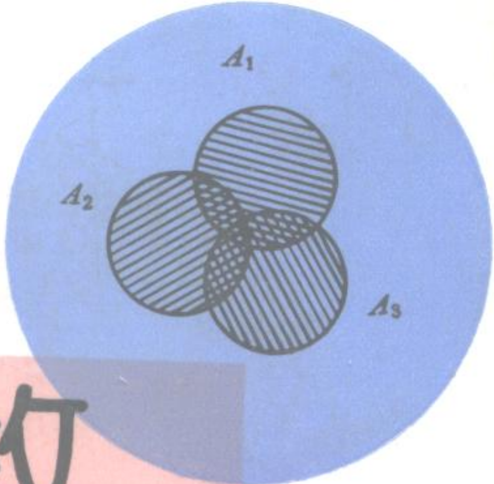
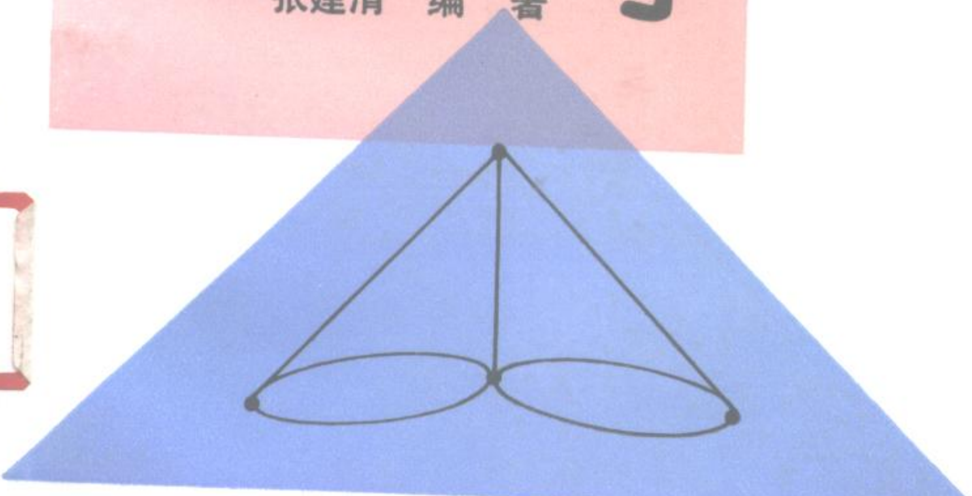
离散数学



魏晴宇　张汝元
张建清　编　著



离散数学

魏晴宇　张汝元　张建清 编著

中国人民大学出版社

（京）新登字156号

离 散 数 学

魏晴宇 张汝元 张建清 编著

出版者：中国人民大学出版社
发行者：中国人民大学出版社
（北京海淀路39号 邮码 100872）
经销者：新华书店北京总店北京发行所
印刷者：人民大学印刷厂
开 本：850×1168毫米 32开
字 数：280 000
印 张：11.25
版 次：1993年3月第1版
印 次：1993年3月第1次印刷
册 数：1—2 800
书 号：ISBN7-300-01578-6/O·28
定 价：6.70元

前　言

按照习惯，在一本教材的序言中，应该简单说明一下它的内容。《离散数学》作为一个单独的分枝，在世界上出现的时间并不久，不过几十年，但它的各部分内容中有相当一部分却早已出现在数学中。为什么将各个数学分支中的一些内容集中起来加以研究，并且冠上一个新的名称——离散数学呢？这主要是因为计算机科学的产生和发展。正如恩格斯所说："……科学的状况还更多的从属于技术的状况和需要。倘若社会上有了一种技术上的需要，那就比十个大学还更能推动科学前进。"①计算机的出现，在很大程度上影响到了人们的思想和生活，对社会生产起了重大作用。为了研究计算机科学的理论基础，离散数学也就应运而生。因此，如果我们不从纯数学的角度，而从应用数学的角度来考虑，也许给离散数学换一个名称——计算机科学的数学基础——更能说明问题。

正是因为这个原因，在计算机科学系、信息管理系都将离散数学作为必须学习的基础课程。而实践证明这种做法是正确的。

这本教材已经在中国人民大学信息管理系使用了多年，应该

---

① 恩格斯《恩格斯给斯他尔根堡(1894.1.25于伦敦)》。见《马克思恩格斯关于历史唯物论的信》，人民出版社1953年版，第27—28页。

说有一定教学实践基础。这次整理中，承蒙张道芳、段新生和教研室许多同志的帮助，谨向他们致谢。

编　者

1989.5.

目　录

第一章　集 合 论

§1．　基本概念和运算

集合的概念是数学中最基本的概念之一，我们不能给它下一个严格精确的定义，而只能作一个描述。一般地讲，具有某种属性的事物，其全体就构成一个**集合**。构成这个集合的那些事物，就称为该集合的**元**。根据所给的属性，我们总是能判断任一事物是否属于某个集合，而不会含糊不清。

例1　（1）　某个大学图书馆现存的全部图书资料。

（2）　1950年出生于北京，现在仍然住在北京的所有人。

（3）　所有的实数。

（4）　一个给定平面上的所有点。

在（1）和（2）中，虽然我们可能说不出集合中元的准确个数，但它总是有限的。因此，我们称元的个数有限的集合为**有限集**。在（3）和（4）中，集合中的元都是无限多个，这样的集合称为**无限集**。

今后，我们用A，B，C，…来表示集合，而用a，b，c，…来表示集合的元。

在表示一个集合时，为了说明集合的详细情况，有时可以采用列举集合中元的方法。例如，我们可以将集合中的元用一对括号括起来。

例2　$S_1=\{-1,\ 1\}$

$S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$

这里S_1是一个具有两个元（-1和1）的集合，S_2则表示所有正整数的集合。这种将集合中的元列举的表示方法称为**表列法**。

表列法是有局限性的，有时甚至根本不能使用。例如，我们不能用这样的方法来表示例1的（3）和（4）。因此，常常采用另一种描述方法：设$P(x)$是一个与x有关的条件，凡合乎这个条件的所有元x组成的集合S，就表示为

$$S=\{x \mid P(x)\}$$

例3

$$S_3=\{x \mid x\text{是奇数}\}$$

$$S_4=\{x \mid x^2-1=0\}$$

$$S_5=\{x \mid -\infty<x<\infty\}$$

$$S_6=\{x \mid 5<x<1\}$$

$$S_7=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 9,\ x\text{是实数}\}$$

S_3表示所有奇数的集合。S_4则是一个有限集，它的元和例2中的S_1相同。S_5是所有实数的集合，S_6中没有任何元，S_7表示闭区间[0，9]中所有数的集合。

从S_3可以看到，存在有这样的集合，它没有任何元。这样的集合称为**空集**，空集用符号ϕ来表示。

从S_7可以看到，在有些场合，要求我们明确所讨论的对象的范围。例如，这里就要求明确x是实数，否则也可能理解为x是整数。如果x是整数，那就是另一个集合了。即由整数0，1，2，…，9所构成的集合。实际上，对于任何一个集合，都有一个讨论对象的范围问题，即我们所说的元是在哪个领域中取，不过在不会引起误解时，我们不必去明确说它而已。这个范围通常是用**空间**这个词来表示。所以，空间是我们所讨论的所有元的集合。如果我们是讨论关于实数的某些性质，那末S_5就是我们的空间。如果我们所讨论的是某个平面上的几何图形，那末这个平面上的所有点的集合，就构成我们的空间。空间用符号E来表示。

为了直观，有时我们用**文氏图**（Venn）来表示集合，即用矩形圈起来的平面上的点表示 E，用封闭曲线圈起来的圆表示集合。例如，图1.1就是集合$\{a, b, c, d\}$的文氏图。

当给定集合A和空间中任一个元x时，如果x是集合 A 中的一个元，我们就称x是**属于**A的，并记为 $x\in A$。如果 x 不是 A 中的元，就称x**不属于**A，并记为$x\notin A$。

定义1 给定集合A和B，如果集合A的任何一个元都是集合B中的元，则称集合A**包含于**B，或B**包含**A。记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。并且称A为B的一个**子集**（图1.2）。

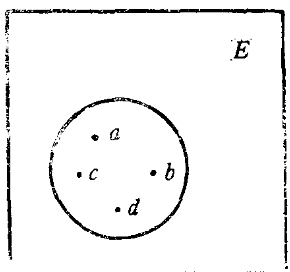


图1.1

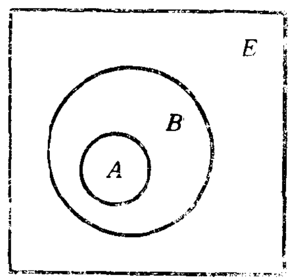


图1.2

根据定义，对于任何集合 A，我们都有 $A\subseteq A$ 。并且 $A\subseteq B$ 时，有“$x\notin B$则$x\notin A$”。对于**空集**ϕ，因为 $x\notin\phi$ 永远成立，所以对任何集合A，$\phi\subseteq A$，即空集是任何集合的子集。

如果对于集合A和B，$A\subseteq B$，但B中有元不属于 A，则称A为B的**真子集**，而包含关系也是真包含，记为$A\subset B$。

定义2 给定集合A和B，若$A\subseteq B$，并且$B\subseteq A$，则称 A，B 两集合**相等**，记为$A=B$。

集合的包含关系具有传递性，即，若$A\subseteq B$，并且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。这个性质根据定义容易得到证明。

在有关集合的讨论中，有一点应该注意，即层次问题。元、集合、以集合为元的集合，这三者是不同的层次，不能混淆，否

则将会造成某些混乱的概念，如“所有集合的集合”。

例4 a，$\{a\}$，$\{\{a\}\}$。这是三个不同的东西。a表示一个元，$\{a\}$表示一个集合，它包含一个元a，$\{\{a\}\}$则表示一个以集合为元的集合，它包含一个元$\{a\}$。

定义3 给定集合A，考虑A的所有子集，以它们为元构成一个集合，这个集合称为A的**幂集**，记为$\rho(A)$或2^A。

例5 $A=\{a, b, c\}$

则 $$\rho(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

可以看到，当集合A中有n个元时，$\rho(A)$中有2^n个元。

现在我们定义集合的运算。

定义4 A和B是两个集合，包含A和B的所有元，但不包含其他元的集合，称为A和B的**并集**，记为$A\cup B$。

图1.3是$A\cup B$的文氏图。

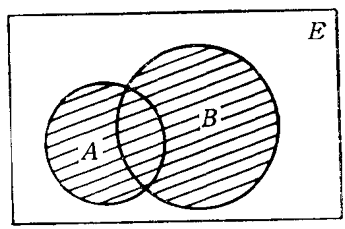


图1.3

例6 $A=\{1, 2, 3, 4\}$

$B=\{3, 4, 5, 6\}$

则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

对于集合的并，我们可以证明下列性质成立。对任何集合A，B，C，D：

（1） 交换律 $A\cup B=B\cup A$

（2） 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

（3） 等幂律 $A\cup A=A$

（4） $\phi\cup A=A$

（5） $A\subseteq A\cup B$

（6） 若$A\subseteq C$，并且$B\subseteq C$，则$A\cup B\subseteq C$

（7） 若$A\subseteq C$，并且$B\subseteq D$，则$A\cup B\subseteq C\cup D$

（8） $A\subseteq B$的充分必要条件是$A\cup B=B$

这些性质的证明容易从定义得到，作为例子，我们证明（7）和（8）。

（7）的证明：根据包含的定义，我们只须证明 $x\in A\cup B$ 则$x\in C\cup D$。设$x\in A\cup B$，由并集的定义，$x\in A$或$x\in B$。由于$A\subseteq C$，所以$x\in A$时，有$x\in C$。由于$B\subseteq D$，所以$x\in B$时，有$x\in D$。即$x\in A$或$x\in B$时，有$x\in C$或$x\in D$。即$x\in C\cup D$。得证。

（8）的证明：首先证明$A\subseteq B$时，$A\cup B=B$，根据（5），我们只须证明$B\supseteq A\cup B$，则由集合相等的定义，得知$A\cup B=B$。假设$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$，但是$A\subseteq B$，所以$x\in A$时必有$x\in B$。因此$x\in A\cup B$时必有$x\in B$，即$A\cup B\subseteq B$。其次我们证明$A\cup B=B$时，$A\subseteq B$。由$A\cup B=B$知$A\cup B\subseteq B$，即$x\in A$或$x\in B$时有$x\in B$，所以$x\in A$时$x\in B$，即$A\subseteq B$。得证。

定义5 A和B是两个集合，包含A和B的所有公共元，但不包含其他元的集合，称为A和B的**交集**，记为$A\cap B$。

图1.4是$A\cap B$的文氏图。

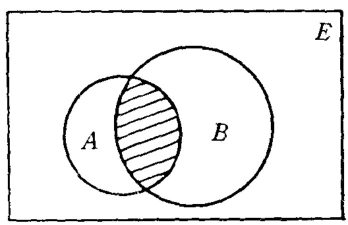


图1.4

例7 $A=\{1, 2, 3, 4\}$

$B=\{3, 4, 5, 6\}$

则 $A\cap B=\{3, 4\}$

对于集合的交，我们可以证明下列性质成立。对任何集合A，B，C，D：

（1） 交换律 $A\cap B=B\cap A$

（2） 结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（3） 等幂律 $A\cap A=A$

（4） $\phi\cap A=\phi$

（5） $A\cap B\subseteq A$

（6） 若$A\subseteq B$，并且$A\subseteq C$，则$A\subseteq B\cap C$

（7） 若$A\subseteq C$，并且$B\subseteq D$，则$A\cap B\subseteq C\cap D$

（8） $A\subseteq B$的充分必要条件是$A\cap B=A$

定义6 A和B是两个集合，如果它们满足$A\cap B=\phi$，则称集合A和B是**不相交的**。

对于集合的并和交，可以证明下列性质成立：

（1） 吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

（2） 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

并集和交集的定义都不难推广到任意有限多个集合，甚至无限多个集合的情形。即是说，若A_1，A_2，…，A_n，… 是集合，则可以类似地定义：

$$S_1=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

$$S_2=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

$$S_3=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

$$S_4=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$$

由于交换律和结合律都成立，所以上述的定义是有意义的。

定义7 若A和B是两个集合，属于A而不属于B的所有元构成的集合，称为A和B的**差集**，记为$A-B$。

图1.5是$A-B$的文氏图。

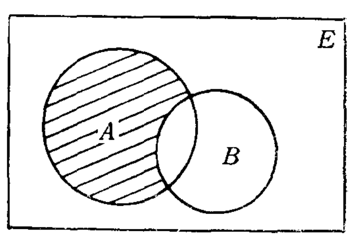


图1.5

例8 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

则　　$A-B=\{1, 2\}$　　　　$B-A=\{5, 6\}$

对于集合的差，我们可以证明下列性质成立。对于任何集合A，B，C，D：

（1）　$A-B\subseteq A$

（2）　若$A\subseteq B$，并且$C\subseteq D$，则$A-D\subseteq B-C$

（3）　若$C\subseteq D$，则$A-D\subseteq A-C$

（4）　$A\subseteq B$的充分必要条件是$A-B=\phi$

集合的并、交、差等运算，还具有下列一些性质：

（1）　德·摩尔根律

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

（2）　$A\cup(B-A)=A\cup B$

（3）　若$A\subseteq B$则$A\cup(B-A)=B$

（4）　$A-(A-B)=A\cap B$

（5）　$A-(B\cup C)=(A-B)-C$

定义8　若集合A是空间E中的，则E中所有不属于A 的元构成的集合，称为A的补集。记为A'。

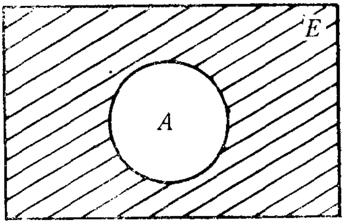


图1.6

图1.6是A'的文氏图。

对于集合的补，我们可以证明下列性质成立。对于空间E中任何集合A，B：

（1）　$E\cap A=A$

$E\cup A=E$

$E'=\phi$

$\phi'=E$

$(A')'=A$

（2） $A\subseteq B$的充分必要条件是$B'\subseteq A'$

（3） $A\cup A'=E$　　$A\cap A'=\phi$

（4） 德·摩尔根律

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

（5） $A-B=A\cap B'$

（6） $A\subseteq B$的充分必要条件是$A\cap B'=\phi$

$A\subseteq B$的充分必要条件是$A'\cup B'=A'$

定义9　若A和B是两个集合，则定义A和B的对称差$A+B$为：

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

图1.7是$A+B$的文氏图。

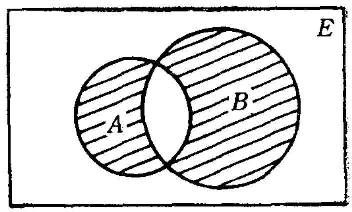


图1.7

对于对称差，我们可以证明下列性质成立。对于任何集合A，B，C：

（1） 交换律

$A+B=B+A$

（2） 结合律

$A+(B+C)=(A+B)+C$

（3） $A+\phi=A$　　$A+A=\phi$

（4） 分配律　$A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C)$

但应注意，一般地讲：

$$A\cup(B+C)\neq(A\cup B)+(A\cup C)$$

例9　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$

则　$A+B=\{1,2,5,6\}$

习　题

1．根据子集的定义证明：若$A\subseteq B$，并且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

2. 若a是集合A中的一个元，下列各式中哪些是正确的？哪些是错误的？

$a\in A$　　$a\in\{a\}$　　$a\subseteq A$　　$a\subset\{a\}$　　$\{a\}\subseteq A$

$\{a\}\in A$　　$\{a\}\subseteq a$

3. 下列各式中哪些正确？哪些错误？

$\phi\in\{\phi\}$　　$\phi\subseteq\{\phi\}$　　$\phi\in\{\{\phi\}\}$

$\phi\subseteq\{\{\phi\}\}$　　$\{\phi\}\in\{\{\phi\}\}$　　$\{\phi\}\subseteq\{\{\phi\}\}$

4. 证明下列各式：

(1)　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2)　$A-B=A\cap B'$

(3)　$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

(4)　$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(5)　$(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(6)　$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(7)　$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

5. 证明关于对称差的交换律、结合律和分配律。

6. 举一个例说明

$A\cup(B+C)\neq(A\cup B)+(A\cup C)$

§2. 关　系

上节中讨论了集合和它的某些基本运算。对于一个集合中的元来说，不涉及顺序问题。即是说，对于一个集合而言，元的排列顺序是任意的，集合$\{a, b\}$和集合$\{b, a\}$是同一个意思，现在我们引进关于顺序的一些概念。

定义1　若x和y是两个元，我们将它按前后顺序排列，记为$\langle x, y\rangle$，则$\langle x, y\rangle$称为一个**序偶**。对于序偶$\langle x, y\rangle$和$\langle a, b\rangle$，当且仅当$x=a$并且$y=b$时，才称$\langle x, y\rangle$和$\langle a, b\rangle$**相等**，记为