436

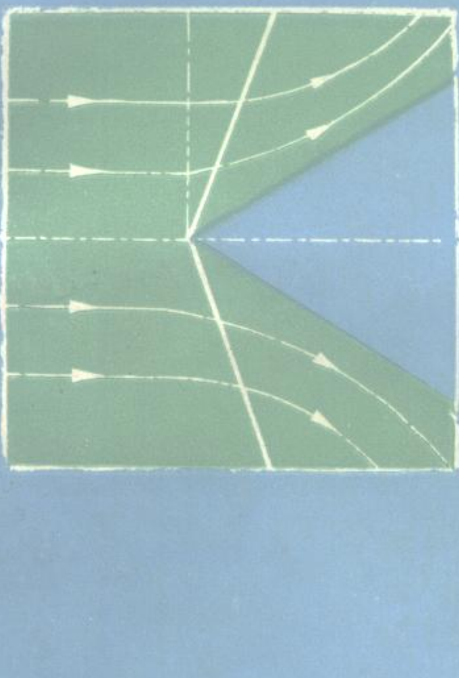
[苏]Л. Д. 朗道　E. M. 栗弗席茨　著

流体力学

下册

孔祥言　徐燕侯　庄礼贤　译

童秉纲　校



高等教育出版社

流 体 力 学

下 册

[苏]Л. Д. 朗道 E. M. 栗弗席茨 著
孔祥言 徐燕侯 庄礼贤 译
童秉纲 校

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是朗道(Л. Д. Ландау)和栗弗席茨(E. M. Лифшиц)所著《理论物理学教程》丛书第六卷. 它的前身是苏联国家技术理论书籍出版社(ГОСТЕХИЗДАТ)1954年出版的作者所著《连续介质力学》的第一部分《流体动力学》. 全书(包括第二部分《弹性理论》)曾由彭旭麟同志分二册译出,由人民教育出版社1958年8月出版. 现由中国科技大学近代力学系孔祥言、徐燕侯、庄礼贤同志根据派伽蒙出版公司(Pergamon Press)1975年英文版《Fluid Mechanics》重新译出(作者在英文版中,除增写了最后一章外,还添加了一些注释和例题,正文也作了某些补充和修改.)经童秉纲教授校阅, 分上下两册出版.

本书上册包括七章:理想流体、粘性流体、湍流、边界层、流体中的导热、扩散及表面现象. 下册为声音、激波、气体的一维流动、间断面的相交、气体的二维流动、绕有限物体的流动、燃烧的流体动力学、相对论流体动力学、超流体动力学、流体动力学中的涨落等十章.

本书可供高等学校物理系、力学系教师、研究生、大学生及其他有关科研教学人员参考.

流体力学

下册

[苏]Л. Д. 朗道 E. M. 栗弗席茨 著

孔祥言 徐燕侯 庄礼贤 译

童秉纲 校

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.875 字数 280 000

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数 00 001—1 620

ISBN 7-04-000087-3/O·37

定价 3.70 元

目 录

第八章 声音……(1)
§63. 声波……(1)
§64. 声波的能量和动量……(8)
§65. 声波的反射和折射……(13)
§66. 几何声学……(16)
§67. 声音在运动介质中的传播……(21)
§68. 本征振动……(25)
§69. 球面波……(29)
§70. 柱面波……(33)
§71. 波动方程的通解……(35)
§72. 旁向波……(39)
§73. 声发射……(46)
§74. 互易原理……(58)
§75. 声音在导管中的传播……(62)
§76. 声音散射……(66)
§77. 声音的吸收……(71)
§78. 第二粘度……(79)
第九章 激波……(86)
§79. 运动气体中扰动的传播……(86)
§80. 气体的定常流动……(89)
§81. 间断面……(94)
§82. 激波绝热关系式……(97)
§83. 弱激波……(101)
§84. 激波中诸物理量变化的方向……(104)
§85. 理想气体中的激波……(110)
§86. 斜激波……(114)
§87. 激波的厚度……(118)

§88. 等温间断面……(125)
§89. 弱间断面……(127)
第十章　气体的一维流动……(131)
§90. 气体经过喷管的流动……(131)
§91. 管道中粘性气体的流动……(135)
§92. 一维自相似流动……(138)
§93. 初始条件中的间断……(147)
§94 一维行波……(154)
§95. 声波中间断的形成……(163)
§96. 特征线……(169)
§97. 黎曼不变量……(174)
§98. 任意的一维气体流动……(179)
§99. 强激波的传播……(187)
§100. 浅水理论……(192)
第十一章　间断面的相交……(195)
§101. 稀疏波……(195)
§102. 激波的相交……(202)
§103. 激波与固体表面的相交……(207)
§104. 绕拐角的超声速流动……(211)
§105. 绕锥形物体的流动……(216)
第十二章　气体的二维流动……(222)
§106. 气体的势流……(222)
§107. 定常简单波……(226)
§108. 恰普雷金方程：定常二维气体流动的
一般问题……(232)
§109. 定常二维流动中的特征线……(237)
§110. 欧拉-特里科米方程.跨声速流动……(240)
§111. 在声速面非奇点附近,欧拉-特里科米方程的解……(247)
§112. 声速绕流……(253)
§113. 间断线与过渡曲线的相交……(260)
第十三章　绕有限物体的流动……(266)
§114. 绕物体的超声速流动中激波的形成……(266)

§ 115. 绕尖削物体的超声速流动 …………………………………… (270)
§ 116. 绕薄翼的亚声速流动 …………………………………… (275)
§ 117. 绕机翼的超声速流动 …………………………………… (278)
§ 118. 跨声速的相似律 …………………………………… (282)
§ 119. 高超声速的相似律 …………………………………… (286)
第十四章 燃烧的流体动力学 …………………………………… (289)
§ 120. 缓慢燃烧 …………………………………… (289)
§ 121. 爆轰 …………………………………… (296)
§ 122. 爆轰波的传播 …………………………………… (304)
§ 123. 不同燃烧方式之间的关系 …………………………………… (313)
§ 124. 凝结间断 …………………………………… (317)
第十五章 相对论流体动力学 …………………………………… (320)
§ 125. 能量-动量张量 …………………………………… (320)
§ 126. 相对论流体动力学方程 …………………………………… (322)
§ 127. 耗散过程的相对论方程 …………………………………… (328)
第十六章 超流体动力学 …………………………………… (331)
§ 128. 超流体的基本性质 …………………………………… (331)
§ 129. 热-机械效应 …………………………………… (334)
§ 130. 超流体的动力学方程组 …………………………………… (335)
§ 131. 超流体中声波的传播 …………………………………… (344)
第十七章 流体动力学中的涨落 …………………………………… (352)
§ 132. 流体动力学中涨落的一般理论 …………………………………… (352)
§ 133. 无限介质中的涨落 …………………………………… (356)
中外人名对照表 …………………………………… (360)
索引 …………………………………… (363)

第八章 声　　音

§ 63. 声波

现在我们来研究可压缩流体的流动，并且从研究小振动开始；可压缩流体中的小幅度振动称为声波. 在流体的每一点中，声波导致了交替出现的压缩和稀疏.

既然振动是微小的，速度 $\boldsymbol{v}$ 也就很小，因此欧拉方程中的一项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 可以略去不计. 由于同样的道理，流体中的密度和压力的相对变化也是小量，我们可以把变量 p 和 ρ 写成下面的形式：

$$p=p_0+p', \qquad \rho=\rho_0+\rho', \tag{63.1}$$

式中，ρ_0 和 p_0 是密度和压力不变的平衡值，ρ' 与 p' 是声波中密度和压力的改变量（$\rho'\ll\rho_0, p'\ll p_0$）. 将(63.1)代入连续方程 $\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$，并略去二阶小量（$\rho', p'$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是一阶小量），它就变为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{63.2}$$

在相同的近似程度上，欧拉方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

可化为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p'=0. \tag{63.3}$$

经线性化的运动方程组(63.2)和(63.3)适用于声波传播的条件是：与声速相比，声波中流体质点的速度必须是小量，即 $v\ll c$. 这一条件，比方说，可以从 $\rho'\ll\rho_0$ 这一必要条件得出（参看下面的公式(63.12)）.

方程组(63.2)和(63.3)含有未知函数 $\boldsymbol{v}, p'$ 和 ρ'. 为了消去其中一个未知函数，我们注意到，正如理想流体中的任何其它运动形式一样，理想流体中的声波是绝热运动. 因此，压力的微小变化 p' 和密度的微小变化 p' 之间的关系为

$$p'=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_s\rho'. \tag{63.4}$$

按照这个方程，把 ρ' 代进(63.2)，就得到

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_s\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{63.5}$$

包含未知函数 $\boldsymbol{v}$ 和 p' 的两个方程(63.3)和(63.5)，完全地描述了声波的运动.

为了将所有的未知量用其中一个未知量来表示，方便的办法是引入速度势 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$. 由方程(63.3)我们可以得到

$$p'=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{63.6}$$

此式表示了 p' 与 ϕ 的关系(为简便起见，今后将省略去 p_0 和 ρ_0 中的下标). 于是，由(63.5)可得出速度势 ϕ 必须满足的方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\Delta\phi=0; \tag{63.7}$$

这里，我们引用了符号

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s}. \tag{63.8}$$

形式象(63.7)的方程称为**波动方程**. 对(63.7)作用梯度算符，就会发现，速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量满足同样形式的方程；而将(63.7)对时间微分，则可看出压力 p'(因而还有 ρ')也满足波动方程.

现在考虑这样的声波，其中所有的量只依赖于一个坐标(比方说，x)，也就是说，yz 平面内的流动是完全均匀的. 这样的波称为**平面波**. 波动方程(63.7)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0. \tag{63.9}$$

为解此方程，我们用新变量 $\xi=x-ct$，$\eta=x+ct$ 代换 x 和 t. 容易看出，用了这些变量，方程(63.9)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi}=0.$$

对 ξ 积分这个方程，得到 $\partial\phi/\partial\eta=F(\eta)$，其中 $F(\eta)$ 是 η 的任意函数. 再积分一次，便得 $\phi=f_1(\xi)+f_2(\eta)$，这里，f_1 和 f_2 为其自变量的任意函数. 因此，

$$\phi=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{63.10}$$

平面波中的其它量(p', ρ', $\boldsymbol{v}$)的分布，也可以用同样形式的函数表示.

为明确起见，我们来讨论密度 $\rho'=f_1(x-ct)+f_2(x+ct)$. 若设 $f_2=0$，则有 $\rho'=f_1(x-ct)$. 这个解的意义是明显的：在任何 $x=$常数的平面内，密度随时间而变化，而在任何给定的时刻，密度因 x 的改变而不同；但是，对于满足 $x-ct=$常数，或 $x=$常数$+ct$ 的坐标 x 和时间 t，密度是相同的. 这就表明，如果在某一时刻 $t=0$，某点上的流体密度取某确定值，那么，经过时间 t 以后，密度的同一值就会在另一点上出现，而该点与原先那点沿 x 轴的距离为 ct. 声波中所有其它量也有同样的情况. 所以，这种流动图象是以速度 c 沿着 x 轴方向在介质中传播的，c 称为**声速**.

这样，$f_1(x-ct)$就表示沿 x 轴正方向传播的**平面行波**. 显然，$f_2(x+ct)$表示沿相反方向传播的波.

在平面波内，速度 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ 的三个分量中，只有 $v_x=\partial\phi/\partial x$ 不为零. 因此，声波中的流体速度是沿着波传播的方向。由于这个原因，我们说流体中的声波是纵波.

在平面行波中，速度 $v_x=v$ 和压力 p' 以及密度 ρ' 之间，存在

着形式简单的关系. 设 $\phi=f(x-ct)$，可得 $v=\partial\phi/\partial x=f'(x-ct)$ 和 $p'=-\rho\partial\phi/\partial t=\rho cf'(x-ct)$. 对比这两个表达式，我们求得

$$v=\frac{p'}{\rho c}. \tag{63.11}$$

根据(63.4)式，用 $p'=c^2\rho'$ 代入上式，就得到速度和密度改变量之间的关系：

$$v=\frac{c\rho'}{\rho}. \tag{63.12}$$

我们再来说明声波中的速度和温度振动量之间的关系. 已知 $T'=(\partial T/\partial p)_s p'$，再应用熟知的热力学公式 $(\partial T/\partial p)_s=(T/c_p)\times(\partial V/\partial T)_p$ 和公式(63.11)，即得

$$T'=c\beta Tv/c_p \tag{63.13}$$

其中，$\beta=(1/V)(\partial V/\partial T)_p$是热膨胀系数.

公式(63.8)是以流体的绝热压缩系数来表示声速的，而绝热压缩系数与等温压缩系数的关系，可由下面的热力学公式给出：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{63.14}$$

现在来计算理想气体中的声速. 理想气体的状态方程是 $pV=p/\rho=RT/\mu$，其中，R 是气体常数，μ 是分子量. 我们得到声速的表达式为

$$c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \tag{63.15}$$

式中 γ 表示比值 c_p/c_v①. 因为 γ 通常只是随温度略有改变，故可以认为气体的声速是和温度的平方根成正比. 当温度给定时，它和压力无关.

有一种很重要的情形即所谓**单色波**，其中，所有的量恰是时间

①需要指出：气体中的声速与分子的平均热速度为同一量级.

的周期(谐)函数．通常，这些函数更宜于写成一个复变量的实部(参看§24的起始处)，例如，可设速度势为

$$\phi=\mathrm{re}[\phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}],\tag{63.16}$$

式中ω是波的频率．函数ϕ_0满足方程

$$\Delta\phi_0+\frac{\omega^2}{c^2}\phi_0=0,\tag{63.17}$$

该式是将(63.16)代入(63.7)后得出的．

现考虑沿x轴正方向传播的平面单色行波．在这种波中，所有量都只是$x-ct$的函数，所以速度势的形式为

$$\phi=\mathrm{re}\left\{A\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\right\},\tag{63.18}$$

式中，A为一常数，称为**复振幅**．用实常数a和α将它表示为$A=ae^{i\alpha}$，便得到

$$\phi=a\cos\left(\frac{\omega x}{c}-\omega t+\alpha\right).\tag{63.19}$$

常数a称为波的**振幅**，余弦函数的自变量称为**位相**．我们用$\boldsymbol{n}$表示波传播方向的单位矢量，矢量

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n}\tag{63.20}$$

称为**波矢**．用该矢量表示，(63.18)可以写为

$$\phi=\mathrm{re}\{A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\}.\tag{63.21}$$

单色波是非常重要的，因为无论什么波都可以表示成具有各种波矢和频率的平面单色波的叠加．一个波分解成许多单色波，就是展成一个傅里叶级数或傅里叶积分(也称为**谱分解**)．这种展开式的项称为波的**单色分量**或**傅里叶分量**．

问　　题

问题 1　一个近乎均匀的二相系，由蒸汽及悬浮于其中的小液滴（"湿蒸

汽")或由液体及其中的小蒸汽泡所组成. 设声波的波长比体系不均匀性的尺度大得多,试求该体系中的声速.

解: 在二相系中,p 和 T 不是独立变量,而是由两个相平衡方程式关联的. 体系的压缩或稀疏总伴有一个相到另一个相的转变. 设 x 是体系中第二相所占的百分比(按质量计算),我们有

$$s=(1-x)s_1+xs_2,$$
$$V=(1-x)V_1+xV_2, \tag{1}$$

式中,下标 1 和 2 用以区别纯属第一相和第二相的有关量. 为了计算导数 $(\partial V/\partial p)_s$,我们将其自变量由 p,s 变换到 p,x,得到

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x\Big/\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p.$$

于是,以(1)式代入,就给出

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=x\left[\frac{dV_2}{dp}-\left(\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\right)\frac{ds_2}{dp}\right]$$
$$+(1-x)\left[\frac{dV_1}{dp}-\left(\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\right)\frac{ds_1}{dp}\right]. \tag{2}$$

利用公式(63.8),可从(1)和(2)两个式子求出声速.

把上面对压力的全导数展开,引入由第一相转变到第二相的潜热[$q=T(s_2-s_1)$],并利用克拉珀龙-克劳修斯方程,求出沿相平衡曲线的导数 dp/dT [$dp/dT=p/T(V_2-V_1)$],我们就得出(2)式中第一个方括号内的表达式,其形式为

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-\frac{Tc_p{}^2}{q^2}(V_2-V_1)^2.$$

对第二个方括号,可作类似的变换.

设第一相是液体,第二相是蒸汽;并假设蒸汽是理想气体,比容 V_1 与比容 V_2 相比可以略去不计. 如果 $x\ll1$(液体中含有一些蒸汽泡),则可求得声速

$$c=\frac{q\mu pV_1}{RT\sqrt{c_{p_1}T}}, \tag{3}$$

式中,R 是气体常数,μ 是分子量. 一般说来,这个速度是很小的. 因此,当液体中形成蒸汽泡(空穴现象)时,声速会突然急剧下降.

如果 $(1-x)\ll1$(蒸汽中含有一些液滴),就得到

$$\frac{1}{c^2}=\frac{\mu}{RT}-\frac{2}{q}+\frac{c_{p_2}T}{q^2}. \tag{4}$$

将此声速和纯气体中的声速(63.15)对比，我们发现，此处由于加进第二相也使 c 值减小，尽管减小得并不显著.

当 x 从 0 增大到 1 时，声速从(3)式的值单调地增大到(4)式的值. 对于 $x=0$ 和 $x=1$ 来说，当系统从单相系转变为二相系时，声速就会发生跃变. 其结果是，对于非常接近于零或 1 的 x 值，即使声波是小振幅的，也不能再用通常的线性声学理论；在这种情况下，声波产生的压缩和稀疏将伴随有单相系和二相系之间的转变，因而声速为常值的基本假设就不再继续成立了.

问题 2 设将气体加热到很高的温度，以致平衡黑体辐射压力变得与气体压力大小相当，试确定此时气体中的声速.

解： 压力为

$$p=nkT+\frac{1}{4}akT^4,$$

而熵则是

$$s=\frac{k}{m}\ln\left(\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}\right)+\frac{akT^3}{n}.$$

在这些表达式中，第一项与粒子有关，第二项与辐射有关；n 是粒子的数密度，m 是粒子质量，k 是玻耳兹曼常数，且有

$$a=\frac{4\pi^2k^3}{45\hbar^3c^3}\text{①}.$$

物质的密度不受黑体辐射影响，所以 $\rho=mn$. 这里，用 u 表示声速以区别于光速 c，于是，

$$u^2=\frac{\partial(p,s)}{\partial(\rho,s)}=\frac{\partial(p,s)}{\partial(n,T)}\bigg/\frac{\partial(\rho,s)}{\partial(n,T)},$$

式中的导数已写成雅可比行列式的形式. 计算出这些雅可比行列式后，我们得出

$$u^2=\frac{5kT}{3m}\left[1+\frac{2a^2T^6}{5n(n+2aT^3)}\right].$$

---

① 例如，参看 *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1958, § 60 (中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺等译，人民教育出版社，1964)。

§ 64. 声波的能量和动量

现在来推导声波能量的表达式. 按照一般公式，单位体积流体的能量是 $\rho\epsilon+\frac{1}{2}\rho v^2$. 现以 $\rho=\rho_0+\rho'$, $\epsilon=\epsilon_0+\epsilon'$ 代入，其中带撇的字母表示有关量偏离流体静止时相对应量的值. 项 $\rho' v^2/2$ 是三阶小量，因此，如果最高取到二阶项，就得

$$\rho_0\epsilon_0+\rho'\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0}+\frac{1}{2}\rho'^2\frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0^2}+\frac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

因为声波是一种绝热过程，这些导数要在等熵条件下计算. 由热力学关系式 $d\epsilon=Tds-pdV=Tds+(p/\rho^2)d\rho$ 可得

$$\left[\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho}\right]_s=\epsilon+\frac{p}{\rho}=w,$$

因而，二阶导数为

$$\left[\frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho^2}\right]_s=\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s=\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=\frac{c^2}{\rho}.$$

这样，单位体积流体的能量为

$$\rho_0\epsilon_0+w_0\rho'+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}+\frac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

这个表达式中的第一项 $\rho_0\epsilon_0$，是当流体处于静止状态时单位体积流体的能量，因而与声波无关. 第二项 $w_0\rho'$，是由于单位体积中流体质量的变化而引起的能量变化. 如果我们计算整个流体体积中能量的积分而得出总能量，则该项在总能量中将不出现，因为流体的总质量是不变的，即有

$$\int\rho dV=\int\rho\, dV, \text{或} \quad \int\rho' dV=0.$$

于是，由于声波而引起的流体总能量的改变就可以从下列积分求得:

• § •

$$\int\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}\right)dV.$$

被积函数可以看成是声能的密度 E:

$$E=\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}. \tag{64.1}$$

如果是平面行波，这一表达式的形式将更为简单. 在这种声波中，$\rho'=\rho_0 v/c$[参看(63.12)]，(64.1)式中的两项相等，因而有

$$E=\rho_0 v^2. \tag{64.2}$$

在一般情况下，这个关系式是不成立的. 不过，对于总声能的(时间)平均值，我们可以得到一个类似的公式. 根据力学上一个熟知的普遍定理，即小振动系统的平均总势能等于其平均总动能，就可直接得出这个公式. 因为在此情况下，平均总动能为

$$\frac{1}{2}\int\rho_0\overline{v^2}dV,$$

并可求得平均总声能为

$$\int \overline{E}dV=\int\rho_0\overline{v^2}dV. \tag{64.3}$$

如果把一个非单色波用一系列单色波来表示，则其平均能量就等于诸单色波分量的平均能量之和. 因为，若 $\boldsymbol{v}$ 表示为具有不同频率的各项之和，则 $\overline{v^2}$ 将包含每一项的平方以及不同频率项的乘积. 这些乘积项含有形式为 $e^{i(\omega-\omega')t}$ 的因子，它们是时间的周期函数. 而周期函数的平均值为零，所以这些项都等于零. 于是，平均能量只含有单色波分量的均方项.

其次，我们来考虑某个有声波传播于其中的流体体积，并求通过包围该体积的封闭曲面的平均能量通量. 根据(6.3)式，流体中的能量通量密度是 $\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)$. 在目前情况下，可略去 v^2 项，因为它是三阶项. 因此，声波中的平均能量通量密度就是 $\overline{\rho w\boldsymbol{v}}$. 把 $w=w_0+w'$，代入，便得到 $\overline{\rho w\boldsymbol{v}}=w_0\overline{\rho\boldsymbol{v}}+\overline{\rho w'\boldsymbol{v}}$. 如焓的变化 w' 为

小量，则有 $w'=(\partial w/\partial p)_s p'$. 又因 $(\partial w/\partial p)_s=1/\rho$，就得到 $w'=p'/\rho$ 和 $\overline{\rho w \boldsymbol{v}}=w_0\overline{\rho \boldsymbol{v}}+\overline{p'\boldsymbol{v}}$. 于是，通过上述封闭曲面的总能量通量等于

$$\oint(w_0\overline{\rho \boldsymbol{v}}+\overline{p'\boldsymbol{v}})\cdot d\boldsymbol{f}.$$

然而，由于在所考虑体积中流体的总量平均来说是不变的，所以通过封闭曲面的质量通量的时间平均值就一定等于零. 因此，能量通量简化为

$$\oint\overline{p'\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{f}.$$

可见，平均声能通量应以矢量

$$\boldsymbol{q}=\overline{p'\boldsymbol{v}} \tag{64.4}$$

来表示.

容易证明有下列关系式:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot(p'\boldsymbol{v})=0. \tag{64.5}$$

正因为有这种形式，该方程就表示声能的守恒定律，而其中的矢量 $\boldsymbol{q}=p'\boldsymbol{v}$ 应理解为声能通量. 因此，此式不仅对于平均通量成立，而且对于任何瞬时的通量都是成立的.

在平面行波中，压力改变量和速度的关系为 $p'=c\rho_0 v$. 引用沿波之传播方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$（它与速度 $\boldsymbol{v}$ 方向相同），可得

$$\boldsymbol{q}=c\rho_0 v^2\boldsymbol{n}, \quad \text{或} \quad \boldsymbol{q}=cE\boldsymbol{n}. \tag{64.6}$$

因此，平面声波中的能量通量密度等于能量密度乘以声速，这是意料之中的结果.

现在来考虑这样的声波，它在任何给定的时刻占据空间一个有限的区域①（波包），要求出声波中流体的总动量. 单位体积流

① 该区域处处都不以固壁为边界.

体的动量等于质量通量密度 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$. 把 $\rho=\rho_0+\rho'$ 代入，即得 $\boldsymbol{j}=\rho_0\boldsymbol{v}+\rho'\boldsymbol{v}$. 而密度变化和压力变化的关系是 $\rho'=p'/c^2$. 利用(64.4)式，我们就得到

$$\boldsymbol{j}=\rho_0\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{q}}{c^2}. \tag{64.7}$$

由于声波是有势流，可将速度写成 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$. 应当着重指出：这一结论并不是 § 63 中推导线性运动方程时所作近似处理的产物；因为导致 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ 的解本身就是欧拉方程的一个精确解. 所以，$\boldsymbol{j}=\rho_0\nabla\phi+\boldsymbol{q}/c^2$. 声波中的总动量等于在声波所占体积上的积分 $\int\boldsymbol{j}dV$. $\nabla\phi$ 的积分可以变换为一个曲面积分，

$$\int\nabla\phi dV=\oint\phi d\boldsymbol{f}.$$

因为在声波所占体积之外，ϕ 值为零，故上述积分应为零. 所以，声波的总动量是

$$\int\boldsymbol{j}dV=\frac{1}{c^2}\int\boldsymbol{q}dV. \tag{64.8}$$

一般说来，这个量不为零. 非零总动量的存在表明有物质的迁移. 因此，我们得出结论：声波包的传播伴随有流体的迁移，这是一个二阶效应(因为 $\boldsymbol{q}$ 是二阶量).

最后，我们来计算声波中压力变化 p' 的平均值. 在一阶近似中，和通常的线性运动方程相对应，p' 是一个周期性地改变符号的函数，因而 p' 的平均值是零. 但是，如果取更高阶的近似，这一结果就不再成立. 假如我们只取到二阶量，p' 可以用从线性声学方程算得的量来表示，这样就用不着去直接求解由于考虑了高阶项而得出的非线性运动方程.

我们从伯努利方程 $w+\frac{1}{2}v^2+\partial\phi/\partial t=$常数出发，并取其时间