Hou Zhenting

THE Q－MATRIX PROBLEM FOR MARKOV CHAINS

马尔可夫过程的Q－矩阵问题

● 侯振挺等著

● 湖南科学技术出版社

The Q-matrix Problem for Markov Chains

马尔可夫过程的Q-矩阵问题

侯振挺　邹捷中　张汉君　刘再明
肖果能　陈安岳　费志凌著

湖南科学技术出版社

马尔可夫过程的Q矩阵问题

编写著者: 侯振挺等

责任编辑: 胡海清

出版发行: 湖南科学技术出版社

(长沙市展览馆路3号)

印　　刷: 湖南省新华印刷三厂

印装质量问题请直接与本厂联系

厂　　址: 长沙市韶山路158号

邮政编码: 410004

经　　销: 湖南省新华书店

出版日期: 1994年9月第1版第1次

开　　本: 850×1168毫米　1/32

印　　张: 18.5

插　　页: 4

字　　数: 488000

印　　数: 1-1100

征订期号: 地科154-001

书　　号: ISBN 7-5357-1532-X/O·122

定　　价: 22.50元

湘新登字004号

序

可列马尔可夫过程(以下简称马尔可夫过程)构造理论是可列马尔可夫过程理论的重要部分。D. Williams 教授把构造理论的定性部分(存在性和唯一性)叫做 Q—矩阵问题。本书是我和我的同事们长期以来在 Q—矩阵问题方面研究成果的一个总结。最近,美国数学会出版的"当代数学丛书"118 卷《概率论及其应用在中国》的"Q—矩阵问题"一章就是本书的一个摘要。

粗略说来,"Q—矩阵问题"主要研究"对任一矩阵 Q,给出 Q 过程存在性和唯一性条件"。该问题于 1931 年由 Kolmogorov 提出,起初主要研究保守情形,由 Doob 和 Reuter 完成。进而,研究全稳定情形和全瞬时情形,前者由 Doob、Reuter 和侯振挺最终于 1974 年完成;后者由 D. Williams 于 1976 年完成。1974 年后,侯振挺把原来 Kolmogorov 所提出的问题和有关概念加以扩充,提出了所谓"定性理论",大大丰富了 Q—矩阵问题的研究内容,并得到了完整的结果。对于既有稳定态,又有瞬时态的一般情形,由于概率直观模糊,分析表达复杂,直到 70 年代末,这方面研究进展甚微。80 年代初,陈安岳同志得到有关禁止概率的一个分解定理,并立即意识到这个定理是研究一般情形下 Q—矩阵问题的一个有力工具。于是,陈安岳、邹捷中、张汉君、刘再明、费志凌等同志近十年来在这方面积极地开展了一系列的研究,使一般情形下的 Q—矩阵问题

有了突破性的进展。最近，我们把这些结果整理成书。就在这成书之即，我们又取得了一些可喜的结果，可望在不久的将来能最后完成 Q—矩阵问题的主要研究——Q 过程的存在性与唯一性。

本书由侯振挺主持编写。侯振挺为全书编定了篇章结构和内容，具体执笔者为邹捷中、张汉君、刘再明、肖果能等人。其中邹捷中撰写绪论及第一章、第二章、第十八章；刘再明撰写第三章至第十二章；张汉君撰写第十三章至第十五章；肖果能撰写第十六章、第十七章。全书最后由侯振挺审定。

由于作者才疏学浅，书中难免有这样那样的错误，敬请同志们批评指正。

在本课题的研究过程中，我们始终得到数学界前辈苏步青、陈省身、D. G. Kendall、K. L. Chung、N. Ikeda、王梓坤先生以及王寿仁、胡国定、梁之舜、严士健、钱敏、苗邦均等先生的关心和鼓励。严加安、胡迪鹤、陈木法、陈培德、吴荣、钱敏平、龚光鲁、戴永隆、郭青峰、杨向群、黄志远、汪嘉冈、何声武、吴让泉、张文修、黄之瑞、刘文、刘秀芳、郑伟安、马志明等同志对本书的酝酿和写作一直给予支持和帮助，高镇宁、陶敏、张寅南、欧阳庆等同志以及湖南科学技术出版社的同志们为本书的出版倾注了许多心血，长沙铁道学院科研所方小斌、胡达轩同志为本书的打印和排版做出了很大贡献。此外，国家自然科学基金委员会对 Q—矩阵问题的研究一直给予了资助，在此一并致谢。

侯振挺

1994 年 3 月 23 日

目　录

马尔可夫过程是一类重要的随机过程，它的原始模型马尔可夫链，由俄国数学家 A. A. 马尔可夫于 1907 年提出。粗略说来，所谓马尔可夫性可以用下述直观语言来刻划：在已知系统目前的状态(现在)的条件下，它未来的演变(将来)不依赖于它以往的演变(过去)，换言之，在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”无关。具有这种特性的随机过程称为马尔可夫过程。荷花池中一只青蛙的跳跃是马尔可夫过程的一个形象化例子。青蛙按照它瞬间或起的念头从一片荷叶上跳跃到另一片荷叶上。如果青蛙是没有记忆的，人们自然可以假定，当已知青蛙在某时刻所处的位置时，它下一步跳往何处与它此前走过的路径无关。如果将荷叶编号(例如编号为自然数 1,2,3,…)，并用 X_0 表示青蛙在初始时刻所处的荷叶的号码，用 $X_1,X_2,\cdots$ 分别表示青蛙经过第一次，第二次，……跳跃后所处的荷叶的号码，那么，随机序列 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 就是一个马尔可夫过程。其实，人们在实际中所遇到的许多过程如液体中固体微粒所作的布朗运动，原子核中一自由电子在轨道中的跃迁，人口增长过程等等都可视为马尔可夫过程。

上述青蛙跳跃的过程 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 也可以记为 $\{X_t,t\in T\}$，其中 $T=\{0,1,2,\cdots\}$。我们形象地称 T 为时间参数集，而称 $\{X_t,t\in T\}$ 的值域 E 为过程的状态空间。自然，马尔可夫过程的时间参数集和

状态空间不必囿于离散集，例如可取 $T=[0,\infty)$，$E=(-\infty,\infty)$。在本书中，我们将只研究时间参数集 $T=[0,\infty)$，状态空间为离散集(例如 $E=\{0,1,2,\cdots\}$)的马尔可夫过程。

有了以上的直观认识和说明，我们可以给出离散状态空间马尔可夫过程的严格数学定义。设随机过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为一个离散状态空间马尔可夫过程，如果它具有马尔可夫性：

对任意 $n\geqslant 2$，任意 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意使 $P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n)>0$ 的 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in E$，有

$$P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})=P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_{n-1}}-i_{n-1}).\qquad(1)$$

上式直观解释是在已知“现在”$(X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$的条件下，“将来”$(X_{t_n}=i_n)$与“过去”$(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots X_{t_{n-2}}=i_{n-2})$无关。

因此，如 $P(X_s=i)>0$，可定义

$$p_{ij}(s,t)=P(X_t=j\,|\,X_s=i),\qquad i,j\in E,s\leqslant t.$$

称 $p_{ij}(s,t)$ 为过程 X 于 s 时在 i 条件下，于 t 时转移至 j 的转移概率。一般说来，四元函数 $p_{ij}(s,t)$ 依赖于 i,j,s,t 。如果对一切 i,j，$p_{ij}(s,t)$ 只依赖于差 $t-s$，也即

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(0,t-s),\qquad s\leqslant t.$$

则称其对应的马尔可夫过程为齐次马尔可夫过程。 记 $p_{ij}(t)=p_{ij}(0,t)$，$t\geqslant 0$，则有

$$\begin{cases} p_{ij}(t)\geqslant 0; \\ \sum\limits_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1; \\ p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s). \end{cases}\qquad(2)$$

由于$(p_{ij}(t))$完全刻划了齐次马尔可夫过程 X，因此，以后我们径称满足条件(2)的实函数族$(p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$为一个马尔可夫过程。如果还有

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如 } i=j; \\ 0, & \text{如 } i\neq j.\end{cases}\qquad(3)$$

则称 $(p_{ij}(t))$ 为一个标准马尔可夫过程。在本书中，我们以$(p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$作为讨论的出发点和主要研究对象。

本书的目的是，从最基本的概念出发，逐步展开马尔可夫过程的 $Q-$ 矩阵问题的讨论。对于标准马尔可夫过程，其转移概率 $p_{ij}(t)$ 具有较好的解析性质，例如

$$q_{ij}\triangleq p'_{ij}(0)=\lim_{t\to 0}p_{ij}(t) \tag{4}$$

存在，且

$$\begin{cases}0<q_{ij}<\infty, & i\neq j;\\ \sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\leqslant -q_{ii}\triangleq q_i\leqslant\infty.\end{cases} \tag{5}$$

称矩阵 $Q=(q_{ij})$ 为标准马尔可夫过程 $(p_{ij}(t))$ 的密度矩阵，习惯上也称为 $Q-$ 矩阵。因为在实际问题中，Q 往往比 $(p_{ij}(t))$ 更容易得到。于是，所谓 $Q-$ 矩阵问题应运而生，即任给一个形如(5)的矩阵 $Q=(q_{ij})$，是否存在一个标准马尔可夫过程 $(p_{ij}(t))$，使得 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$。如果过程存在，是否唯一。我们把存在性和唯一性称为 $Q-$ 矩阵问题。自 1931 年始，半个多世纪来，不少著名的概率论学者，例如 Kolmogorov、Doob、Feller、K. L. Chung、Kendall 等人均在该问题上开展过工作，并作出了重要贡献。三十多年来，我国概率论工作者，如王梓坤、侯振挺、杨向群、陈木法等人也对这一领域进行了广泛深入的研究，取得了可喜的成就，并有若干专著出版。

关于 $Q-$ 矩阵问题，以往的专著大多限于全稳定情形，对于瞬时态情况的研究则大多散见于各种刊物中。本书的讨论范围不限于全稳定态情形。

关于马尔可夫过程理论特别是马尔可夫过程的构造理论的研究，历来有概率方法和分析方法。概率方法的直观形象明晰，概率意义比较清楚；分析方法则有表达简洁、明快的特点。两者各有优点与不足之处，均取得一定成果。就应用而言，也许物理学家、生物学家、化学家等专家更钟爱概率方法所表述的结果，而分析方法表述的结果更适用于将概率论与其他数学学科的成就联系起来或利用现代数学的成果。例如 Itô 建立的随机微分方程理论，Feller 在马尔可夫过程研究中引入的泛函分析半群方法，角谷静夫、Doob 等人发现的布朗运动与狄利克雷问题的联系，后来 Hunt 等人研究的

相当一般的马尔可夫过程与位势理论的关系以及新近十几年发展起来的 Malliavin 分析都是这方面的例证。本书着力于使用分析方法研究 Q—矩阵问题。

在运用分析方法研究 Q—矩阵问题方面，我们不能不提到最近辞世的著名英国学者 G. E. H. Reuter 教授，Reuter 教授倾毕生精力于 Q—矩阵问题的研究，建树良多，功不可没，对中国概率论工作者的工作一直给予热情的关注和支持，因此我们愿在本书出版之际表达对 Reuter 教授的怀念和敬意。

本书分五篇凡十八章，第一篇是预备性的，叙述了马尔可夫过程的一些基本概念、性质及本书中将用到的分析工具。所用到的主要分析工具是拉普拉斯变换(以下简称拉氏变换)。由于 $p_{ij}(t)$ 与其拉氏变换 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 一一对应，故我们可以将对 $p_{ij}(t)$ 的研究转化为对更易于处理的拉氏变换的研究。在第一篇里，我们还专辟一章叙述 Q 过程的分解定理，它们在以后构造 Q 过程特别是含瞬时态的 Q 过程中具有重要作用。第二篇讨论 Q 过程的存在性。全稳定 Q 过程和全瞬时态 Q 过程的存在性准则分别由 Feller 和 Williams 得到。至于既含瞬时态又含稳定态的情况，尚无一般性的存在准则，但是，利用禁止概率分解定理，我们可以得到一些特殊情况下的存在性准则，例如陈安岳给出了有限个稳定态无限个瞬时态 Q 过程的存在性准则。第三篇讨论 Q 过程的唯一性。第四篇是关于 Q—矩阵问题的进一步讨论，如定性理论、极大 Q 过程、可逆 Q 过程等特殊专题。第五篇分三章讨论了与 Q—矩阵问题有关联的三个论题。

对本书材料的取舍我们是颇费踌躇的，既要保持本书材料的自封闭，让初学者读了这本书能尽快达到本专业的某个前沿，又要使专家们也能从本书获益，实在是超出了作者们的能力范围。好在目前国内外已出版有许多优秀的专著，例如 K. L. Chung[1]，D. Williams[5]，王梓坤[1,2]，侯振挺、郭青峰[1]，杨向群[1]，专家读者可从这些书中得到收益。因此，我们选择了从最基本的概念出发，循序渐进地展开，力图反映作者们在 Q—矩阵问题上的最新成果，其中也参考和引用了他人的成果，本书中提到的某些结果，肯

1 问题的提出

§1 马尔可夫过程

设 E 为可列集.

定义 1.1.1 一个马尔可夫过程(以下简称马氏过程或过程),是指具有下列性质的一族实值函数 $p_{ij}(t)$ $(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$:

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\qquad (i,j\in E,\ t\geqslant 0);\tag{1.1.1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1,\qquad (i\in E,\ t\geqslant 0);\tag{1.1.2}$$

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ (i,j\in E,\ s,t\geqslant 0);\tag{1.1.3}$$

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j;\end{cases}\quad (i,j\in E).\tag{1.1.4}$$

记为$(p_{ij}(t);\ i,j\in E)$ 或$(p_{ij}(t))$,或用矩阵形式记为 $P(t)$.

若还有

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1,\quad (i\in E,\ t\geqslant 0),\tag{1.1.5}$$

则称$(p_{ij}(t))$ 为诚实的(或不中断的)马氏过程,否则称为非诚实的(或中断的).

条件(1.1.1)—(1.1.4)也可用矩阵形式写为:

$$P(t)\geqslant \mathbf{0},\qquad (t\geqslant 0);\tag{1.1.1$'$}$$

$$P(t)\mathbf{1}\leqslant \mathbf{1},\qquad (t\geqslant 0);\tag{1.1.2$'$}$$

$$P(s+t)=P(s)P(t),\quad (s,t\geqslant 0);\tag{1.1.3$'$}$$

$$P(0)=\mathbf{I},\tag{1.1.4$'$}$$

其中 **I** 为单位矩阵$(\delta_{ij},i.\ j\in \mathrm{E})$,**1** 表每个分量均为 1 的列向量,**0** 表

每个分量均为 0 的矩阵.

条件(1.1.5) 也相应地可以写为

$$P(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}, \qquad (t\geqslant 0). \tag{1.1.5$'$}$$

注 1 在本书中记号$(p_{ij}(t))$或$P(t)$有两种意义,它或者表示一个马氏过程,或者表示函数$p_{ij}(t)$构成的矩阵$(p_{ij}(t))$,因含义甚明,不再一一述及.

注 2 条件(1.1.1),(1.1.2) 称为范条件,(1.1.3) 称为 K－C(Колмогоров － Chapman) 方程.

下面的定理说明,对于一个非诚实的马氏过程,总可以化为诚实的过程.

定理 1.1.1 设$P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E)$为一个马氏过程,任取$\Delta\notin E$,令$\hat{E}=E\cup\{\Delta\}$.

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t), & i,j\in E;\\ 1-\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t), & i\in E, j=\Delta;\\ 0, & i=\Delta, j\in E;\\ 1, & i=j=\Delta.\end{cases} \tag{1.1.6}$$

则$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);i,j\in\hat{E})$是一个诚实的马氏过程.

证明 显然有

$$\hat{p}_{ij}(t)\geqslant 0, \quad (i,j\in\hat{E}); \tag{1.1.7}$$

$$\sum_{j\in\hat{E}}\hat{p}_{ij}(t)=1, \quad (i\in\hat{E}). \tag{1.1.8}$$

注意到$\hat{p}_{\Delta j}(t)=0,(j\in E)$,得

$$\hat{p}_{\Delta j}(t+s)=0=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{kj}(s), \quad (j\in E). \tag{1.1.9}$$

注意

$$\hat{p}_{i\Delta}(t)=1-\sum_{k\in E}p_{ik}(t), \quad (i\in E),$$

得

$$\hat{p}_{i\Delta}(t+s)=1-\sum_{j\in E}p_{ij}(t+s)$$

$$= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t) - \sum_{j\in E}\sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} p_{ik}(t) + \hat{p}_{i\Delta}(t) - \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\sum_{j\in E} p_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)(1 - \sum_{j\in E} p_{kj}(s)) + \hat{p}_{i\Delta}(t)$$

$$= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s) + \hat{p}_{i\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)$$

$$= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s), \quad (i \in E). \tag{1.1.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ij}(t+s) &= p_{ij}(t+s)\\ &= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s)\\ &= \sum_{k\in E} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s)\\ &= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s), \quad (i,j \in E).\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_{\Delta\Delta}(t+s) &= 1\\ &= \hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)\\ &= \sum_{k\in E} \hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s) + \hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)\\ &= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s).\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

又显然有

$$\hat{p}_{ij}(0) = \delta_{ij}, \qquad (i,j \in E); \tag{1.1.13}$$

$$\hat{p}_{\Delta j}(0) = 0, \qquad (j \in E); \tag{1.1.14}$$

$$\hat{p}_{\Delta\Delta}(0) = 1; \tag{1.1.15}$$

$$\hat{p}_{i\Delta}(0) = 1 - \sum_{j\in E} p_{ij}(0) = 0. \tag{1.1.16}$$

由(1.1.7)—(1.1.16)知 $\hat{P}(t)$ 是一个诚实的马氏过程.

定理 1.1.2 设 $P(t) = (p_{ij}(t); i,j \in E)$ 为一个诚实的马氏过程,对任意 $\lambda > 0$,令

$$\tilde{p}_{ij}(t) = e^{-\lambda t} p_{ij}(t). \tag{1.1.17}$$

则 $\tilde{P}(t) = (\tilde{p}_{ij}(t); i,j \in E)$ 为一个非诚实的马氏过程.

证明 显然有

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant 0; \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ij}(s+t) &= e^{-\lambda(s+t)} p_{ij}(s+t) \\
&= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{k\in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{k\in E} (e^{-\lambda s} p_{ik}(s)) \cdot (e^{-\lambda t} p_{kj}(t)) \\
&= \sum_{k\in E} \tilde{p}_{ik}(s) \tilde{p}_{kj}(t);
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

$$\tilde{p}_{ij}(0) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}; \tag{1.1.20}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in E} \tilde{p}_{ij}(t) &= \sum_{j\in E} e^{-\lambda t} p_{ij}(t) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{j\in E} p_{ij}(t) \\
&= e^{-\lambda t} < 1.
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

由(1.1.18)—(1.1.21)知，$\tilde{P}(t)$ 为一个非诚实的马氏过程.

§2 可测马尔可夫过程

定义 1.2.1 设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为一马氏过程，如果对任意 i，$j \in E$，$p_{ij}(t)$ 是 $t \in (0,\infty)$ 的 Lebesgue 可测函数，则称 $P(t)$ 为可测马尔可夫过程，简称为可测马氏过程或可测过程.

引理 1.2.1 设 $P(t) = (p_{ij}(t); i,j \in E)$ 为一马氏过程，$\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t); i,j \in \hat{E} = E \cup \{\triangle\})$ 为定理 1.1.1 中定义的诚实过程，则 $P(t)$ 为可测过程当且仅当 $\hat{P}(t)$ 为可测过程.

证明 充分性显然. 往证必要性：

由 $\hat{p}_{ij}(t)$ 的定义，若对任意 $i,j \in E$，$p_{ij}(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上的 Lebesgue 可测函数，则对任意 $i,j \in \hat{E}$，$\hat{p}_{ij}(t)$ 也是 $(0,\infty)$ 上的 Lebesgue 可测函数，从而 $\hat{P}(t)$ 为可测过程. 引理证毕.

下述定理刻划了可测过程.

定理 1.2.1 对任意的马氏过程 $(p_{ij}(t))$，下列断言等价：