# 基本线性偏微分方程

F. 特勒弗斯 著

陆 柱 家 译

上海科学技术出版社

Basic Linear Partial
Differential Equations
François Treves
Academic Press, Inc., 1975.

封面设计　蒋冰清

**基本线性偏微分方程**

F. 特勒弗斯　著

陆　柱　家　译

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 15　字数 394,000
1982年12月第1版　1982年12月第1次印刷
印数 1—10,100

书号: 13119·1007　　定价: (科五) 2.00 元

# 目　录

## 第 III 章 边值问题



## 第 IV 章 混合问题和发展方程

# 第 I 章

# 线性偏微分方程的基本实例和它们的基本解

## 1. 线性偏微分方程的基本实例

线性偏微分方程的理论起源于少数几个特殊的方程的深入研究，这些方程的重要性，在十八和十九世纪已经有所认识．在数学物理(重力，电磁学，声的传播，热传导和量子力学)中有这些基本的方程．在应用数学中引进这些方程之后，已经证明，它们在纯粹数学中也起着重要的作用：例如，Laplace 方程，作为 Newton 位势理论中和静电学中的基本方程而被首先研究；稍后，经过适当的重新解释，它被用于研究 Riemann 流形的几何和拓扑．类似地，Fourier 在热传导的课题中研究了热导方程．以后，证明了它与概率论有关．我们在下面要描述的一个基本实例——Cauchy-Riemann 算子，它被用于定义复变量的解析函数——似乎不来源于物理学中的应用．但是，据我所知，其它的方程在应用数学中都有它们的来源．总之，线性偏微分方程的一般理论是这些特殊算子的各自理论的发展与综合．在二十世纪中，人们已经认识到，许多似乎是 Laplace 方程或波动方程所特有的性质，事实上可以推广到更广泛的方程类上去．这些性质通常集中在只对这一个或那一个方程有意义的问题上：例如，集中在 Dirichlet 问题上，它对于 Laplace 方程有意义，但是它不会对波动方程有意义；或者，集中在 Cauchy 问题上，它对于后者有意义，而对于前者没有意义．这个介绍性的教程的目的是帮助读者熟悉一些这样的问题和它们的一些解法——但是我们总是紧密地联系着这些特殊的方程，这些问题

和解法最初是为它们而研究的. 因而，清楚地记住这些基本实例的特性是必要的.

## 1.1 $n(>1)$ 个变量的 Laplace 方程

我们用 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 表示 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的变量. 通常，*Laplace* 算子是

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2.$$

有的人把 $-\Delta$ 称为 Laplace 算子. 他们有很好的理由这样做；很遗憾，历史的习惯并非如此，但是，他们正在获得市场. 事实上，$-\Delta$ 是一个正算子；它的 Fourier 变换是 $\mathbf{R}_n$ 中的变量 $\xi$ 的范数的平方 $|\xi|^2$. 这强调了在 Laplace 算子和 Euclid 范数，Euclid 空间中的球，以及正交变换等等之间的密切联系. 事实上，$\Delta$ 在正交变换下是不变的；即，如果 $T$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任何一个这样的变换，$f$ 是 $x$ 的任一无穷次可微函数，则

$$(\Delta f)(Tx)=\Delta\{f(Tx)\}, \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{1.1}$$

自然，这是 Laplace 算子的一种具有决定性的对称性性质，并且，也是它在各向同性介质中能够描述许多现象的部分原因.

事实上，$\mathbf{R}^n$ 中任一使得 (1.1) 对于所有 $C^\infty$ 函数 $f$ 都成立的线性变换 $T$ 必定是正交的：正交变换恰是那些使 $\Delta$ 保持不变的 (即，与 $\Delta$ 可交换的) 线性变换.

满足齐次 Laplace 方程

$$\Delta h=0 \tag{1.2}$$

的函数称为调和函数.

## 1.2 波动方程

用纯虚变量 $\sqrt{-1}\,\xi_j(j=1, \cdots, n)$ 代替偏微商 $\partial/\partial x^j$ 将是方便的，其理由在我们开始使用 Fourier 变换时将变得清楚. 这样，算

子 $-\Delta$ 变为

(1.3) $$|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2,$$

它是一个正定的二次型. 它的符号差(signature)是$(n, 0)$: 它有 $n$ 个正特征根, 而没有非正的特征根. 我们还可以考察有不同符号差的二次型. 一个重要的情形是这样的二次型, 它的特征根中除了一个是严格负的之外,其余都是严格正的. 由于各种原因,在 $n+1$ 维空间 $\mathbf{R}_{n+1}$ 上考虑这样一种二次型是方便的, 我们用$(\xi_1, \cdots, \xi_n, \tau)$表示 $\mathbf{R}_{n+1}$ 中的变量. 事实上,它是二次型

(1.4) $$|\xi|^2-\tau^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2-\tau^2,$$

相应于 $\mathbf{R}^{n+1}$ (其中的变量用 $x^1, \cdots, x^n, t$ 表示)中的偏微分算子

$$\square=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\cdots-\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2.$$

它称为波动算子(有时称为 *d'Alembert* 算子): $x=(x^1, \cdots, x^n)$称为空间变量, $t$ 称为时间变量. 这是一个用来描述振动现象和波的传播的算子.

如果我们对 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中那些与 $\square$ 可交换的线性变换感兴趣, 那么, 确定它们是些什么变换将是没有困难的. 自然, 它们和(对偶空间)$\mathbf{R}_{n+1}$ 中那些使二次型(1.4)不变的线性变换是一样的. 它们形成了一个自从相对论出现以后在物理学中很有用的群: Lorentz 群.

波动方程

(1.5) $$\square g=0$$

的解有一些特殊的性质, 这些性质完全不同于 Laplace 方程的解的性质; 这一点, 在我们仔细地考察它们的时候将变得清楚了.

## 1.3 热导方程

§1.1 和 §1.2 中的例子都是齐次的二阶微分算子, 即这样的微分算子, 它包含二阶的偏微商, 而不包含阶数 $\neq 2$ 的偏微商.

$\mathbf{R}^{n+1}$ 中的热导算子

$$(1.6)\qquad \frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x$$

不是这种类型的．它被用来描述各种传导现象，例如，在各向同性介质中热的传导．初一看，热导方程和波动方程有点象，其实，它们确实有一些共同的性质．但是，它们也有非常深刻的差别．与热导方程的解相联系的不是波的传播现象，而是扩散类型的现象．事实上，热导方程与 Laplace 方程有某些类似性．这不必感到奇怪：热导方程中的主项(leading terms)，即二阶偏微商，与空间变量的 Laplace 方程是一样的．

我们刚才已经看到的也许是线性偏微分方程的最重要的例子．Laplace 方程是一大类方程的原型，这类方程称为椭圆型偏微分方程．其理由是显然的：如果考察二次型

$$a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2,\qquad a_1>0,\ a_2>0,$$

那么，相差一个尺度的变换，它等于两个变量的 Laplace 算子的算符(symbol)(1.3)．它也是 $\mathbf{R}_2$ 中这样的函数，其等值线是椭圆．

类似地，波动方程是双曲型偏微分方程的原型：$\mathbf{R}_2$ 中函数 $\xi^2-\tau^2$ 的等值线是标准的双曲线．热导方程是抛物型偏微分方程的原型：它的算符可定义为 $\mathbf{R}_2$ 中的函数 $\xi^2-\tau$，其等值线是标准的抛物线．事实上，由于我们要利用 Fourier 变换，我们宁愿把它的算符定义为 $|\xi|^2+i\tau$，即，我们用 $i\tau$，而不是用 $-\tau$ 代替 $\partial/\partial t$．

在数学家只研究一阶和二阶的方程的时候，这是把偏微分方程分类的经典的方式．但是这远不适应于偏微分方程组，高阶方程或复系数方程的分类．实际情形是，Laplace 方程的某些根本的性质是从其算符(1.3)只在原点等于零这一事实得来，而不是从(1.3)是一个正定二次型这一事实得来．换言之，Laplace 方程的这些性质，也存在于具有上述前一特性而不具有后一特性的方程中．这就是我们在下面要研究的方程的情形．

## 1.4 Cauchy-Riemann 方程

我们用 $x, y$ 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 中的变量. 齐次 Cauchy-Riemann 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{1.7}$$

这里, $f=u+iv$ 是一复值可微函数($u, v$ 是实的). 方程(1.7)等价于方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.8}$$

我们令 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, 或者, 等价地, $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=(1/2i)(z-\bar{z})$. 这样, $\mathbf{R}^2$ 的一个子集中的任一函数 $f(x, y)$ 也都可看作 $(z, \bar{z})$ 的函数. 此时, 方程(1.7)可改写为(由微商的链规则)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0. \tag{1.9}$$

这里, 我们用了

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

粗略地说, (1.9)告诉我们 $f$ 是"与 $\bar{z}$ 无关的"; 更确切一些, (1.9)是说, $f$(假定它是充分光滑的)是 $z$ 的解析函数, 即, 它有复导数[在(1.9)成立的各点处]. 再引进"反 Cauchy-Riemann"算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

是方便的. 注意,

$$4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=\Delta, \tag{1.10}$$

$\Delta$ 是两个变量的 Laplace 算子. 恒等式(1.10)揭示了 Laplace 方程和 Cauchy-Riemann 方程之间的紧密联系. 在我们研究它们的时候将证实这些联系. $\partial/\partial\bar{z}$ 的算符是

$$\frac{i}{2}(\xi+i\eta) \tag{1.11}$$

(我们已用$\xi$, $\eta$表示对偶平面$\mathbf{R}_2$中的变量). 注意,象Laplace算子的算符一样, (1.11)只在原点处等于零. 这个性质将会有一系列重要的后果. 由于这个性质,用现代的术语说,Cauchy-Riemann算子称为椭圆的.

## 1.5 Schrödinger 方程

在偏微分方程的研究中, 人们很快就意识到从纯粹的形式差别出发, 会得到一些重要的和深刻的规律. 下面的每一件事都证实了这一点, 热导方程和Schrödinger 方程的理论也是很好的例证. $n$个空间变量的常系数Schrödinger 方程是

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x. \tag{1.12}$$

它与热导算子的唯一差别是, 在$\partial/\partial t$之前出现了因子$i^{-1}$. 然而, 在以后将要看到, 这两个方程的解显示出非常不一样的性质. 最初, Schrödinger 方程是在描述电子和其它基本粒子的行为时引进的. 它有一缺陷, 即它不是Lorentz不变的, 因而, 它不适用于量子力学的相对论叙述. 作为一种近似, 它还在被使用着, 但是, 在比较精确的结构中,它已经被*Dirac*方程所代替.

到目前为止,我们只考察了单个的,或者,纯量的(scalar)线性偏微分方程的例子. 但是, 有着许多(数学上的和物理学上的)重要的方程组的例子. 所谓方程组, 即意味着对于给出的$N_1N_2$个线性偏微分算子$P_{jk}(j=1,\cdots,N_1,k=1,\cdots,N_2)$, 考虑$N_2$个未知函数$u^k$的$N_1$个方程

$$\sum_{k=1}^{N_2}P_{jk}u^k=f_j,\quad j=1,\cdots,N_1. \tag{1.13}$$

方程组(1.13)称为确定的(determined), 如果$N_1=N_2$, 也就是, 如果方程的个数恰好与未知函数个数一样多; 称为超定的(over-determined), 如果$N_1>N_2$, 也就是,如果方程的个数严格多于未

知函数的个数；称为欠定的(underdetermined)，如果方程的个数严格少于未知函数的个数.方程组的理论，特别是超定方程组的理论，比单个方程的理论要困难得多. 在目前阶段，我们只限于举几个例子. 正如上面提到过的 Dirac 方程一样，Maxwell 方程——经典的电磁学以它为基础——是确定组的一个例子. 它们都是双曲组. 我们不探求双曲组这一术语的含义，只是提一下：双曲组有一些与波动方程的性质密切相关的形式的和非形式的性质.下面，我们给出一些不是确定的线性偏微分方程组的例子.

## 1.6 梯　　度

令 $n>1$ 表示自变量 $x^j$ 的个数. 梯度

$$\operatorname{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{1.14}$$

是一个超定的微分算子组. 上面提到的数 $N_1$ 等于 $n$, $N_2=1$. 方程组(1.13)现在变为

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}=f_j, \quad j=1, \cdots, n. \tag{1.15}$$

超定组的研究中充满着困难，这些困难在单个方程的研究中是没有的；它们在本质上是代数的，并且，它们甚至于出现在象(1.15)那样简单的情形中. 事实上，如果方程组 (1.15) 成立(假定函数 $u, f_1, \cdots, f_n$ 是充分光滑的)，那么，从(1.15)就得到

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}=\frac{\partial f_k}{\partial x^j}.$$

换句话说，如果我们把$(f_1, \cdots, f_n)$看作一个向量值函数 $\mathbf{f}$，那么，(1.15)就蕴涵着

$$\operatorname{curl} \mathbf{f}=0. \tag{1.16}$$

方程(1.16)是 $n(n-1)/2$ 个方程的方程组，称为方程组(1.15)的相容性条件. 不难知道，如果(1.16)成立，人们事实上能够解出(1.15)——至少是局部地.

梯度是一个椭圆的(非纯量的)微分算子. 我们不深究其确切

含义，只是指点一下它与 Laplace 算子的某种类似性(看下文)．

## 1.7 散　度

散度算子作用在定义于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 的函数上(我们经常要处理复值纯量函数)．由散度算子定义的方程组(1.13)为

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1}+\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial u^n}{\partial x^n}=f, \tag{1.17}$$

这里，$N_1=1$，$N_2=n$．如果令 $\mathbf{u}=(u^1,\ \cdots,\ u^n)$，那么(1.17)的左端通常用 $\operatorname{div}\mathbf{u}$ 表示．从极为形式的推理我们立即看到，(1.17)容许有很多解．任意固定 $j$，取 $u^j$ 为 $f$ 关于 $x^j$ 的任一原函数，同时，对于 $k\neq j$，取 $u^k\equiv0$；这就给出了一个解．这种手续对所有的欠定组都有效：令 $N_2-N_1$ 个未知函数等于零，我们就把欠定组化为一确定组．这是一种众所周知的初等线性代数的方法；它指出了，欠定组比超定组(在大多数情形，也比确定组)容易研究得多；它们也是最少引起兴趣的．

令 $\mathbf{u}=(u^1,\ \cdots,\ u^n)$ 表示一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 $\Omega$ 中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 的 $C^\infty$ 函数，$v$ 是一个在 $\Omega$ 中具有紧支集的复值 $C^\infty$ 函数．通过分部积分，我们立即看到

$$\int(\operatorname{div}\mathbf{u})\,v\,dx=-\int\langle\mathbf{u},\ \operatorname{grad}v\rangle dx, \tag{1.18}$$

其中，$\langle\mathbf{u},\ \operatorname{grad}v\rangle=\sum_{k=1}^{n}u^k\partial v/\partial x^k$ 是向量间(更确切地说，是向量和余向量间)的标准纯量积．我们可以把公式(1.18)叙述为：算子 $-\operatorname{div}$ 和算子 grad 互为转置(transpose)．另一众所周知的公式是

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta, \tag{1.19}$$

它强调了梯度，散度和 Laplace 算子之间的联系．

还有一些超定微分算子组的别的例子，它们在数学及其应用中是重要的：我们在上面已遇到过其中之一，即*旋度*．另一例子是

复梯度 $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial}=(\partial/\partial\bar{z}^1,\ \cdots,\ \partial/\partial\bar{z}^n).$$

齐次方程组

(1.20) $$\bar{\partial}u=0$$

称为多变量的 *Cauchy-Riemann* 方程. (1.20)(其中假设 $u$ 是一次连续可微的)的解是 $n$ 个复变量 $z^1,\ \cdots,\ z^n$ 的全纯函数, 多复变量全纯函数的理论近年来有了很大的发展.

除了上面这些例子之外, 我们还经常把常微分方程看作偏微分方程的特殊情形; 自然, 这仅仅是自变量个数 $n=1$ 的情形. 我们对于线性常微分方程的理论, 比偏微分方程的理论知道得详细得多.常微分方程的某些性质可推广到偏微分方程上去; 另外一些性质可用于构作某些偏微分方程的解. 在以后的讨论中将会看到这些情况.

## 习 题

1.1 利用极坐标, 写出两个变量的 Laplace 算子的表达式和 Cauchy-Riemann 算子的表达式.

1.2 在球面坐标和柱面坐标中写出三个变量的 Laplace 算子的表达式.

1.3 考虑 $n$ 个变量的一阶线性偏微分算子

$$L=\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\alpha^n\frac{\partial}{\partial x^n},$$

它的系数是复常数. 证明下述两个命题:

(1) 如果复向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\ \cdots,\ \alpha^n)$ 具有 $z\mathbf{a}$ 这样的形式, 其中 $\mathbf{a}$ 是一个实向量, 而 $z$ 是某个复数, 那么, 在 $\mathbf{R}^n$ 中我们可以施行变量的线性变换 $x\to y$, 使得 $L$ 在 $y$ 坐标中的表达式变为 $z\partial/\partial y^1$.

(2) 假设向量 $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的(这要求 $n>1$); 证明, 在 $\mathbf{R}^n$ 中我们可以施行变量的线性变换 $x\to y$, 使得 $L$ 在 $y$ 坐标中的表达式变为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^2}\right).$$

1.4 在 $\mathbf{R}^n$ 的原点的一邻域中考虑一阶线性偏微分算子

$$L=\sum_{j=1}^{n}\alpha^j(x)\,\frac{\partial}{\partial x^j},$$

它的系数是实 $C^\infty$ 的. 假设,至少有一个系数 $\alpha^j$ 在原点不等于零. 证明,在原点的一个邻域中存在 $C^\infty$ 的变量变换 $x\to y$, 使得 $L$ 在 $y$ 坐标中的表达式为 $\omega(y)\partial/\partial y^1$, 这里 $\omega(0)\neq 0$. 选择坐标 $y$, 使得在 $y=0$ 附近 $\omega(y)\equiv 1$, 这总是可能的吗?

1.5　令 $\square=(\partial^2/\partial x^2)-(\partial^2/\partial y^2)$ 是平面中的波动算子. 证明, 在 $\mathbf{R}^2$ 中存在一个线性的变量变换,它把 $\square$ 变为 $4\partial^2/\partial x'\partial y'$. 利用这个事实,证明平面中的波动方程 $\square u(x, y)=0$ 的所有解都具有 $u(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$这样的形式, 其中 $f$ 和 $g$ 是实直线上的函数(读者不妨假定 $u$ 是二次连续可微的).

与平面中用公式(1.10)表示的Laplace算子的性质加以比较,问:每个两变量的调和函数是否都具有 $u(x, y)=f(x+iy)+g(x-iy)$这样的形式,其中 $f$ 和 $g$ 是一个复变量的全纯函数?

1.6　证明,如果 $f$ 是定义在闭单位球 $\bar{B}_1=\{x\in\mathbf{R}^n; |x|\leqslant 1\}$ 中而取值于 $\mathbf{C}^n$ 中的 $C^1$ 函数, 它满足(1.16), 则方程组(1.15)总有一个定义在 $\bar{B}_1$ 中(且取值于 $\mathbf{C}$ 中)的 $C^1$ 解 $u$. 举例说明,如果 $n=2$,并且如果用半闭环形 $0<x^2+y^2\leqslant 1$ 代替闭单位圆盘 $\bar{B}_1\subset\mathbf{R}^2$, 那么上述结果是不对的. 把这个事实与下述事实联系起来: 当 $f$ 是全纯函数(譬如说, 在原点关于平面的余集中)时, 反 Cauchy-Riemann 方程 $\partial u/\partial z=f$ 不总有在上述半闭环形中是 $z$ 的全纯函数的解 $u$.

1.7　考虑一个空间变量的热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(\text{在 }\mathbf{R}^2\text{ 中}).\tag{1.21}$$

描述它的形为 $u(x, t)=v(x)w(t)$ 的所有的解(读者不妨假设 $v$ 和 $w$ 是无穷次可微的). 对于波动方程和 Schrödinger 方程(也是一个空间变量的),应用同样的方法, 并把在这三种情形中的结果加以比较.

1.8　考虑平面中的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\tag{1.22}$$

令 $u_0(x)$, $u_1(x)$ 是实直线上的两个 $C^\infty$ 函数, 它们在区间 $|x|\leqslant 1$ 之外等于零. 利用习题 1.5 中所给出的(1.22)的解的描述, 证明, (1.22)有唯一的解 $u$, 使得

$$u(x, 0)=u_0(x),\quad u_t(x, 0)=u_1(x).\tag{1.23}$$

假设, $u_1\equiv 0$, 并且, 当 $|x|<1$ 时 $u_0(x)>0$. 此时, 解 $u$ 的支集是什么? 平面中 $u(x, t)>0$ 的区域是什么?

1.9 令 $u_0(x)$ 是实直线上的一个 $C^\infty$ 周期函数. 这时可以把 $u_0(x)$ 写为具有 Fourier 系数 $u_{0,p}$ 的级数

$$u_0(x)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_{0,p}e^{ip\omega x}, \tag{1.24}$$

其中 $\omega=2\pi/T$, $T$ 是 $u_0$ 的周期; 当 $|p|\to+\infty$ 时 $u_{0,p}$ 的绝对值趋于零的速度快于 $1/|p|$ 的任何幂. 承认上面这些事实(如果读者不知道这些事实的话), 读者试利用在习题 1.7 中指出的变量分离方法去解(1.21)的初始值问题, 也就是, 找方程(1.21)的解 $u$, 它满足 $u(x, 0)=u_0(x)$.

1.10 对定义在开区间 $|x|<1$ 中的 $C^\infty$ 函数 $u_0(x)$, 给出使得下述事实成立的必要和充分条件: 初始值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial u}{\partial x} \quad 在区域\ x^2+t^2<1\ 中; \tag{1.25}$$

$$u(x, 0)=u_0(x) \quad 在区间\ |x|<1\ 中 \tag{1.26}$$

有解 $u(x, t)$.

1.11 令 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, $P(x, \partial/\partial x)$是一个复系数的线性偏微分算子, 其系数定义于 $\Omega$ 中, 并在 $\Omega$ 中是 $C^\infty$ 的, $\Sigma$ 是 $\Omega$ 中的广义函数空间[即, $\mathscr{D}'(\Omega)$的一个线性子空间, 它被赋予一个局部凸拓扑, 细于由 $\mathscr{D}'(\Omega)$诱导的拓扑]. 证明, 由属于 $\Sigma$ 的、在 $\Omega$ 中满足齐次方程 $P(x, \partial/\partial x)h=0$ 的广义函数 $h$ 组成的线性子空间 $\mathrm{Ker}_\Sigma P$ 在 $\Sigma$ 中是闭的.

1.12 令 $\Omega$ 和 $P(x, \partial/\partial x)$ 如习题 1.11 中所述, 并写为

$$P(x, \partial/\partial x)=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha,$$

其中, $(\partial/\partial x)^\alpha=(\partial/\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 令 $x_0$ 是 $\Omega$ 中的一点. 证明下述引理:

**引理 1.1** 如果存在一个 $n$ 数组 $\alpha$, 其长度 $|\alpha|=m$, 使得 $c_\alpha(x_0)\neq 0$. 那么, $\Omega$ 中的齐次方程 $P(x, \partial/\partial x)h=0$ 没有这样的非零广义函数解: 它的支集只由一个点 $x_0$ 组成.

[**提示**: 利用这样的事实: 支集是$\{x_0\}$的任一广义函数 $u$ 是 $x_0$ 处的 Dirac 测度的导数的一个有限线性组合:

$$u=\sum_{|\beta|\le m'} a_\beta\delta^{(\beta)}(x-x_0).]$$

# 2. 不附加条件的解的存在性和光滑性

**因为我们现在要较仔细地研究线性偏微分算子, 因此须采用**

简便的记号和术语．我们采用现在通用的多重指标记号．$n$ 个自变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的一个线性偏微分算子，它的系数是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集 $\Omega$ 中的复值函数，是偏微商的一个多项式，具有下述形式：

(2.1) $$P(x, \partial/\partial x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha.$$

这里，$\alpha$ 是一多重指标，即，是整数 $\alpha_j\geqslant 0$ 的一个 $n$ 数组；$|\alpha|$ 表示它的长度 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$；另外，$(\partial/\partial x)^\alpha=(\partial/\partial x^1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x^n)^{\alpha_n}$．通常，整数 $m$ 是这个算子的阶；这就假设了对于某个长度等于 $m$ 的多重指标 $\alpha$，系数 $c_\alpha(x)$ 不恒等于零． 若所有的系数 $c_\alpha$ 在 $\Omega$ 中都是常数，我们就把算子写为 $P(\partial/\partial x)$，而不写成 $P(x, \partial/\partial x)$． 由于 Fourier 变换的有用性，人们常常宁愿考虑基本的算子

$$D_j=-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x^j,\ \ j=1, \cdots, n,$$

而不考虑 $\partial/\partial x^j$．这样，我们就考虑形为

(2.2) $$P(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x) D^\alpha$$

的微分算子，而不考虑(2.1)型的算子．我们用 $P(D)$ 表示典型的常系数微分算子．

在从常微分方程的研究过渡到偏微分方程的研究的时候，人们所注意到的第一件新奇事情是，所遇到的偏微分方程的所有例子都有无穷多个线性无关的解．例如，考虑常系数齐次偏微分方程

(2.3) $$P(D)u=0.$$

对于适当的复向量 $\zeta$，可取 $u=\exp(i\langle\zeta, x\rangle)$，其中

$$\langle\zeta, x\rangle=\zeta_1x^1+\cdots+\zeta_nx^n.$$

事实上， $$P(D)e^{i\langle\zeta, x\rangle}=P(\zeta)e^{i\langle\zeta, x\rangle},$$

因而，只需要求 $\zeta$ 是多项式 $P$ 的零点即可，即，

(2.4) $$P(\zeta)=0.$$

但是，$\mathbf{C}^n$ 上的一个多项式总有无穷多个不同的零点，只要 $n>1$；并且，当 $\zeta\neq\zeta'$ 时，函数 $\exp(i\langle\zeta, x\rangle)$ 和 $\exp(i\langle\zeta', x\rangle)$ 是线性无关的．