left(\rho u-\frac{1}{2}\frac{\partial\cdot\rho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z,$$

而由其对面流出的数量为

$$\left(\rho u+\frac{1}{2}\frac{\partial\cdot\rho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z.$$

通过这两个侧面，一共使该空间微元在单位时间内净得

$$-\frac{\partial\cdot\rho u}{\partial x}\delta x\delta y\delta z.$$

用同样方法计算穿过其余诸侧面的通量的效果，我们得到单位时间内、在空间 $\delta x\delta y\delta z$ 中所增加的总质量为

$$-\left(\frac{\partial\cdot\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\cdot\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\cdot\rho w}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z.$$

因任一区域中的物质数量的变化只能由穿过边界面的通量所引

1）见第3节最后一个脚注。