



TSINGHUA UNIVERSITY

现代信号处理

张贤达 著

清华大学出版社

635

现代信号处理

张贤达 著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书系统、深入地介绍现代信号处理的各种理论与方法。全书共十二章,内容包括参数估计理论、信号检测、波形估计、现代谱分析、自适应滤波、鲁棒参数估计与谱分析、统计性能分析、二维和多变元信号分析、非高斯信号处理、时频分析和小波分析。其中特别对非因果、非最小相位系统以及非高斯信号、非平稳(即时变)信号的分析作了详细的论述。

本书取材广泛,内容新颖,充分反映了国际上近年来先进的信号处理新理论、新技术、新方法和新应用,可以帮助读者尽快地跟踪现代信号处理学科的最新发展。

本书适合于理工科大学与信号处理有关的各专业的教师和硕士、博士生作教材或教学参考书,也适于广大科技工作者自学与进修。

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理/张贤达著. —北京:清华大学出版社,1994

ISBN 7-302-01707-7

I. 现… II. 张… III. 信号处理-概论 N. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14494 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

责任编辑:王仁康

印刷者:北京市海淀区清华园印刷厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:37.75 字数:896 千字

版 次:1995 年 5 月第 1 版 1995 年 5 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-01707-7/TN·65

印 数:0001—5000

定 价:21.50 元

序

在现代科学技术领域里,电子信息系统的~~应用~~范围极为广泛,主要有通信、导航、雷达、声纳、地震勘探、医学仪器、振动工程和射电天文等等。在短短几十年的时间里,这些系统几经更新换代,发展极其迅速。系统的发展进程常常和信息的利用程度分不开,而信息的利用程度又和信号与信息处理技术的发展紧密相连。

由于这一原因,早在本世纪的四十年代,各种电子信息系统发展的初期,信号与信息处理就受到电子界的重视。当时在检测、估计、滤波等方面建立了一系列基础理论和方法,为电子信息系统的发展指明了方向。但是,由于技术条件的限制,优化系统难以实现,实际应用的只是一些简单的处理技术。

60年代以来,微电子集成电路技术、工艺迅猛发展,为复杂信号处理的实现提供了可能,从而将信号处理的发展推向高潮。从此,信号处理的研究不仅限于一般理论和方法的探讨,更多地侧重于实现方面,新的实现方法与算法的成果层出不穷。在此基础上发展起来的新一代系统,其优化和自适应性能大大提高,早期系统已无法与其相提并论。

现在,信号处理又进入了一个新的发展时期,信号处理的一些主要领域,如优化、自适应、高分辨、多维和多通道等,其理论和方法均日趋系统化。对系统的分析已不再限于理想模型,而是考虑各种实际因素,研究其鲁棒性;同时对性能也不再限于定性描述,而要作出统计性能评价,使理论和实际在更高水平上密切结合。

信号处理应用领域的不断扩大,也促使人们在理论和方法上向更深层次探索,此前均假设信号及其背景噪声是高斯的、平稳的,而对信号的分析只是基于它的二阶矩特性和傅氏谱,其对象系统也限于时不变(或缓变)的线性和因果最小相位系统。虽然上述假设及由此而构建的系统在许多场合是适用的,但随着应用领域的扩大,要求人们去研究非平稳、非高斯信号,以及时变、非因果、非最小相位、非线性系统,这些已成为现代信号处理研究热点的一个方面,如用时频分布和子波变换研究非平稳信号,而用高阶统计量分析非高斯信号等。由于现在已具备了实现复杂系统的物质条件,现代信号处理的研究的又一个特色是理论与实用研究同步进行,既重视基础理论的研究,又重视实际实现和应用的研究。可以预期,现代信号处理技术将得到广泛应用,届时许多电子信息系统将产生新的飞跃。

基于以上情况,国内外不少大学已在研究生中~~新~~开设了这方面的课程。张贤达教授在这一领域从事科研工作十多年,有很多理论成果,近年来又曾多次讲授了这门课,有较丰富的教学经验。本书积作者科研、教学中多年的成就、经验和心得体会,是很有特色的科研专著和教科书。根据当前该学科理论联系实际密切结合的特点,本书突出了基本概念和基本思想的阐明,同时注重了理论的严密性和~~分析~~的实用性,使读者易于领会和掌握问题的实质,并能较快地用以解决实际问题。

现代信号处理是处于蓬勃发展时期的新学科,本书是在近年来最新成果基础上写成

的。随着时间的推移,新的成果还会不断涌现,本书的作用更主要在于使读者能较快地与当前本学科的新发展“接轨”,使更多的同学和科技工作者参加到现代信号处理的研究行列里来,将我国现代信号处理的理论和应用提高到新的水平,并在诸多科技领域开花结果。

保铮 谨识

1994 年 4 月于西安电子科技大学

• I •

2000

前 言

信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分,该学科水平的高低反映一个国家的整体科技水平。

近年来,信号处理的理论与方法获得了迅速发展。几年前,被研究的对象还限于较简单的线性、因果最小相位系统,而现在,非线性、非因果、非最小相位系统已成为研究热点。同时,由于数学工具——高阶统计量和小波变换的新发展,现在已能分别对非高斯信号和非平稳(即时变)信号进行有效的分析与处理。几年前尚认为难于解决的加性有色噪声中的信号处理,也已取得实质性突破。此外,高分辨率谱分析和自适应信号处理也更加完善。这些新发展的理论与技术成为现代信号处理的主要标志。现代信号处理已经广泛应用于雷达、声纳、通信、自动化、地球物理、航空航天、生物医学、天文、振动工程等几乎所有技术领域。

鉴于信号处理学科的迅猛发展与广泛应用,广大科技工作者和硕士、博士研究生迫切要求学习与掌握信号处理的现代理论与技术。国内已出版的数字信号处理方面的书籍尚不能适应现代信号处理迅速发展的需求。本书旨在填补这一空白,力求全面、系统而深入地介绍信号处理的主要新理论和新技术,使广大读者尽快跟踪现代信号处理的最新发展趋势与热门的研究方向。作者希望本书可用作硕士、博士研究生教材或参考书,而且其内容的广度和深度也能适于广大科技工作者自学和进修。为此,在选材上,作者刻意于内容的广泛性、新颖性和先进性;在对理论和方法的论述上,侧重于阐明基本思想,而又尽量兼顾推导证明的易读性和数学的严密性;为方便读者在工程技术和科研中直接应用本书介绍的大量国际先进研究成果,书中以具体算法的形式对这些重要成果加以归纳和总结。

全书共十二章,内容大致分为四个部分:统计信号处理(第一至第七章),多维和多信道信号处理(第八、九章),非高斯信号处理(第十章)和非平稳信号分析(第十一、十二章)。

前七章构成统计信号处理的一个体系,依次讲述参数估计理论、信号检测、波形估计、现代谱分析、自适应滤波、鲁棒参数估计与谱分析、统计性能分析。这一部分仅以较少篇幅阐述统计信号处理的基本理论和方法,而侧重于介绍统计信号处理近几年的新成果和新发展。主要讨论了透视匹配滤波器和透视功率检测器(第二章),新息过程及其在维纳、卡尔曼滤波中的应用(第三章),奇异值分解、总体最小二乘和广义特征值分解在参数估计和谱分析中的应用(第四章)。第五章通过引入向量空间分析这一十分有效的方法,为读者提供分析多种自适应滤波器的一种通用的数学工具。

为使鲁棒参数估计与谱分析构成一个比较完整的新体系,第六章将鲁棒统计学与各种鲁棒方法有机地组织在一起。

第七章尝试从工程角度介绍在数学专业课程中讲授的数理统计的逼近定理(几乎肯定收敛、渐近正态和几乎肯定收敛速率等),并以白噪声中的AR谱估计值的统计性能分

• III •

1015465

析为例,为读者提供今后在对新方法或新算法进行统计性能评价时非常有用的基本理论与方法。

第二部分介绍了多维和多信道信号处理领域中出现的许多新进展。第八章讨论了二维信号处理问题的特点和难点(稳定性、谱因子分解、模型参数的非唯一可识别性、二维最大熵法尚无闭式解等),重点介绍高分辨率二维 ARMA 谱估计与谐波恢复、二维最大熵法和二维 LMS 自适应滤波等新方法。第九章提供多信道信号处理的理论框架,阐述多元 AR 和 ARMA 过程的建模,以及多信道格型自适应滤波器等。

非高斯信号处理是近几年才迅速发展起来的新技术。第十章介绍其主要理论、方法及应用,重点讨论了如何使用高阶统计量解决非因果、非最小相位系统辨识、高斯有色噪声抑制以及高斯/非高斯有色噪声下的信号检测和谐波恢复等几个重要问题。

非平稳(即时变)信号的分析是现代信号处理中近几年新兴的又一重要领域。第十一章侧重时频分析,阐述各种时频表示的数学性质及关系、Wigner-Ville 分布的实现与应用。第十二章为小波分析。与通常从数学角度介绍小波分析的方法不同,本章主要从信号处理的角度出发,系统介绍小波分析中最具代表性的理论——正交基、框架、多分辨率分析和滤波器组。特别地,从 FIR、IIR 和时域三种滤波器组理论出发,对小波分析作了详细的论述。

根据教学时数和内容侧重点的不同,适当地将本书有关章节加以增删和组合,本书又可用作其它课程(如时间序列分析、现代谱估计、自适应信号处理等)的教材或参考书。为便于教学和自学,本书选编了一定数量的习题。希望有条件的读者能够选做一些习题中要求的计算机仿真实验,这是加深理解和掌握有关重要方法的最有效的途径。

本书是笔者在现代信号处理领域近十年研究成果和教学工作的一部总结性著作。全书介绍的大部分内容是近几年国际著名刊物上发表的论文成果,其中包括作者本人在国际权威杂志——IEEE 信号处理、自动控制和信息论三家汇刊上发表的十几篇论文。

由于现代信号处理正在蓬勃发展之中,加之篇幅所限,本书的选材与介绍一定会有遗漏与不足之处。拙笔未能如愿,甚至不妥之处亦在所难免。诚恳希望诸位专家、同仁和广大读者批评指正。

作者在教学和科研工作中得到了中科院院士李衍达教授的热情关心、支持与帮助,中科院院士保铮教授对本书的出版给予了极大的关注和支持,在此谨向他们致以最诚挚的铭谢。胡东成教授帮助本书得以早日问世。唐晓英同志为本书作出了大量具体的帮助工作,在此,一并表示衷心的感谢。

作者在本书中述及的有关研究工作得到国家自然科学基金等的资助。

张贤达

1994 年 7 月于清华大学

目 录

第一章 参数估计理论	1
1.1 估计子的性能	1
1.1.1 无偏性	1
1.1.2 Cramer-Rao 不等式	2
1.1.3 有效性	4
1.1.4 一致性	5
1.2 Bayes 估计	6
1.3 最大似然估计	8
1.4 线性均方估计	10
1.5 最小二乘法	11
1.5.1 最小二乘估计	11
1.5.2 加权最小二乘估计	13
1.6 区间估计	14
1.6.1 μ 的置信区间	15
1.6.2 μ 和 σ^2 的置信区间	17
1.7 递推估计	17
习题	19
第二章 信号检测	21
2.1 假设检验	21
2.2 似然比检验	22
2.2.1 最大后验概率准则	22
2.2.2 最小风险 Bayes 判决准则	24
2.2.3 最小错误概率准则	25
2.2.4 极小极大准则	26
2.2.5 Neyman-Pearson 准则	28
2.3 匹配滤波器	30
2.4 广义匹配滤波器	34
2.5 透视匹配滤波器和透视功率检测器	35
2.5.1 模型与定义	35
2.5.2 无脉冲情况下的确定性信号	37
2.5.3 有脉冲情况下的确定性信号	37
2.5.4 有脉冲情况下的随机信号	39
习题	40

第三章 波形估计	43
3.1 均方估计	43
3.2 波形估计的分类	48
3.3 非因果维纳滤波器	49
3.4 新息过程	51
3.5 因果维纳滤波器	55
3.6 卡尔曼滤波	60
3.6.1 基本原理	60
3.6.2 卡尔曼滤波器的分解	61
3.6.3 滤波器设计	63
习题	65
第四章 现代谱分析	68
4.1 奇异值分解和总体最小二乘法	68
4.1.1 奇异值分解	68
4.1.2 总体最小二乘法	70
4.2 平稳 ARMA 过程	74
4.3 ARMA 谱估计与建模	79
4.3.1 理论基础	80
4.3.2 ARMA 谱分析方法	85
4.3.3 AR 阶数确定和 AR 参数估计	87
4.3.4 MA 阶数确定	92
4.3.5 MA 谱参数与 MA 参数估计	94
4.3.6 AR 有色噪声情况下的 ARMA 谱估计	96
4.3.7 ARMA 过程自相关序列的计算	98
4.4 最大熵法	101
4.4.1 Levinson 递推	101
4.4.2 Burg 算法	103
4.4.3 Burg 最大熵法与 AR 过程	106
4.4.4 最大熵谱分析与 ARMA 过程	109
4.4.5 MEM2	112
4.5 最大似然谱估计	113
4.6 Pisarenko 谐波分解法	115
4.7 扩充的 Prony 方法	120
4.8 MUSIC 法	125
4.9 谐波恢复的最大似然法	128
4.10 谐波恢复的线性预测法	131
4.11 ESPRIT 方法	135
4.11.1 基本算法	135
4.11.2 拓广的算法	138
4.11.3 ESPRIT 方法的 SVD-TLS 实现	140

习题	142
----------	-----

第五章 自适应滤波 146

5.1 RLS 自适应滤波器	146
5.1.1 基本 RLS 算法	146
5.1.2 RLS 算法的性能	149
5.1.3 一种鲁棒的 RLS 算法	151
5.2 LMS 自适应滤波器	154
5.2.1 基本 LMS 算法	154
5.2.2 基本 LMS 算法的性能	158
5.3 LMS 自适应格型滤波器	159
5.4 LS 自适应格型滤波器	165
5.4.1 线性向量空间	165
5.4.2 最小二乘更新关系	166
5.4.3 前、后向预测误差滤波器	168
5.5 快速横向滤波器	175
5.5.1 向量空间关系	175
5.5.2 横向滤波器算子更新	178
5.5.3 快速横向滤波器时间更新	180
5.5.4 快速横向滤波器的基本算法	182
5.5.5 增益归一化快速横向滤波器	186
5.6 自适应 IIR 滤波	188
5.6.1 自适应 IIR 滤波器的分类	188
5.6.2 基于梯度的方法	191
5.6.3 近似梯度法	194
5.7 自适应谱线增强器	197
5.7.1 时域 FIR 自适应谱线增强器	197
5.7.2 基于 IIR 格型陷波器的自适应谱线增强器	199
习题	203

第六章 鲁棒参数估计与谱分析 205

6.1 稳固性、稳健性与异常值	205
6.1.1 稳固性与稳健性	205
6.1.2 崩溃点与影响曲线	206
6.1.3 异常值的分类	207
6.1.4 异常值的危害	208
6.2 新息异常值模型的 M 估计	209
6.3 广义 M 估计	210
6.3.1 AR 模型的广义 M 估计	211
6.3.2 ARMA 模型的广义 M 估计	212
6.4 RA 估计与 TRA 估计	215
6.4.1 基于残差自协方差的鲁棒估计(RA 估计)	215

6.4.2	基于截尾残差自协方差的估计(TRA 估计)	220
6.5	递推广义 M 估计	222
6.5.1	完全观测 ARMA 过程的三阶段估计法	223
6.5.2	ARMA 过程的预先估计	224
6.5.3	递推的广义 M 估计	226
6.6	鲁棒非参数化谱估计	227
6.6.1	基本的鲁棒化	227
6.6.2	滤波型和平滑型数据净化器	228
6.6.3	谱估计的鲁棒-稳固性分析	232
6.7	高分辨频率估计的鲁棒方法	235
6.7.1	鲁棒估计	236
6.7.2	鲁棒估计的分析	239
6.7.3	高分辨率分析	242
第七章	统计性能分析	244
7.1	随机变量序列的收敛性	244
7.1.1	收敛性的定义	244
7.1.2	收敛性的相互关系	245
7.2	收敛性的进一步分析	247
7.2.1	两个随机变量间的收敛关系	247
7.2.2	变换序列的收敛性	248
7.2.3	渐近正态性	249
7.3	统计推断方法的渐近性	249
7.4	样本均值的统计性能	252
7.5	样本自相关的统计性能	255
7.6	白噪声中的 AR 谱估计的统计性能	258
7.6.1	AR 谱估计公式概述	259
7.6.2	参数估计值的渐近性能	260
7.6.3	谱密度估计值的渐近性能	263
7.7	几乎肯定收敛速率	265
7.7.1	重对数律	265
7.7.2	样本自相关估计值的几乎肯定收敛速率	267
7.7.3	AR 谱估计值的几乎肯定收敛速率	268
	习题	269
第八章	二维信号处理	271
8.1	二维系统的稳定性	271
8.1.1	线性移不变二维系统	271
8.1.2	稳定性问题	272
8.1.3	稳定性定理	273
8.2	二维谱因子分解	276
8.3	二维线性预测与 AR 谱估计	282

8.3.1	二维线性预测模型	282
8.3.2	二维 AR 谱估计	286
8.4	二维最大熵谱估计的迭代算法	290
8.4.1	自相关匹配	291
8.4.2	Lim-Malik 迭代算法	293
8.5	二维最大熵谱估计的混合方法	298
8.5.1	混合方法的基本思想	298
8.5.2	最大熵算法	300
8.5.3	混合算法谱估计值的性能分析	302
8.6	二维 ARMA 谱估计与建模	306
8.6.1	AR 参数估计方法	306
8.6.2	二维 ARMA 谱估计方法	310
8.6.3	二维 MA 参数估计	314
8.7	二维谐波恢复	317
8.7.1	二维谐波恢复的理论基础	317
8.7.2	时域分析法	318
8.7.3	直接数据法	321
8.8	二维自适应 LMS 算法	324
8.8.1	二维维纳滤波器	325
8.8.2	自适应权与调节算法	327
8.8.3	二维 LMS 算法和一维 LMS 算法之间的关系	329
	习题	331

第九章 多元时间序列分析

9.1	多元时间序列的二阶性质	334
9.2	均值和协方差函数的估计	336
9.3	多元 ARMA 过程	339
9.3.1	因果性和可逆性	339
9.3.2	多元模型的可辨识性	342
9.3.3	因果 ARMA 过程的协方差矩阵函数	342
9.4	最佳线性预测	343
9.5	多元 AR 过程的建模	345
9.5.1	矩阵算法	345
9.5.2	标量算法	348
9.6	多元 ARMA 过程的建模	353
9.6.1	矩阵算法	353
9.6.2	标量算法	354
9.7	自适应多信道最小二乘格型滤波器	358
9.7.1	多信道格型递推	358
9.7.2	基于 QR 分解的算法	360
9.7.3	算法实现	363
9.8	互谱	368

习题	371
第十章 非高斯信号处理	373
10.1 累积量	373
10.1.1 高阶矩与高阶累积量的定义	373
10.1.2 高斯过程的高阶累积量	375
10.1.3 高阶累积量的性质	377
10.2 非参数化双谱估计	380
10.3 基于累积量的 FIR 系统辨识	384
10.3.1 法方程解法	386
10.3.2 闭式递推解	390
10.3.3 MA 模型的定阶	391
10.3.4 实验结果	392
10.4 非最小相位 ARMA 系统辨识	393
10.4.1 AR 参数的可识别性	393
10.4.2 MA 参数的估计	396
10.4.3 参数化多谱估计	399
10.5 基于累积量的阶数确定	400
10.5.1 AR 阶数确定	400
10.5.2 MA 阶数确定	402
10.5.3 定阶方法的其它应用	404
10.6 非因果系统的辨识	405
10.6.1 反因果 AR 建模	406
10.6.2 线性辨识方法	408
10.6.3 非线性辨识方法	410
10.7 有色噪声中的谐波恢复	411
10.7.1 复值过程的累积量	411
10.7.2 谐波过程的累积量	413
10.7.3 高斯 ARMA 噪声中谐波恢复的几种方法	415
10.7.4 非高斯 ARMA 噪声中谐波恢复的两种方法	416
10.8 基于累积量的参数自适应估计	423
10.8.1 MA 模型参数估计的超定递推辅助变量法	423
10.8.2 随机梯度法	427
10.9 非高斯噪声中非高斯信号的检测	430
10.9.1 假设与符号	430
10.9.2 Hinich-Wilson 检测准则	430
10.9.3 检测试验的功效	432
10.10 其它应用	434
10.10.1 阵列处理	434
10.10.2 分类	436
10.10.3 时延估计	436
10.10.4 盲反卷积与盲均衡	437

10.10.5 干扰对消	438
习题	440
第十一章 信号的时频分析	442
11.1 基本概念	442
11.2 短时傅里叶变换	445
11.3 Gabor 展开	449
11.3.1 连续 Gabor 展开	449
11.3.2 离散 Gabor 展开	451
11.4 能量化和相关化的时频表示	454
11.5 时频分布	456
11.5.1 连续时间时频分布	456
11.5.2 离散时间时频分布	458
11.6 Wigner-Ville 分布	462
11.6.1 定义与性质	462
11.6.2 瞬时频率和平均频率	464
11.6.3 离散 Wigner-Ville 分布的实现	464
11.7 移不变时频表示与仿射时频表示	467
11.7.1 移不变时频表示及其分类	467
11.7.2 仿射时频表示与移位-尺度不变时频表示	469
11.8 Wigner-Ville 分布的应用	475
11.8.1 离散瞬时频率估计	475
11.8.2 随机信号分析	476
11.8.3 信号综合与时变滤波	478
11.9 基于时频分析的信号检测	481
第十二章 小波分析	485
12.1 STFT 和小波变换的比较	485
12.2 连续小波变换	488
12.2.1 连续 STFT	488
12.2.2 连续小波变换	491
12.3 离散变换(框架理论)	494
12.3.1 框架	494
12.3.2 框架与短时傅里叶变换	497
12.3.3 小波框架	499
12.4 正交基	504
12.4.1 正交基和短时傅里叶变换	504
12.4.2 正交小波基	505
12.5 多分辨率分析	505
12.5.1 一维信号的多分辨率逼近	506
12.5.2 Mallat 算法	508
12.5.3 二维多分辨率分析与 Mallat 算法	510

12.6	小波与 FIR 滤波器组	513
12.6.1	FIR 滤波器组与紧支集小波	513
12.6.2	由滤波器组构造的正交小波基	521
12.6.3	一般的 FIR 完全重构滤波器组和双正交小波	522
12.6.4	滤波器设计	528
12.7	小波与 IIR 滤波器组	530
12.7.1	正交 IIR 滤波器组	530
12.7.2	具有矩性质的小波	534
12.7.3	线性相位正交 IIR 解	537
12.8	时域滤波器组分析	541
12.8.1	时域分析	542
12.8.2	时域条件的解释	546
12.8.3	设计方法	547
12.8.4	设计例子	550
12.9	小波在信号处理中的应用	552
参考文献		554
附录		573
附录 A	Schwartz 不等式	573
附录 B	Chebyshev 不等式	573
附录 C	具有对称性的滤波器	574
附录 D	全通滤波器	575
索引		576

第一章 参数估计理论

本章将详细讨论参数估计的理论,即讨论如何规范估计子的性能,并介绍实行估计过程合适的方法。

参数估计就是利用样本数据来估计某些待定的参数。有两种参数估计的方法:点估计和区间估计。在点估计中,通常是寻求一估计子,它将给出待定参数的单个估计值,这一估计值叫点估值。在区间估计中,我们确定的是待定参数可能位于的某个区间。这样一种区间叫做置信区间估值。

1.1~1.5节介绍点估计的理论与方法,1.6节侧重区间估计。1.7节讨论参数的递推估计。

1.1 估计子的性能

令 $x(t)$ 是一个与未知参数 θ 有关的随机信号, $x_1, \dots, x_N$ 是可以利用的随机采样。如果样本的某函数 $g(x_1, \dots, x_N)$ 可以用来确定 θ 的可能取值,我们就称 $g(x_1, \dots, x_N)$ 是 θ 的一个估计子,记作 $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_N)$ 。

例 1.1: 考虑由

$$x_i = s + v_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

给定的观测样本,其中 s 和 v_i 分别为信号和噪声,信号 s 的一个可能估值是

$$\hat{s} = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N = \bar{x}$$

所得 $\bar{x}$ 为样本均值。在这个例子中, s 的估计子为

$$\begin{aligned} \hat{s} &= g(x_1, \dots, x_N) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N \end{aligned}$$

下面讨论估计子应具有的性能。

1.1.1 无偏性

定义 1.1: $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计子,若 θ 在所有可能的样本范围内的平均值等于 θ 的真实值,即对所有 θ 恒有

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (1-1-1)$$

如果式(1-1-1)不成立,则 $\hat{\theta}$ 就是 θ 的一个有偏估计子,而且

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (1-1-2)$$

叫做 $\hat{\theta}$ 的偏差。

让我们分析例 1.1 中 $\hat{\theta}$ 的无偏性。显然,

$$\begin{aligned}
 E(\hat{s}) &= E(\bar{x}) = \frac{1}{N}[E(x_1) + \cdots + E(x_N)] \\
 &= \frac{1}{N}[s + E(v_1) + \cdots + s + E(v_N)] \\
 &= s + \frac{1}{N}[E(v_1) + \cdots + E(v_N)]
 \end{aligned}$$

如果噪声 v_i 是零均值的, 即对于所有 i 有 $E(v_i) = 0$, 则 $\hat{s}$ 是 s 的一个无偏估计子; 否则, 它是有偏的。

无偏性是一个所期望的性能, 但是一个有偏的估计子可能是非常有用的, 如果它具有下面的渐近性能的话。

定义 1.2: $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个渐近无偏估计子, 若对所有 θ , 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $b(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ 。

作为一个典型例子, 让我们来考虑一个线性平稳过程的自相关函数的两种估计子:

$$\hat{R}_1(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} x(t)x(t+l) \quad (1-1-3a)$$

$$\hat{R}_2(l) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-l} x(t)x(t+l) \quad (1-1-3b)$$

假定数据 $x(t)$ 是独立观测的, 容易看出, $\hat{R}_1(l)$ 是 $R(l) = E\{x(t)x(t+l)\}$ 的一个无偏估计子, 而 $\hat{R}_2(l)$ 是 $R(l)$ 的有偏估计子, 因为

$$\begin{aligned}
 E[\hat{R}_1(l)] &= \frac{1}{N-l} \sum_{t=1}^{N-l} E[x(t)x(t+l)] \\
 &= R(l)
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 E[\hat{R}_2(l)] &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-l} E[x(t)x(t+l)] \\
 &= \left(1 - \frac{l}{N}\right) R(l)
 \end{aligned}$$

虽然 $\hat{R}_2(l)$ 是有偏的, 但它是渐近无偏的, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{R}_2(l)] = R(l)$$

正如第四章将看到的那样, 有偏估计子 $\hat{R}_2(l)$ 是半正定的, 而 $\hat{R}_1(l)$ 却不一定是半正定的。由于这一性能, 大多数的研究者都喜欢使用有偏(但渐近无偏)估计子 $\hat{R}_2(l)$, 而不用无偏估计子 $\hat{R}_1(l)$ 。

1.1.2 Cramer-Rao 不等式

一个估计子最基本的特性体现在偏差与方差上。精确地表示方差往往是困难的。在这些情况下, 希望得到方差可能达到的一个下界。任一无偏估计子方差的下界常叫作 Cramer-Rao 下界。

定理 1.1: 令 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ 为一样本向量, $f(\mathbf{x}|\theta)$ 是 $\mathbf{x}$ 的条件密度。若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个