线性代数辅导

（第二版）

胡金德 王飞燕

清华大学出版社

线性代数辅导

（第二版）

胡金德　王飞燕

清华大学出版社

(京)新登字158号

内 容 简 介

本书是根据教委制订的线性代数教学大纲的要求编写的，也是编者多年进行线性代数课教学和辅导实践的总结。

本书共七章，包括行列式，矩阵，n维向量和线性方程组，n维向量空间，特征值和特征向量，二次型，线性空间，欧氏空间。各章每一节开始都有“内容提要”，概括本节的主要知识内容，然后是“例题分析”，最后给出“习题”，供读者练习。本书是工科大学生、电大、职工大学学员、报考研究生的同志及自学线性代数者的辅导教材，也可供从事工科线性代数教学的教师，非数学专业的研究生及中学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导/胡金德，王飞燕编. —2版. —北京：清华大学出版社，1995

ISBN 7-302-01760-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①胡… ②王… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第01411号

出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编100084)
责任编辑：金文织
印 刷 者：北京密云胶印厂
发 行 者：新华书店总店北京科技发行所
开　　本：850×1168 1/32　印张：14.75　字数：379千字
版　　次：1995年8月第2版　1995年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-01760-3/O·160
印　　数：0001—6000
定　　价：11.00元

序

编写本书的目的是想对社会上不少青年自学或通过电视学习工科类线性代数提供一些帮助，同时也考虑到对在校的工科类大学生学习线性代数提供一些辅导。

本书是通过对例题的分析、讲解、提问、小结等方式进行辅导的。例题的选择基本上符合高等工业院校线性代数教学大纲所规定的要求。因此，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书。

本书共收集了150道左右例题，400道左右的习题。例题中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题或证明题，有初学者易在计算中出现错误或不易理解的澄清题，有一题多解的开扩思路题，也有较灵活的综合题。不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析，在讲解完后有些还提出思考问题，希望读者进一步思考、深入理解。这些例题的绝大部分编者都在清华大学教学上使用过，其不少例题是多年来教学中经常使用的。

由于本书主要是为初学者提供的辅导材料，在每一节前面都有“内容提要”及“例题分析”。我们建议读者对每一节的“内容提要”先看一看，想一想，再去看“例题分析”的题目，先自己动手算一算，然后看题解，这样帮助会大些。为了使读者有指导地做些练习，在每节后都有相应内容的习题(有 * 号的可不做)，帮助读者达到巩固、熟练的目的。在每章最后一节是习题的提示和答案，有些还提供了较详细的解答。我们希望初学者一定要在独立思考，独立解题的前提下，再参看提示和答案。

编写本书时，我们主要参考了下列教材：清华大学栾汝书教授

编的“空间解析几何和线性代数”(校内试用教材,现已正式出版,名为“线性代数”),北京大学的“高等代数”,及N·B普罗斯库烈柯夫著,周晓钟译的“线性代数习题集”等,在此特向有关人员表示感谢。

由于编者水平所限,难免有缺点、错误,欢迎读者批评指正。

编者 1984.6

第二版序

十年前，我们编写了这本《线性代数辅导》，它的主要对象原想是社会上自学或通过电视学习工科类线性代数的青年，但事实上，不少学校的本科生，从事工科院校线性代数教学的教师，还有报考硕士研究生的读者都在使用这本书，使我们非常高兴。

自第一版发行后，我们收到不少读者的来信，表示关心和支持，并提了不少宝贵意见，对此我们表示深切的感谢，根据读者的使用情况，及十年来编者教学经验的进一步积累，我们对第二版作了如下修改：调整了全书的布局，将一般的线性空间、线性变换、欧氏空间编到了第七章，并加注了 * 号，这样全书分成了两个层次，前六章适用于少学时（约 30—40 学时）的读者，全书则适用于多学时（约 50—60 学时）的读者。另外本书前六章也符合全国工学硕士研究生数学考试大纲的要求；适当调整了例题和习题，增加了一些基本题，并将一些引伸的例题和习题加注了 * 号；为了读者查找习题的答案和提示的方便，我们将它集中到了本书的最后。

本书第一版是由胡金德、张元德、宋烈侠、朱荟隽、王飞燕集体编写，第二版由胡金德、王飞燕修改。我们希望《线性代数辅导》第二版继续得到读者的关心和支持。

编者

1994 年 5 月于清华园

目　　录

第一章　行　列　式

§1　n 阶行列式的定义

一、内容提要

1. n 阶行列式的“递归”定义　（定义 1）

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式，当 $n=1$ 时 $|a_{11}|=a_{11}$

当 $n\geqslant 2$ 时

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，为 a_{1j} 的代数余子式。

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$ 为 a_{1j} 的余子式。

2. n 阶行列式的“逆序”定义

(1) 排列和逆序

由 n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$ 称为一个 n 元排列。n 元排列共有 $n!$ 个。

在一个排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)$ 中，若数 $i_t>i_s$，则称这两

个数组成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数。记作：$\sigma(i_1,i_2,\cdots,i_n)$。若 σ 为奇数，则称 $(i_1,i_2,\cdots i_n)$ 为奇排列。若 σ 为偶数，则称此排列为偶排列。

排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)$ 中，交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换。

对换改变排列的奇偶性。

任意一个 n 元排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 经过若干次对换可变为 $(1,2,\cdots,n)$ 样的自然顺序排列，且所作的对换次数与排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 有相同的奇偶性。

(2) n 阶行列式的"逆序"定义 （定义 2）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这里 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 是对所有 n 元排列 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 求和。故 n 阶行列式等于 $n!$ 项取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的代数和，每一项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(当把其行下标按自然顺序排列时)。即当 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 是偶排列时，取正号，当 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇排列时，取负号。

应该指出的是，行列式采用不同的定义，结果是一样的。通常如果用"逆序"定义行列式，那末前面介绍的"递归"定义就成为行列式"按一行展开"的性质。

二、例题分析

1.1　决定排列 $(n,n-1,\cdots,2,1)$ 的逆序数，并讨论它的奇

偶性。

解：为了找出排列$(n,n-1,\cdots,2,1)$所有的逆序而不遗漏，我们对此排列的 n 个数从左到右顺序地考察：第一个数 n 比其后面的 $n-1$ 个数都大，共组成 $n-1$ 个逆序，第 2 个数 $n-1$ 又比其后面的 $n-2$ 个数都大，又组成 $n-2$ 个逆序，…，因此，一般地，数 k $(k>1)$与其后面 $k-1$ 个数组成 $k-1$ 个逆序，$\sigma(n,n-1,\cdots,2,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，σ 为偶数，此排列为偶排列。当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，σ 为奇数，此时排列是奇排列。

1.2 在 6 阶行列式中，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$的项应带什么符号？$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$呢？

解：从 6 阶行列式的定义出发，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$再加上其前面置以正号或负号构成行列式中的一项，该项行下标已按自然顺序排列。由定义，其正负号取决于列下标排列的逆序数 σ，即为$(-1)^{\sigma}$，现列下标的排列为$(4,3,1,2,6,5)$从左往右，逐个计算此排列的逆序数(用┌┐表示一个逆序)。

$$\sigma(4\quad 3\quad 1\quad 2\quad 6\quad 5)=6$$

而$(-1)^6=1$，故 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$应带正号。

再看 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，为了利用定义来决定这一项前面的符号，先把这一项中 6 个元素的位置重新排列一下，使得它们的行下标排列为自然顺序。即

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

根据前面的计算，这一项前面的符号为正，(因为$(-1)^6=1$)。

说明：在把 6 个元素的位置重新按行下标为自然顺序排列

时，对元素经过了若干次对换。当每两个元素对换一次时，6 个元素的行下标组成的 6 元排列和列下标组成的 6 元排列均进行了一次对换，各改变了一次奇偶性，故行下标和列下标的逆序数的和的奇偶性不变。所以：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\sigma(4,3,1,2,6,5)}\\
&=(-1)^{\sigma(1,2,3,4,5,6)+\sigma(4,3,1,2,6,5)}\\
&=(-1)^{\sigma(2,3,4,5,1,6)+\sigma(3,1,2,6,4,5)}
\end{aligned}
$$

即 $(-1)^6=(-1)^6=(-1)^{4+4}=1$

这个结论可以推广到 n 阶行列式的一般情形：若 n 阶行列式的一般项为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$。经过若干次对换变为 $a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$，则

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)+\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}\\
&=(-1)^{\sigma(12\cdots n)+\sigma(j_1'j_2'\cdots j_n')},\\
&=(-1)^{\sigma(j_1'j_2'\cdots j_n')}
\end{aligned}
$$

即 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号为

$$(-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)+\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$$

1.3 证明

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\
0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35}\\
0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45}\\
0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
$$

证明：这个行列式的元素满足：

$$a_{3j_3}=0\quad(\text{当 } j_3=1,2,3\text{ 时})$$

$$a_{4j_4}=0\quad(\text{当 } j_4=1,2,3\text{ 时})$$

$$a_{5j_5}=0\quad(\text{当 } j_5=1,2,3\text{ 时})$$

而 5 阶行列式的一般项为 $(-1)^\sigma a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，只要 j_3，j_4，j_5 中有一个为 1,2,3 时，对应项便为零。又 j_3，j_4，j_5 应取 1,2,3,4,5 中

各不相等的 3 个数，其中必然有 1,2,3 中的某一个数，因此行列式的一般项必为零，即行列式为零。 证毕

1.4 按 2 种定义，分别计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ & \iddots & & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解：按定义 1，

$$D_n = 1 \cdot (-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 2 & 0 \\ & \iddots & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

继续按定义 1 运算

$$D_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 2 & 0 \\ & \iddots & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (-1)^{1+n-2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 3 & 0 \\ & \iddots & & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^n (-1)^{n-1} \cdots (-1)^3 (2 \cdot 3 \cdots, n-2) \begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}} n!$$

按定义 2，

由于行列式中不为零的项只有 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ 这一项，而把这 n 个元素按行下标自然顺序排列时，列下标的排列为

$(n-1,n-2,\cdots 2,1,n)$，

而 $\sigma(n-1,n-2,\cdots 2,1,n)=(n-1)(n-2)/2$，

所以行列式 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$

注意到$\frac{(n+3)(n-2)}{2}$与$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$具有相同的奇偶性，即当 $n=4k+1,4k+2$ 时为偶数，$n=4k+3,4k$ 时为奇数，所以按两种定义计算的 D_n 值相同。

顺便提出，根据行列式的两种定义，都很容易得到下面几个有用的结论：(读者不妨自己练习。)

(1) 上、下三角行列式等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上的元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

1.5* 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t)\cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{1j}(t))\cdots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{2j}(t))\cdots a_{2n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t)\cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{nj}(t))\cdots a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

证明：欲证的等式左边是一个 n 阶行列式相对于变量 t 求导数，而行列式中每个元素均为变量 t 的函数。等式右边为 n 个行列式之和，根据行列式的定义及导数的运算性质，我们有：

法 1：用定义 1 及数学归纳法：

验证：$n=1$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|a_{11}(t)\right|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{11}(t))=|a_{11}'(t)|$结论成立。

假设对 $n-1$ 阶行列式，等式成立。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n-1}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n-1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11}(t) & a_{n-12}(t) & \cdots & a_{n-1n-1}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}'(t) & \cdots & a_{1n-1}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2j}'(t) & \cdots & a_{2n-1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1}(t) & \cdots & a_{n-1\,j}'(t) & \cdots & a_{n-1\,n-1}(t) \end{vmatrix}$$

证明对于 n 阶行列式，等式也成立：

$$\text{左边}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\Big)'=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}A_{1j})'$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}'A_{1j}+a_{1j}A_{1j}')$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}'A_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}'$$

而 $\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}'$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\left[\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right]'$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3i}' & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{（据归纳法假设）}$$

把上面的和式重新组合一下得到：

$$
\text{左边} = a_{11}'A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21}' & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31}' & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}' & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{12}'A_{12} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq 2)}}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}
$$

$$
\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}' & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}' & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}' & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots\cdots + a_{1n}'A_{1n} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}(-1)^{1+j}
$$

$$
\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}' \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3n}' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j+1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}' \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}' & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22}' & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}' & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}' \end{vmatrix}
$$

=右边.　　　　结论成立。

法 2：用定义 2 及导数运算性质