结构振动的图表计算法

〔瑞典〕B.奥克松 H.坦福熙 O.约翰逊 著

Böjsvängande balkar och ramar

机械工业出版社

结构振动的图表计算法

[瑞典] B. 奥克松　H. 坦福熙　O. 约翰逊　著

黄纪文　译

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字 054 号

本书是瑞典土木建筑与机械工程的结构动力学教科书，也是一本结构振动的计算手册，它向读者提供了一套基本解和图表，用以计算工程结构的弯曲、拉伸、扭转和剪切振动。这套方法适用于计算机分析，也适用于手算，其理论基础是线弹性梁的准确位移法。

书中介绍了一种特殊算法，可以准确算出结构在给定区间内的全部固有频率。书中丰富的例题及其解答，有助于读者自学和应用。

本书所阐述的方法在瑞典国内外土木建筑、机械、造船、航空等部门已获得广泛应用，对于我国高等院校师生以及工程技术人员，也具有参考和应用价值。

BÖJSVÄNGANDE BALKAR OCH RAMAR
Teori, elementarfall och tabeller
för analys med exakt förskjutningsmetod
Andra utökade upplagan
Bengt Åkesson Harald Tägnfors Ole Johanesson
AWE / GEBERS STOCKHOLM 1977

*

结构振动的图表计算法
[瑞典] B.奥克松 H.坦福熙 O.约翰逊 著
黄纪文 译

*

责任编辑：夏曼苹 版式设计：王 颖
封面设计：刘 代 责任校对：陈 松
责任印制：路 琳

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
邮政编码：100037
（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32・印张 9・字数 234 千字
1992 年 12 月北京第 1 版・1992 年 12 月北京第 1 次印刷
印数 0 001—2 100・定价 9.20 元

*

ISBN 7-111-03308-6 / TB・163

译 者 的 话

本书是一本结构动力学方面的专著。它提供了一套基本解及其图表，用以计算工程结构的弯曲、拉伸、扭转和剪切振动。这套方法适用于计算机分析也适合于手算。其理论基础是线弹性梁的准确位移法。

准确位移法的特色是：不需要假定振型，也不需要质量集中，方程的建立是直接的，与结构的超静定次数无关，未知量的个数是最少的。按照书中介绍的特殊算法，可以准确地算出在给定区间内的所有固有频率。

本书的另一特点是，提供了丰富的例题及其解答过程，有助于读者自学和引用。

本书所介绍的方法及其计算机程序在瑞典国内外的土木、机械、造船和航空等部门，获得了广泛应用。这套方法对于我国高等院校和工程技术部门也有参考价值。

本书的主要作者是瑞典工程科学院院士，查尔摩斯大学（Chalmers Tekniska Högskola）奥克松（Bengt Åkesson）教授。坦福熙（Harald Tägnfors）先生和约翰逊（Ole Johannesson）先生是计算机软件专家。

为了反映准确位移法最新的应用和发展，译者在本书最后一页增加了关于半无限梁的基本解；在 1.3 历史与文献一节后面增列了近年来一些重要文献的名称，供读者参考。

本书是译者在瑞典进修期间，在作者的大力支持下进行翻译的。曾蒙瑞典李学道（Shyue-Dao Lee）博士仔细修改；译者回国后，曾征求过上海工业大学何福保教授的宝贵意见；机电部第二设计研究院查芸英女士协助校阅了全稿。译者在此一并表示衷心的感谢！

译者

第一版序

本书是一本教科书，也是一本手册。书中介绍一种特殊的方法，工程师借此运用手算或计算机计算，就可解决在土木建筑、机械、造船等方面具有实际意义的一大类振动问题。这种方法称为准确位移法。本书阐述如何应用这种方法解决梁和框在平面或空间所作的稳态、谐和的固有振动或强迫振动问题，这种梁和框的刚度和质量是逐段均布的。本书也涉及拉伸和扭转振动。这种准确位移法的理论基础，是欧拉-伯努利梁的理论。

准确位移法与一般位移法的不同之处，在于能准确地算出所有的固有频率，而不需要假定振型或将质量集中；方程的建立是直接的，与结构的超静定次数无关；未知量的个数是最少的。

本书作者假定读者熟悉梁与框的静力学，至于深入理解本书的理论，则需要具备大学材料力学和结构力学的知识。但是，对于不太熟悉上述知识的读者，作者希望他们通过研究书中具有详尽解答的例题、基本解和图表，自己也能学会解决一些简单问题。本书还专辟一章回顾矩阵和行列式运算的基本知识。

本书提供了一套适用于手算的图表。作者认为，如果具备这套图表，在梁框振动的教学中，应该先教准确位移法。在动力学的近似计算中固然有许多好的方法，但是要能适当地运用这些方法，并对其结果作出正确的解释，则要求工程师具备丰富的知识、经验和判断力。准确位移法却可用来对各种近似解进行校核。

本书的内容曾在查尔摩斯大学固体力学和结构力学教研室的报告会上讨论过。作者对提出过具体改进意见的与会者表示感谢。出版社的编辑 Britt-Marie Gustafsson 和 Göran Rusk 与作者的合作，始终是极其良好的。

Bengt Åkesson　Harald Tägnfors　Ole Johannesson

第 二 版 序

本书的第一版自从 1971 年以来，一直被选作查尔摩斯大学机械系和土木系结构动力学教科书，亦为部分工程物理系和造船系的学生所选读。在校外，本书曾被瑞典工程师协会选为进修的教材。根据本书的理论所编制的计算机程序 PFVIBAT 和 SFVIBAT，已经在瑞典国内外企业中获得广泛应用。在实践中取得的经验，已反映到本书的第二版中。

在这一版中，补充了两个对称弯曲振动的基本解，这使得运用手算取得准确解更为方便。在具有加速度基础上的梁框问题，是经常遇到的，可以利用原有的表 8.2 来解决问题。拉伸、扭转以及剪切振动问题，也是很有价值的，因此增加了一些有关内容及其相应的基本解。关于离散振动系统与连续振动系统之间的同异之处，也作了分析对比。最后，讨论了振型分析（振型综合）法以及各种计及阻尼影响的方法；这些都是从事实际工作的结构工程师和计算工程师所关心的问题。上述新增加的内容，都安排在本书的第 10 章中。在第 9 章中还增加了一个转子系统扭转振动的例子。

多年教学经验表明，把深入讲解梁与框（包括杆与轴）的振动问题作为入门，可以收到良好的效果。学生可以通过这些理论及其例题，深入理解振动现象及其基本概念，领悟到理论的作用及其适用范围，从而也就更容易理解其他各种结构动力学问题。

作者希望本书的第二版在高等教育和工业界获得更广泛的应用。

Lennart Josefson 协助校对了新老版本；Ingrid Wennesjö 打印了新版本手稿；Monica Svensson 描制了插图；出版社编辑 Britt-Marie Gustafsson 给予了自始至终的大力协助。

B.奥克松　H.坦福熙

哥德堡(Göteborg)　1977 年 4 月

目　录

第1章 绪　论

1.1 应用范围

本书讨论无阻尼线弹性梁与框的同步、稳态、谐和弯曲振动[㊀]，假定每段梁的抗弯刚度 EI 以及单位长度质量 m 均为常数。本书的理论基础是欧拉－伯努利梁的理论，假定梁挠度很小，其截面剪切变形、截面转动惯量、梁内轴力以及支座偏心等影响，均可忽略不计。

实际碰到的谐和振动，可能是由同步谐和荷载或位移引起的稳态强迫振动；也可能是固有振动。对于前者，圆频率 ω 是已知的；对于后者，ω 是未知的，本身是问题的一部分。

对于非同步的周期荷载和位移，可分别予以研究，然后应用叠加原理，获得最终结果。对于非谐和的周期荷载和位移，可展成傅里叶级数，然后逐项分析它们的影响。对于非周期的荷载和位移，可运用傅里叶变换（上述傅里叶级数变为傅里叶积分）进行分析，或运用 Duhamel 积分（或本书介绍的准确位移法）计算它们对每一固有振型的作用。

至于一般的瞬态振动和其他非周期现象，除简要地在 3.9 中介绍傅里叶积分法和在 10.7 中介绍振型分析法外，本书没有进行深入讨论。

㊀ 对于一个可变形物体来说，所谓同步振动，是指其所有质点的振动具有相同的相位；所谓稳态振动，是指经过长期观察，运动的一般性质与时间无关；所谓谐和振动，则指各点的位移具有一个与时间有关的因子 $\sin(\omega t-\alpha)$，其中 ω 为圆频率而 α 为相位，它取决于时间 $t=0$ 的选择。

1.2 内容纵览

本书应用准确位移法（亦称变形法）研究梁和框的弯曲振动问题。书中已编制成表格的刚度函数，也可用于诸如 Cross 的迭代法；而刚度函数的逆则也用于 Clapeyron 等人提出的各种力法问题。在框架的 Efsen 混合计算法中，刚度函数与柔度函数并用。

第 2 章为基本理论，阐明在梁或框振动速度为零的瞬间，如何建立梁或框的几何相容和静力平衡方程。在该瞬间梁处于振动的返回位置，梁或框在质量惯性力与相应的支座反力作用下，处于静力平衡状态。在位移法中，选择节点（如框架的角）的位移和转角作为控制变量，或主要未知量。

利用基本解图表分析问题，给位移法的应用带来很大方便。本书给出许多基本解，在分析简单的梁与框时，仅涉及少数几个未知量。表格中自变量的间距较小，一般不需进行插值。

框架中每一段梁都被赋予一个频率参数，$\beta=\omega/\omega_0$。其中 ω 为实际振动圆频率；ω_0 为参考圆频率，为该梁在两端简支时最低阶固有振动圆频率。在表 8.4 中列出了单跨梁在不同支座条件下作固有振动的一系列频率参数 β 值，可用来估计整个框架固有振动圆频率的上下限。

利用表 8.1 中的基本解 11、12 以及函数 K_1 至 K_6，已足以进行振动分析。引用其余的基本解 21 至 42 以及函数 K_7 至 K_{17}，可使未知量的个数以及计算的工作量大为减少，给手算带来很大方便。至于梁的轴向振动，可利用基本解 51、52（见半无限梁的基本解）进行分析。有关问题将在 8.3 中讨论。本书中的各种基本解，已汇集于书的后面，以便查找。

关于位移法，基本解以及各种表格的用法将在第 3 章和第 4 章中详细介绍。在第 3 章中详尽地分析一些简单问题；在第 4 章中则研究一个较复杂的框架问题，选择这一例题的目的，在于向读者阐明在利用计算机进行计算时，如何使问题的分析系统化。

在 5.3 中，回顾矩阵与行列式的基本运算法则。在 5.4 中分析由于忽略剪切变形、截面转动惯量、支座偏心以及轴向静力所引起的误差。在 5.5 中将准确位移法和近似位移法的特点作了分析对比。

1.3 历史与文献

1950 年和 1953 年，Vladimir Z Koloušek（下称柯氏）分别在他的两本教科书〔1〕㊀、〔2〕中阐述了位移法在分析受动载荷的梁与框中的应用。该书是他始于 40 年代初的一系列研究工作的成果。更早，E Fliegel（1938 年）、N I Besuchow（1938 年）以及 A A Belous（1939 年）[1][2]都曾用过这种方法进行框架动力分析。柯氏曾发现 Fliegel 理论[4]中的一些错误，由此形成他从 1941 年以来在这方面的第一篇论文[3]。A Raithel[5]、A S Veletsos 和 N M Newmark[6]以及 G L Rogers[7]于 1952、1955 以及 1959 年都曾用到梁的刚度，它们相当于文献〔1〕与〔2〕中的某些基本解。W Steinbach[8]于 1966 年重述并引用了柯氏的公式。

K Hohenemser 与 W Prager 于 1933 年在其经典教科书〔9〕中，应用一种力法和列成表格的辅助函数分析梁与框。这些表格化的函数，就是后来柯氏函数的雏形。类似的方法和表格，也可在 F K G Odqvist 的教科书〔10〕和公式汇编〔11〕中找到。即使是 R E D Bishop 和 D C Johnson，也在其著作〔12〕中应用了力法（见〔13〕）。他们所谓的敏感性，或 W.J.Duncan 称之为机械导纳的量，实质上是柯氏刚度的逆。R E Gaskell[14]早在 1943 年就建议将〔9〕中的基本概念用于 Cross 的弯矩分配法，以及 Grinter 的转角分配法。F Y Cheng[15]于 1970 年曾应用位移法，分析计及剪切变形和转动惯量后的框架的振动问题。

㊀ 见5.2参考文献，后同。

在〔1〕中柯氏函数 K_1 至 K_{17}（及其一阶和二阶差分）均以5位数字列成表格，自变量由0.00至6.00，增量为0.02（其中 K_{15}、K_{16}、K_{17} 仅计算到 $u=4.00$），大致相当于 $\beta=0.000$ 至3.648，增量为0.004，在〔6〕、〔7〕中的一些函数也已列成表格。

在〔16〕中以 $\alpha=P/P_{E2}$ 作为稳定参数，是受到以 $\beta=\omega/\omega_0$ 作为频率参数的启发。在很多问题中可以看到这两类问题是相当的。例如，在按二级理论作框架静力分析时，考虑到轴向力对梁的影响；相应地在以下按一级理论作框架动力分析时，考虑了质量惯性力对梁的影响。二级应力问题，相当于强迫振动问题；而具有平衡分支的稳定性问题，则相当于固有振动问题。有时，把与 Hohenemser、Prager 以及柯氏函数相当的函数，统称为 Berry 函数或 van der Fleet 函数。

作者希望以现代结构力学的观点来阐述准确位移法，并提供一套详尽的图表，以方便于这种方法的实际应用。

译注：

准确位移法自本书第二版问世以来的应用和发展情况，反映在一些重要文献中，根据作者提供的资料整理列出如下：

Abrahamsson T 1988: "Modal parameter extraction for nonproportionally damped linear structures". *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol 3, No 2, pp 62-68

Abrahamsson T & M Lundblad 1988: "Transient vibration analysis of nonproportionally damped linear structures using modal parameters". *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol 3, No 3, pp 108-114

Abrahamsson T & J H Sällström 1989: "Eigensolutions of non-conservative continuous mechanical systems computed by use of a matrix iteration method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (in printing)

Banerjee J R 1989: "Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 28, No 6, pp 1283-1298

Capron M D & F W Williams 1988: "Exact dynamic stiffnesses for an axially loaded uniform Timoshenko member embedded in an elastic medium". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 124, No 3, pp 453-466

Lundblad M 1989: "Eigensolutions of rotating beam systems found by use of exact finite elements" (work in progress)

Lundén R & E Kamph 1982: "Vibration isolation of a damped skeletal machine foundation - theory and experiment. *Journal of The Acoustical Society of America*, Vol 71, No 3, pp 600-607

Lundén R & T Dahlberg 1982: "Frequency-dependent damping in structural vibration analysis by use of complex series expansion of transfer functions and numerical Fourier transformation". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 80, No 2, pp 161-178

Lundén R & B Åkesson 1983: "Damped second-order Rayleigh-Timoshenko beam vibration in space - an exact complex dynamic member stiffness matrix". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 19, No 3, pp 431-449

Necib B & C T Sun 1989: "Analysis of truss beams using a high order Timoshenko beam finite element". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 130, No 1, pp 149-159

Newland D E 1987: "On the modal analysis of non-conservative linear systems". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 112, No 1, pp 69-96

Poelaert D 1977: "Dynamic analysis of a nonrigid spacecraft - an eigenvalue approach". *ESA Journal*, Vol 1, pp 269-281

Poelaert D 1983: "DISTEL, a distributed element program for dynamic modelling and response analysis of flexible structures". *Proceedings Fourth VPI & SU / AIAA Symposium* (on Dynamics and Control of Large Structures), Blacksburg VA, pp 319-337

Schill M 1988a: "Damped second-order Rayleigh-Timoshenko semi-infinite beam vibration - an exact complex dynamic member stiffness matrix". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 26, No 8, pp 1893-1905

Schill M 1988b: "A critical study of the "radiation condition" for longitudinal waves in a damped semi-infinite bar supported by an ambient medium". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 125, No 1, pp 131-135

Signorelli J & A H von Flotow 1988: "Wave propagation, power flow, and resonance in a truss beam". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 126, No 1, pp 127-144

Sällström J H & B Åkesson 1989: "A nonconservative exact finite element for damped second-order Rayleigh-Timoshenko beam vibration including axially moving material" (work in progress)

Williams F W and W H Wittrick 1983: "Exact buckling and frequency calculations surveyed". *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol 109, No 1, pp 169-187. With a discussion by B Åkesson & O Friberg in Vol 110, No 1, pp 186-188

Wittrick W H & F W Williams 1982: "On the free vibration analysis of spinning structures by using discrete or distributed mass models". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 82, No 1, pp 1-15

Åkesson B 1976: "PFVIBAT - a computer program for plane frame vibration analysis by an exact method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 10, No 6, pp 1221-1231

Åkesson B 1979: "Modal analysis of transient vibration of continuous systems including rigid-body motion". *Chalmers University of Technology, Division of Solid Mechanics*, Report F60, Gothenburg, 38 pp

Åkesson B 1986: "Vibrations, power flow and radiant damping in structures and fluids". *Chalmers University of Technology, Division of Solid Mechanics*, Report F98, Gothenburg, 30 pp

Åkesson B & N Olhoff 1988: "Minimum stiffness of optimally located supports for maximum value of beam eigenfrequencies". *Journal of Sound and Vibration*, Vol 120, No 3, pp 457-463

第2章 基本理论

本章简要地阐述梁的弯曲振动理论，导出基本解和柯氏函数，引入频率参数 β。无论是框架的固有振动或是强迫振动，均采用位移法的矩阵分析方法。定义了共振与反共振。介绍了一个用计算机计算固有振动圆频率的方法。本书所介绍的准确位移法的优点，在于同样的基本解既适用于固有振动，也适用于强迫振动（固有振动可视为强迫振动的特殊情况）。

2.1 欧拉-伯努利梁的弯曲振动

欧拉-伯努利梁的挠度 $w(x,t)$满足下列微分方程（图 2.1a）:

$$(EI(x)w''(x,t))''+m(x)\ddot{w}(x,t)=W(x,t) \tag{1}$$

式中，w' 与 $\dot{w}$分别表示 w 关于位置坐标 x 以及时间坐标 t 的导数。在 5.1 中列出了各种符号的意义。

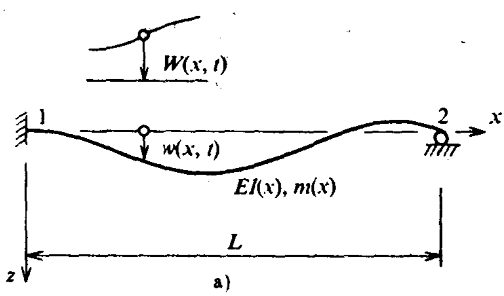

图 2.1a) 欧拉-伯努利梁 12
抗弯刚度为 $EI(x)$，质量分布为 $m(x)$，横向载荷为 $W(x,t)$，挠度为 $w(x,t)$

式（1）假定梁的剪切中心轴线与扭转中心轴线位于主惯性平面 zx 内。当梁作同步稳态谐和振动时，其挠度为

$$w(x,t)=X(x)\sin(\omega t-\alpha) \tag{2}$$

式中，$X(x)$称为振型函数，ω 为圆频率，α 为相位。可选 $t=0$ 时 $\alpha=0$。将式（2）代入式（1），得

$$[(EI(x)X''(x))''-\omega^2 m(x)X(x)]\sin(\omega t-\alpha)=W(x,t) \tag{3}$$

如果抗弯刚度 EI 与质量分布 m 均为常数，而 $W(x,t)=0$，则由式（3）可推出 X（x）所满足的齐次微分方程

$$X''''(x)-\varkappa^4 X(x)=0 \quad \varkappa^4=m\omega^2/EI \tag{4(a,b)}$$

及其通解

$$X(x)=C_1\sin\varkappa x+C_2\cos\varkappa x+C_3\sinh\varkappa x+C_4\cosh\varkappa x \tag{5}$$

如果 EI 与 m 为常数，而 $W(x,t)$是非零的稳态谐和荷载

$$W(x,t)=W_a(x)\sin(\omega t-\alpha) \tag{6}$$

则由式（3）可推出振型函数 $X(x)$所满足的非齐次微分方程

$$X''''(x)-\varkappa^4 X(x)=W_a(x)/EI \tag{7}$$

式中，$\varkappa$ 与式(4b)中的相同。方程（7）的通解，为式（5）与式（7）的一个特解 $X_p(x)$之和。方程（1）的通解，见 10.7 式（1）。

2.2　端部受载梁的基本解

设图 2.2a 中的梁 12 在其跨度范围 $0<x<L$ 内，仅受到与时间无关的荷载 W 作用，在静力平衡位置 $w=0$ 附近，按照 2.1 式（2）的规律作谐和弯曲振动 $w(x,t)$。

如图所示，梁处于瞬时速度为零即$\dot{w}=0$ 的返回位置时，挠度为 $w(x,t)=X(x)\times 1$。振型函数 $X(x)$已在 2.1 式（5）中给出。在返回位置，梁端 1、2 的变形与荷载分别为

$$m_1=-X'(0) \quad m_2=-X'(L) \quad t_1=-X(0) \quad t_2=X(L) \tag{1a,b,c,d}$$

$$M_1=EIX''(0) \qquad M_2=-EIX''(L) \tag{2a,b}$$

$$T_1=-EIX'''(0) \qquad T_2=-EIX'''(L) \tag{2c,d}$$

在 2.1 式（5）中的积分常数 C_1、C_2、C_3、C_4 取决于 4 个边界条件。表 8.1 列出在 8 种边界条件下得到的端部荷载（2a，b，c，d）。例如，基本解 22 对应于 $t_2=1$，$t_1=M_1=m_2=0$ 的情况。若 $t_2\neq 1$，则此基本解应改为图 2.2b 的形式。在振动的两个

返回位置之间，梁端的挠度与荷载亦呈相应的谐和变化，它们的幅值由式（1）、式（2）给出；圆频率和相位由 2.1 式（2）给出。

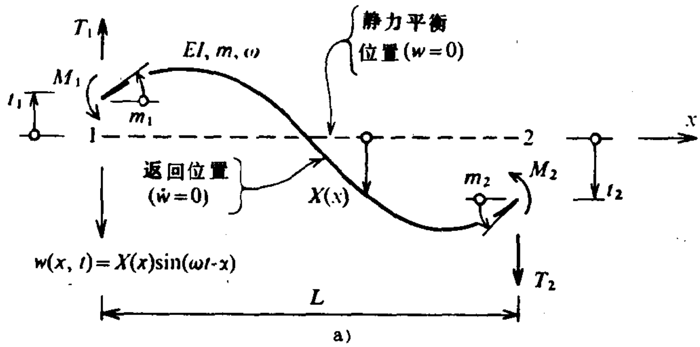

图 2.2a) 刚度与质量沿长度均布的梁 12，在端部荷载作用下作谐和弯曲振动

圆频率为 ω，频率参数为 $\beta=\omega/\omega_0=\omega/\pi^2(EI/mL^4)^{1/2}$。静力平衡位置（或称中间位置）以直线表示，挠度 $w(x,t)$ 系相对于平衡位置的距离。端部荷载 M_1、M_2，T_1，T_2 的定义

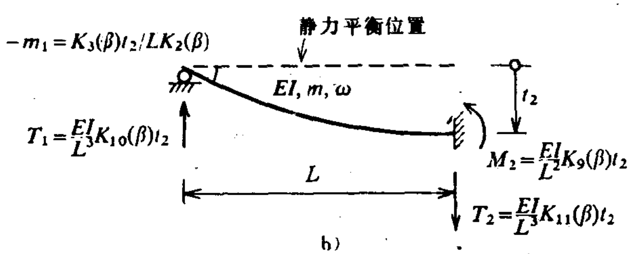

图 2.2b) 在 $t_2\neq 0$，$t_1=M_1=m_2=0$ 的情况下，表 8.1 中的基本解 22 梁的右端相当于表 8.4 中第 6 行所示的导向支座