



王 潼 著

热力学

科学出版社

热 势 论

王 潼 著

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书系统地介绍了各种热势的性质,以及它们在传热学中的应用,并在函数空间 $B^{(n, \lambda)}$ 的意义下,讨论了二阶抛物型方程的各种定解问题. 可供数学、力学、物理专业的研究人员,及高等院校相应专业师生阅读.

2406/23

热 势 论

王 遑 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 5 月 第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1980 年 5 月 第一次印刷 印张: 6 3/4

印数: 0001—6,920 字数: 152,000

统一书号: 13031·1248

本社书号: 1739·13—1

定 价: 0.85 元

序 言

偏微分方程(数学物理方程)是应用数学的一个重要分支。在近代数理方程的研究中,明显地看出两种不同的方向:一方面,生产实践和科学实验中不断提出大量的新的微分方程课题(如非均匀介质问题、不适定问题、控制问题及各种非线性问题),它们大大丰富了古典微分方程理论的内容,使之获得了新的生命;另一方面,使用较抽象的数学方法(泛函、代数等方法)研究微分方程,可以建立系统的一般性的理论,在这种理论中,当已知条件固定时,所获得的结果往往是不可以再改善的,同时,为了保证一定的结果,所需要的条件往往是不可能再降低的。

本书中,作者尝试“以热势为纲”,系统地叙述抛物型方程的某些结果,并建立较完整的理论。

长期以来,抛物型方程的研究,受到椭圆型方程研究的启发和影响。作者也遵循了“学椭圆、搞抛物”的方针。然而,在考虑两种方程的共同点的同时,作者还特别注意了两者的实质性差别。

热传导方程是最典型的抛物型方程。传热过程是不可逆过程,在此过程中,时间和空间变量是不等价的。由此出发,可以找到一个函数空间 $B^{(n,\lambda)}$,它恰当地描写了抛物型方程的各种性质,它的作用,犹如在研究椭圆型方程时使用的函数空间 $C^{(n,\lambda)}$ 。

本书共分两部分:第一部分是较完善的热势理论;第二部分中,用热势论处理了抛物型方程的一些定解问题。

在第一部分里,首先对物理热源进行了数学分类(第一章),并研究了热势的一般性质(第二章).热势的光滑性是在 $B^{(n,\lambda)}$ 空间中讨论的(第五章).细腻地分析热源作用处的温度变化情况,得到了十分重要的结果:热势的直接值具有增滑作用(第六章).

在第二部分里,建立了 $B^{(n,\lambda)}$ 空间的一系列内插估值(第二章),在它们的帮助下,采用先验估计的方法,获得了变系数抛物型方程的 $B^{(n,\lambda)}$ 估值(第一、二章),它完全类似于椭圆型方程的Schauder估值.在最后一章里,讨论了带有间断系数的抛物型方程的一些定解问题.

许多作者,如Gevrey, Nirenberg, Выборны, Ciliberto, Friedman, Камынин 和 Тихонов等,在抛物型方程方面做了很多出色的工作¹⁾,他们的结果,本书中略有介绍.

为了清晰起见,本书中只讨论了一个空间变量的情形.本书的所有结果,都已经推广到多个空间变量的情形²⁾.

本书是1973年夏天脱稿的.在写作过程中,中国科学院数学研究所关肇直同志和吴新谋同志给了多方面的帮助和热情的鼓励,中国科学院理论物理研究所郝柏林同志,复旦大学李大潜同志、北京大学姜礼尚同志,阅读了有关的章节,提出了宝贵的意见.作者在此对他们表示衷心的感谢.

王 潼
1979.3.

1) 见参考文献 [3] 至 [11].

2) 见参考文献 [12] 至 [18].

目 录

序言

第一部分 热势论基础

第一章 热传导和热势	1
第一节 各种热传导问题	1
第二节 基本解的性质	9
第三节 各种热势的意义	17
第二章 热势的基本性质	20
第一节 微分公式	20
第二节 基本公式	22
第三节 跃度公式	26
第三章 各种热传导问题的解法	33
第一节 热传导边值问题	33
第二节 哥西问题	37
第四章 极值原理	41
第一节 极值原理和极值点热流方向定理	41
第二节 各种热传导问题解的适定性	47
第五章 热势的光滑性	55
第一节 B 函数类	55
第二节 曲线热势的光滑性	59
第三节 面热势的光滑性	74
第四节 泊阿松积分的光滑性	84
第六章 热势直接值的增滑作用	89
第一节 曲线热势直接值的增滑作用	89

第二节 热势论的一个逆问题.....	108
--------------------	-----

第二部分 热势论在数学物理中的应用

第一章 B 估值.....	113
第一节 热传导边值问题的 $B^{(1, \lambda)}$ 解	113
第二节 热传导边值问题的光滑解.....	122
第二章 先验估值.....	137
第一节 $C^{(n, \lambda)}$ 和 $B^{(n, \lambda)}$ 空间	137
第二节 变系数抛物型方程的先验估值.....	151
第三节 变系数抛物型方程各种边值问题的光滑解.....	167
第三章 具有间断系数的抛物型方程.....	176
第一节 具有间断系数的热传导方程.....	176
第二节 具有间断系数的抛物型方程.....	184
附录一 强极值原理的证明.....	197
附录二 泛函分析的一些基础知识.....	203
参考文献.....	209

第一部分 热势论基础

第一章 热传导和热势

第一节 各种热传导问题

§1 有关热传导的一些知识

热传导是一种常见的物理现象,其宏观描述是以下述物理概念和实验定律为基础的.为简便计,只讨论均匀杆状物体,并假定杆足够细,因之,它的各个横截面上所有点的温度都一样.

设 s 是杆的横截面积, ρ 是它的密度, c 是它的比热.由于杆是均匀的, s 、 ρ 和 c 都是常数.把长为 Δx 一小段杆的温度提高 Δu 时所需要的热量为

$$\Delta Q = cps\Delta x\Delta u. \quad (1.1)$$

杆上的温度 $u(x, t)$ 是空间变量 x 和时间变量 t 的函数.当杆上温度不均匀时,热量便从较高处传向温度较低处,即杆中产生热流.傅立叶根据实验得到了下面的定律:在 Δt 时间内,流经截面 x 的热量是

$$\Delta Q = -ds\Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (1.2)$$

其中 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 是杆上 x 截面处的温度梯度, d 是导热系数.

在杆内有热源存在时,引入热源强度的概念:单位时间内单位体积杆中产生(或吸收)的热量叫热源强度.

设热源强度 $F(x, t)$ 为连续函数, 则在 t 到 $t + \Delta t$ 时间段内, 从 x 到 $x + \Delta x$ 一段杆上得到的热量可以写成

$$\Delta Q = s \Delta x \Delta t F(x, t). \quad (1.3)$$

§ 2 热传导方程

讨论一小段杆 Δk , 其左端点为 x_1 , 右端点为 x_2 .

在时刻 t_i , 杆上的温度为 $u(x, t_i)$, $i = 1, 2$. 从时刻 t_1 到时刻 t_2 , 杆的温度提高了

$$\Delta u = u(x, t_2) - u(x, t_1).$$

按照式 (1.1), 把 Δk 的温度提高 Δu 时所需要的热量为

$$Q_1 = c \rho s \int_{x_1}^{x_2} [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi;$$

另一方面, 根据式 (1.3), Δk 上热源放出热量为

$$Q_2 = s \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau;$$

最后, 考察 Δk 两端热量流动情况. 依据式 (1.2), 从 t_1 到 t_2 时间段内, 流经 x_1 截面的热量为

$$Q_3 = -ds \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} d\tau,$$

流经 x_2 截面的热量为

$$Q_4 = -ds \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} d\tau.$$

为简化问题, 我们先假定杆的侧面是绝热的. 这样, 根据能量守恒定律, Δk 上的热量应该是平衡的, 也就是说, 等式

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 - Q_4 \quad (1.4)$$

应成立. 把 Q_i 的表示式代入式 (1.4) 后, 得到

$$c \rho \int_{x_1}^{x_2} [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau + d \left[\int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] d\tau. \quad (1.5)$$

这便是杆内部(指除去两端)热传导现象的一种数学描述。式(1.5)叫做积分形式的热传导方程。

假设 $u(x, t)$ 对 x 两次连续可微, 对 t 连续可微一次。把式(1.5)改写为

$$c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (1.6)$$

或

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.7)$$

其中

$$a^2 = \frac{d}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}. \quad (1.8)$$

式(1.7)叫做微分形式的热传导方程, 或简称热传导方程, a^2 叫导热系数。当 $f \equiv 0$ 时, 即杆中无热源时, 式(1.7)叫做齐次热传导方程。

如果杆的侧面不是绝热的, 则杆与周围介质有热交换。热交换时, 热量仍从温度较高处流向温度较低处。根据牛顿热交换定律, 在单位时间内, 单位长度的杆所失去的热量为

$$\bar{Q} = h(u - \bar{u}),$$

这里, u 为杆的温度, $\bar{u}$ 为杆周围介质的温度(它是已知函数), h 叫热交换系数。

当杆的侧面不绝热时, 在推导(1.7)的过程中, 应将 $F(x, t)$ 写为 $F(x, t) - h(u - \bar{u})$, 方程(1.7)变为

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x, t), \quad (1.9)$$

其中

$$b = \frac{h}{c\rho}, \quad f = b\bar{u} + \frac{\dot{F}}{c\rho}. \quad (1.10)$$

§ 3 初始条件和边界条件

杆上的温度分布,除去遵循热传导规律外,显然,还同杆的初始热状态及杆两端的热状态有关.

初始热状态指的是 $t = 0$ 时杆上的温度分布

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.11)$$

这里, $\varphi(x)$ 定义在区间 $k = (0, K)$ 内, K 是杆的长度, 杆左端位于坐标原点处.

杆两端的热状态,经常有以下几种情况.

1) 杆两端的温度按给定的规律变化:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(K, t) = \mu_2(t); \end{cases} \quad (1.12)$$

其中 $\mu_i(t)$ 定义在时间区间 $t = [0, T]$ 内, 在这段时间里, 我们考察杆上的温度分布的变化情况, $i = 1, 2$.

2) 杆两端的热流强度是已知的, 即给定了单位时间内流过两端截面的热量:

$$\begin{aligned} Q(0, t) &= -ds \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}, \\ Q(K, t) &= -ds \frac{\partial u(K, t)}{\partial x}; \end{aligned}$$

这时, 杆两端截面处的温度梯度是给定的:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -\frac{Q(0, t)}{ds} = v_1(t), \\ \frac{\partial u(K, t)}{\partial x} = -\frac{Q(K, t)}{ds} = v_2(t); \end{cases} \quad (1.13)$$

这里的 $v_i(t)$ 定义在 t 内, $i = 1, 2$.

3) 如果杆两端不是绝热的, 而与杆端介质有热交换, 那

么,在单位时间内,从杆端流出的热量是

$$\bar{Q} = h(u - \bar{u})S, \quad (1.14)$$

其中 $\bar{u}$ 是杆端介质的温度, $\bar{Q}$ 应同杆端截面处的热流强度相等,即

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{h_1}{d} u(0, t) = \frac{h_1}{d} \bar{u}_1(t), \\ \frac{\partial u(K, t)}{\partial x} + \frac{h_2}{d} u(K, t) = \frac{h_2}{d} \bar{u}_2(t); \end{cases} \quad (1.15)$$

此处, $\bar{u}_1(t)$ 和 $\bar{u}_2(t)$ 以及 h_1 和 h_2 分别是杆两端介质的温度和它们的热交换系数。

通常,式 (1.11) 叫初始条件或始值条件,式 (1.12)、(1.13) 和 (1.15) 叫边界条件或边值条件。

§ 4 杆的伸缩

前面,假定了杆的两端是固定不动的。但是,很多实际问题中,杆两端(或一端)的位置是随时间而变化的。最简单的情况是杆的长度随温度变化而伸缩。考虑到这种情况,应当认为杆两端的位置(或杆长)是时间的函数,例如,杆左端位置随时间变化的规律用函数 $x = \phi_1(t)$ 描写,而另一端是 $x = \phi_2(t)$ 。

在讨论杆上温度分布时,经常认为杆的伸缩规律是已知的,即 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 是事先给定的。这时,边界条件的形状也随时间而变化,即在式 (1.12), (1.13) 和 (1.15) 中应将 0 和 K 分别变换为 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 。

§ 5 有限均匀体的热传导问题

数学物理中有限均匀体的热传导问题的提法是: 当已知杆端位置变化情况,在给定杆的初始温度和杆两端的热状态

后,按热传导规律确定杆上的温度分布,即根据已知的初始条件和边界条件寻找热传导方程的解.

现在,依据边界条件的不同形状,列出热传导方程的各种定解问题.

设

$$S_i = \{(x, t), x = \phi_i(t), 0 \leq t \leq T\} \quad (i = 1, 2)$$

是 (x, t) 平面上两条不相交的曲线, $\phi_2(t) > \phi_1(t)$, $0 \leq t \leq T$. 以两条平行的直线 $t = 0$ 和 $t = T$ 及上述两条曲线为界的开曲边梯形区域记为 g :

$$g = \{(x, t), \phi_1(t) < x < \phi_2(t), 0 < t < T\}.$$

第一边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k = \{x, \phi_1(0) \leq x \leq \phi_2(0)\}; \\ u|_{S_i} = \chi_i(t), & i = 1, 2, \quad t \in l = \{t, 0 \leq t \leq T\}; \end{cases}$$

第二边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{S_i} = \chi_i(t), & i = 1, 2, \quad t \in l; \end{cases}$$

第三边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in g; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in k; \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_i(t) u \right]_{S_i} = \chi_i(t), & i = 1, 2, \quad t \in l. \end{cases}$$

满足以下条件的函数 u 称为上述问题的(古典)解:

1) $u(x, t)$ 在开区域 g 内满足热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t);$$

2) $u(x, t)$ 在闭区域 $\bar{g}$ 内连续, 并且, 在 k 内,

$$u(x, 0) = \varphi(x);$$

当问题为第二或第三边值问题时, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 $\bar{g}$ 内连续;

3) $u(x, t)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 或它们与 $\alpha_i(t)$ 所构成的线性组合在曲线 S_i 上取给定的边值 $\chi_i(t)$, $i = 1, 2$.

还有一个问题值得注意。热传导问题如果提得合理, 杆的初始热状态和其两端的热状态必然有一定的协调关系。例如, 对第一边值问题而言, 由初始条件给出的杆端的初始温度, 应该和由边界条件所确定的杆端在初始时刻的温度是一致的, 也就是说等式

$$\chi_1(0) = \varphi(\psi_1(0)),$$

$$\chi_2(0) = \varphi(\psi_2(0))$$

应该成立。这便是第一边值问题的协调条件。类似地, 第二和第三边值问题的协调条件分别是:

$$\chi_i(0) = \frac{d\varphi(\psi_i(0))}{dx}, \quad i = 1, 2;$$

$$\chi_i(0) = \frac{d\varphi(\psi_i(0))}{dx} + \alpha_i(0)\varphi(\psi_i(0)), \quad i = 1, 2.$$

§ 6 哥西问题

当杆足够长时, 在较短的时间内, 杆两端的热状态对杆中部的温度影响很弱。这时, 如果杆上没有热源, 那么, 杆内部的温度分布主要取决于杆的初始温度, 因此, 杆的长度的意义就不大了。换言之, 在这种情况下, 我们将讨论无穷长杆上的热传导问题, 或热传导始值问题。它亦称哥西问题, 其提法是: 寻找在闭半平面 $t \geq 0$ 上定义的函数 $u(x, t)$, 使其在开半平面 $t > 0$ 上满足齐次热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, -\infty < x < \infty,$$

并在 $t = 0$ 时取已给的初始值:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

§ 7 两种不同介质中的热传导问题

现在, 假定杆是由两种不同的均匀介质构成的. 设第 i 种介质的温度为 $u_i(x, t)$, 导温系数为 a_i^2 , 比热为 c_i , 密度为 ρ_i , 其中热源的强度为 $F_i(x, t)$, $i = 1, 2$.

为了写出这两种介质中的热传导问题, 引入下列符号.

设

$$S_j = \{(x, t), x = \phi_j(t), 0 \leq t \leq T\} \quad (j = 1, 2, 3)$$

是 (x, t) 平面上三条互不相交的曲线, S_1 和 S_3 是杆左右端点运动的轨迹, S_2 是两种介质分界点移动的轨迹. 区域

$g_i = \{(x, t), \phi_i(t) < x < \phi_{i+1}(t), 0 < t < T\}$ ($i = 1, 2$) 是由杆端所限、由介质分界点所分的相邻的两个开曲边梯形. 区间

$k_i = \{x, x_i = \phi_i(0) \leq x \leq \phi_{i+1}(0) = x_{i+1}\}$ ($i = 1, 2$) 是杆的两部分的初始位置, x_i 是介质分界点的初始位置.

在介质分界点上, 我们考虑温度和热流平衡关系式的一般形式:

$$u_1|_{S_{2-}} - u_2|_{S_{2+}} = \xi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\delta_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{S_{2-}} - \delta_2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{S_{2+}} = \zeta(t), \quad 0 \leq t \leq T;$$

此处, 记号 S_{2-} 和 S_{2+} 分别表示从区域 g_1 和 g_2 方面所取的在 S_2 上的极限值. 上述二关系式称为交界条件.

这样, 两种不同介质中的热传导问题构成了带有间断系数的热传导方程的边值问题, 它的提法是: 寻找在闭区域 $\bar{g}_i$ 内连续的函数 $u_i(x, t)$, 使之在 g_i 内满足方程

$$L_i u_i = a_i^2 \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = f_i(x, t) \\ = \frac{F_i(x, t)}{c_i \rho_i}, \quad i = 1, 2;$$

以及以下诸条件:

1) 初始条件

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad x \in k_i, \quad i = 1, 2;$$

2) 交界条件

$$u_1|_{s_{2-}} - u_2|_{s_{2+}} = \xi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\delta_1(t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{s_{2-}} - \delta_2(t) \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{s_{2+}} = \zeta(t), \quad 0 \leq t \leq T;$$

3) 边界条件

$$u_i|_{s_j} = \chi_i(t), \quad t \in l, \quad j = 2i - 1,$$

$$i = 1, 2. \quad (\text{第一边值问题})$$

或

$$[\partial u_i / \partial x + \alpha_i(t) u_i]_{s_j} = \chi_i(t), \quad t \in l, \quad j = 2i - 1,$$

$$i = 1, 2. \quad (\text{第二、三边值问题})$$

同有限均匀体热传导边值问题一样,要使上述问题有解,还必须在杆两端点及介质分界点处 $(x_j = \phi_j(0), 0) (j = 1, 2, 3)$ 成立相应的协调条件,即在这些点上,问题的边界条件、初始条件和交界条件间要满足一定的协调关系(等)式。

第二节 基本解的性质

本书内,采用数学物理的方法讨论宏观上的各种热传导现象。在我们所使用的方法中,热源的研究起着非常重要的作用。我们将按分布区域和作用方式对热源进行数学分类,并讨论它们对杆的温度的影响。这里,先对热源的概念做数

学的抽象,以阐明其准确的涵意.

§ 1 瞬时点热源

今后,除非特别指明,只讨论侧面绝热的无穷长杆,在时刻 τ 以前,杆上各处温度均为零. 假定从 τ 到 $\tau + \Delta\tau$ 这段时间内,在杆上 ξ 处有一热源作用,放出热量 Q , 它使 ξ 处附近的温度有了变化,或使杆上温度分布变为

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0, & x > \xi + \Delta\xi, x < \xi - \Delta\xi, \\ u_{\Delta}(x) > 0, & \xi - \Delta\xi < x < \xi + \Delta\xi, \end{cases}$$

其中 $u_{\Delta}(x)$ 为连续函数.

这时,根据式 (1.1) 有

$$c\rho \int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi} u_{\Delta}(x) dx = Q. \quad (2.1)$$

如果当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时, $\Delta\xi \rightarrow 0$, 并且,当 $\Delta\tau$ 足够小时,式 (2.1) 恒成立,因之,

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[c\rho \int_{\xi-\Delta\xi}^{\xi+\Delta\xi} u_{\Delta}(x) dx \right] = Q. \quad (2.2)$$

这时,我们称在时刻 τ 在杆上 ξ 处作用有一个强度为 Q 的瞬时点热源, τ 为热源作用的瞬时, ξ 为热源的作用点.

§ 2 基本解

定义 在强度为 $Q = c\rho$ 、作用点为 ξ 、作用瞬时为 τ 的瞬时点热源作用下,描写时刻 τ 前温度为零的无穷长杆上温度变化的函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 叫做热传导方程

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

的基本解.

为了寻求基本解,先假设限定热源形成方式的 (2.2) 式