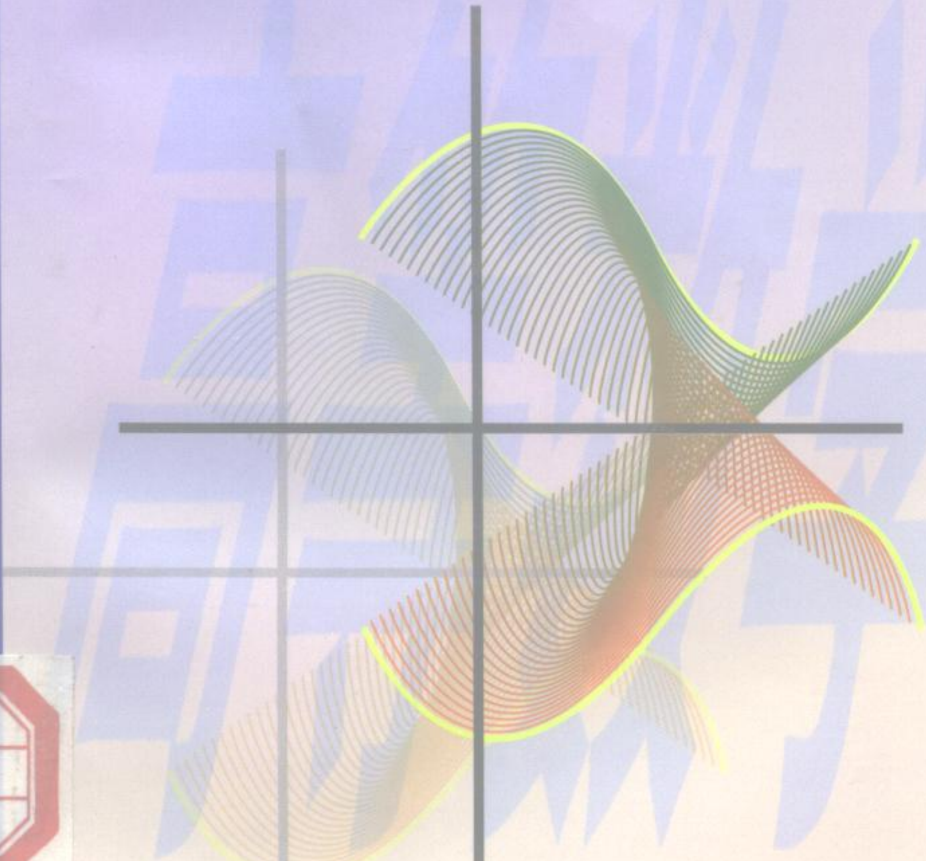
高等数学简明教程（上册）

主编 张润琦
编写 毛京中 程杞元 陈一宏 苏伟宏



北京理工大学出版社

高等数学简明教程

上　册

主　编　张润琦
编　写　毛京中　程杞元
　　　　陈一宏　苏伟宏
审　稿　李心灿　魏光美

北京理工大学出版社

内容简介

本书是根据原国家教委1995年颁布的高等学校工科本科生"高等数学课程教学基本要求",参考原国家教委1996年制订的研究生入学考试"数学考试大纲"编写的.全书分上、下两册,上册包含函数的极限和连续,一元函数微积分和常微分方程;下册包含向量代数和空间解析几何,多元函数微积分和级数.本书尽量从实际问题引入数学概念,注意培养学生用微积分的思想、方法去观察、解决实际问题的能力.例题、习题题型丰富,有不少题结合实际应用,利于培养学生分析问题、解决问题的能力和应用意识.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程(上)/张润琦主编.—北京:北京理工大学出版社,1999.7

高校教材

ISBN 7-81045-581-8

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第18380号

责任印制:刘京凤　责任校对:郑兴玉

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路7号)

邮政编码100081　电话(010)68912824

各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

*

850毫米×1168毫米　32开本　11.5印张　288千字

1999年7月第1版　1999年7月第1次印刷

印数:1—5000册　定价:15.00元

前　言

本书是根据原国家教委1995年颁布的高等学校工科本科生“高等数学课程教学基本要求”，参考原国家教委1996年制订的研究生入学考试“数学考试大纲”编写的．

全书分上下两册，每册五章．上册包含一元函数微积分和常微分方程，下册包含向量代数和空间解析几何、多元函数微积分和级数．全书适宜用176学时讲授．

为了让学生在有限的学时内理解和掌握微积分学最重要的思想和方法，编写时注意到下述几个方面：

1. 在理解微积分基本概念和理论的基础上，注重培养学生应用微积分思想和方法解决实际问题的能力．在本书的微分、积分和微分方程各部分中，都有较多的实例和习题，通过对这些问题的分析、求解，不断提高学生运用数学知识建立实际问题的数学模型的能力．

2. 重视微积分运算的基本方法．各节后都有相应的基本练习题，便于学生深入理解正文的内容．

3. 尽力提高学生的综合解题能力。每章设一节综合例题，这些例题和习题是精选的典型问题，有些是近年来研究生入学考试试题．教师可根据学生的具体情况，在习题课上选用．

本书是根据原来的同名讲义修改而成的．原讲义是在高等数学教研室全体教师充分讨论的基础上由作者执笔完成的．参加原讲义编写的还有张美华、陈菊英副教授．

作者特别感谢北京航空航天大学李心灿教授、魏光美副教授，他们在百忙之中仔细地审阅了全稿，提出了许多宝贵建议。

受我们的水平和经验所限，本书一定存在不妥之处，恳请使用本书的教师、学生和读者批评指正。

编　者

1999年2月于北京

目　录

第一章 函数的极限和连续

高等数学的核心内容是微积分，它与以前所学的初等数学有很大的区别．初等数学研究的数是常数或常量，研究的几何形体是孤立的、不变的规则几何形体，它主要研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系．与此相反，高等数学研究的数是变数或变量，研究的几何形体是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边形和曲面形等．高等数学将数和几何形体紧密结合，以函数为基本研究对象，以极限方法为基本研究方法，动态地、整体地、普遍地揭示变量间的变化规律．

在本书的第一章，将讨论函数概念、函数的极限和函数的连续性．连续性是极限方法的直接应用，连续函数也是我们研究的主要对象．本章内容是研究微积分的最必需的基础知识．

§1 函 数

1. 预备知识

(1) 集合与区间

集合是现代数学中最基本的概念，任何数学研究都离不开集合．例如所有自然数的集合，所有有理数的集合，一个方程的根的集合，某矩形内所有点的集合，等等．一般地，具有某种确定性质的对象的总体称为集合或集，其中的对象称为集合的元素．通常以大写字母 A、B、M 等表示集合，而以小写字母 a、b、m 等表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$（读作 a 属于 A）；否则记作 $a\overline{\in} A$（读作 a 不属于 A）．

一般地，表示集合的方法有两种．一种是列举法，例如方程 $x^2-1=0$ 的根的集合表示为 $S=\{-1,1\}$. 另一种是命题法，例如整数集可表示为 $N=\{x|\sin\pi x=0\}$. 一般地

$$A=\{x|x\text{ 具有性质 }P\}$$

其中 P 是关于 x 的某个性质，意思为：$x\in A$ 的充要条件是 x 满足性质 P. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的根也可以表示为 $S=\{x|\ x^2-1=0\}$.

由某些数组成的集合称为数集．全体实数构成实数集 R. 若把数轴上的点对应到其坐标的实数，则实数集中的数与数轴上的点建立了一一对应关系．为此，以后对实数与数轴上的点不严加区别．例如，数 a 有时也说成点 a，反之亦然．

高等数学中最常用的集合是区间．介于两个实数间的全体实数构成的数集称为区间．这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度．一般有如下几种区间(表 1-1)：

表 1-1

符号　定义　名称	
$(a,b)=\{x\|a<x<b\}$ 开区间 $[a,b]=\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$ 闭区间 $(a,b]=\{x\|a<x\leqslant b\}$ 左开右闭区间 $[a,b)=\{x\|a\leqslant x<b\}$ 左闭右开区间	有限区间
$(a,+\infty)=\{x\|a<x<+\infty\}$ 无穷开区间 $(-\infty,b)=\{x\|-\infty<x<b\}$ 无穷开区间 $(-\infty,+\infty)=\{x\|-\infty<x<+\infty\}$ 无穷开区间 $[a,+\infty)=\{x\|a\leqslant x<+\infty\}$ 无穷半开半闭区间 $(-\infty,b]=\{x\|-\infty<x\leqslant b\}$ 无穷半开半闭区间	无限区间

表 1-1 中 a、b 是确定的实数，$a<b$；$+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号（不是数），分别读作正无穷与负无穷．

（2）邻域和内点

对于任意的正数 δ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的以 δ 为半径的邻域，简称点 a 的邻域，记作 $N(a,\delta)$.

数集 $N(a,\delta)-\{a\}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的以 δ 为半径的去心邻域．

设 I 表示某一区间，$x\in I$，若存在 x 的邻域 $N(x,\delta)\subset I$，则称 x 为 I 的内点．开区间和无穷开区间都是由其内点构成的．

（3）常用符号

本书将多处使用以下四个符号：

$$\forall\ ,\exists\ ,\Rightarrow,\Leftrightarrow$$

它们分别读作“对于任意给定的”、“存在”、“推出”、“等价”．其用法通过例子说明如下：

$$\forall\ x\in R,\text{有 } x\leqslant|x|$$

表示：对于任意一个实数 x，都有 $x\leqslant|x|$.

$$\forall\ \ x\in R,\quad \exists\ \ y\in R,\text{使 } y<x$$

表示：对于任给实数 x，存在实数 y，使得 $y<x$.

符号：“$\Rightarrow$”与“$\Leftrightarrow$”读者已常用，此处不再说明．

2. 函数概念

在观察自然与社会现象时，会遇见各种不同的量，其中有些量在所考察的过程中始终保持不变，取一固定的数值，这种量称为常量；有些量在所考察的过程中发生变化，取不同的数值，这种量称为变量．值得注意的是，一个量是常量还是变量与所考察的过程有关．例如，局限于地球表面上某一地点而言，重力加速度 g 是常量；但在较大的地区内，g 是一个与地理位置有关的变量．通常以字母 a、b、c 等表示常量，以字母 x、y、z 等表示变量．变量 x 所取

数值的全体组成的集合称为变量 x 的变域.

在现实环境中,往往有两个或多个变量在相互关联地变化着,这就是函数现象.

(1) 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y,D 是一非空数集. 若对于每一个 $x\in D$,总有确定的 y 按某种法则 f 与之对应,则称 y 是 x 的函数,法则 f 是函数关系,记为 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 为函数的定义域,y 的一切值所组成的数集称为函数的值域.

在函数定义中,函数关系 f 及定义域 D 是两个重要因素,而自变量和因变量采用什么符号表示则无关紧要. 因此,函数

$$y=f(x),\ x\in X$$

与函数

$$v=f(u),u\in X$$

表示同一个函数.

在实际问题中,函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 而对于一般的函数,其定义域是使因变量有确定实数值的自变量的全体.

例 1 从高 h 处自由下落物体下落路程 s 与时间 t 的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

运动从 $t=0$ 时刻开始,到 $s=h$ 时终止,终止时刻是 $\sqrt{2h/g}$. 所以函数的定义域是$[0,\sqrt{2h/g}]$.

例 2 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{5-x^2}{x-1}}$的定义域.

解 使函数有意义的 x 应满足:$\dfrac{5-x^2}{x-1}\geqslant 0$

下面分两种情况讨论：

① $\begin{cases}5-x^2\geqslant 0\\x-1>0\end{cases}$，

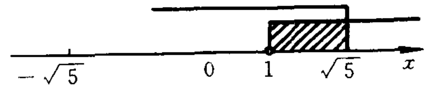


图 1-1

解得 $1<x\leqslant\sqrt{5}$

如图 1-1 所示．

② $\begin{cases}5-x^2\leqslant 0\\x-1<0\end{cases}$，

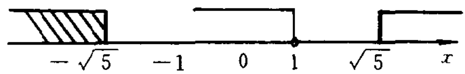


图 1-2

解得 $x\leqslant-\sqrt{5}$

如图 1-2 所示．

因此，函数的定义域为 $1<x\leqslant\sqrt{5}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{5}$，即 $D=(1,\sqrt{5}]\cup(-\infty,-\sqrt{5}]$.

设函数 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数．在 Oxy 平面上取定直角坐标后，对每个 $x\in D$ 可确定平面上一点 $M(x,y)=M(x,f(x))$. 当 x 取遍 D 中所有值时，点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$画出平面上一条曲线 $y=f(x)$，该曲线即称为函数 $y=f(x)$的图形(如图 1-3). 有时也将图形直接称为函数 $y=f(x)$.

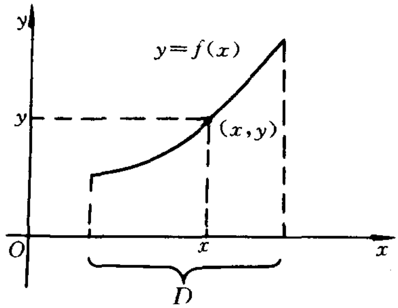


图 1-3

(2) 分段函数

除了可以用一个数学式子表示函数外，有些函数随着自变量取不同的值，函数关系也不同，这种函数称为分段函数．函数有时也可以用表格、图形等方式给出．

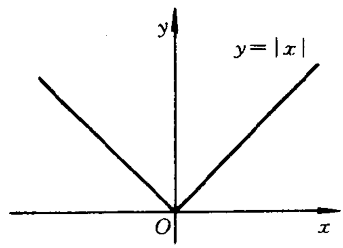


图 1-4

例 3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0, \\ -x & x<0 \end{cases}$$

其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，函数的图形如图 1-4.

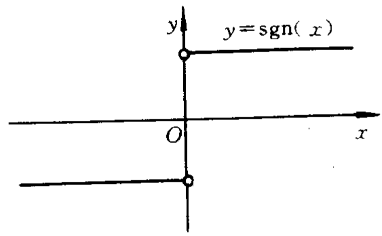


图 1-5

例 4　符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{-1,0,1\}$（见图 1-5）.

例 5　取整函数

$y=[x]=n, n\leqslant x<n+1, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 函数值定义为小于或等于 x 的最大整数，例如 $[1.3]=1,[2]=2,[-0.5]=-1,[-\pi]=-4$. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 图形如图 1-6，这是一个分为无限多段的分段函数．

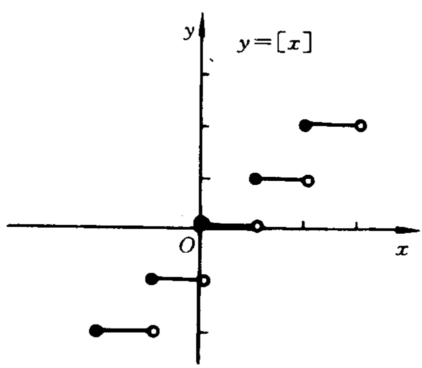


图 1-6

例 6 狄里克莱(Dirichlet)函数

$$y=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{0,1\}$. 图形参考图 1-7.

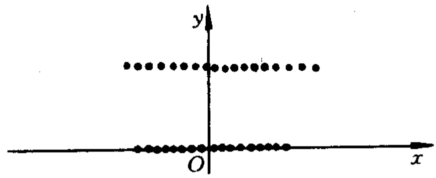


图 1-7

例 7 如图 1-8 所示的图形，在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN，试将直线 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 上点的 x 坐标位于区间 $[0,1]$ 内，即 $x\in[0,1]$ 时，$S=\frac{1}{2}x^2$.

当直线 MN 上点的 x 坐标位于区间 $(1,2]$ 内，即 $x\in(1,2]$ 时

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2+(x-1)\cdot 1=x-\frac{1}{2}$$

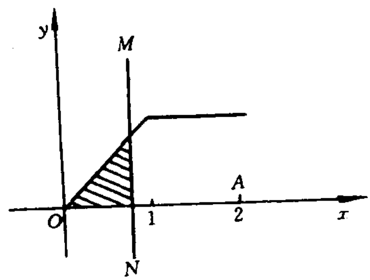


图 1-8

因此面积

$$S=S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-\frac{1}{2} & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

其定义域 $D=[0,2]$，值域 $R=[0,\frac{3}{2}]$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ x^2+2 & x<0\end{cases}$，试求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$ 和 $f(x-1)$.

解 根据分段函数的定义

$$f(-1)=(-1)^2+2=3$$
$$f(0)=0$$
$$f(1)=1+1=2$$
$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+1 & x-1>0\\ 0 & x-1=0\\ (x-1)^2+2 & x-1<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x & x>1\\ 0 & x=1\\ x^2-2x+3 & x<1\end{cases}$$

例 9　设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)-f(x-1)$.

解　先将 $x-1$ 替换 $f(x)$ 中的 x,得
$$f(x-1)=\begin{cases}0 & x-1<0\\ 1 & x-1\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$
0 和 1 将 $f(x)$、$f(x-1)$ 的定义域 $D=R$ 分成三部分:

当 $x<0$ 时,　$f(x)-f(x-1)=0$

当 $x\geqslant 1$ 时,　$f(x)-f(x-1)=0$

当 $0\leqslant x<1$ 时,$f(x)-f(x-1)=1$

由此得到
$$f(x)-f(x-1)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0\leqslant x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$$

3. 函数的几种性质

下面研究函数的单调性、奇偶性、有界性与周期性,这些性质有很明显的几何意义.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1) 若 $\forall\ x,y\in I$,当 $x<y$ 时,恒有 $f(x)\leqslant f(y)$(或恒有 $f(x)\geqslant f(y)$),则称 $f(x)$ 为 I 上的单调增加(或单调减少)函数,统称为

单调函数.

(2) 若$\forall\ x,y\in I$,当$x<y$时恒有$f(x)<f(y)$(或恒有$f(x)>f(y)$),则称$f(x)$为I上的严格单调增加(或严格单调减少)函数.

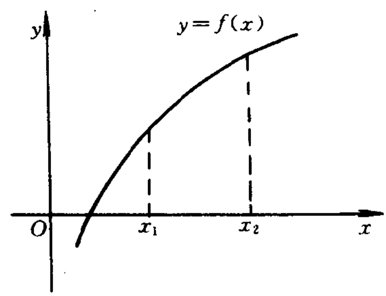


图 1-9

单调增加或减少函数的图形可参阅图 1-9 或图 1-10.

例如,$y=\sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调增加的,在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上是单调减少的;$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

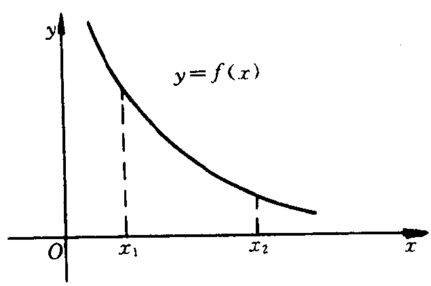


图 1-10

定义 3 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,即$\forall\ x\in D$,有$-x\in D$.

(1) 若$\forall\ x\in D$,有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数;

(2) 若$\forall\ x\in D$,有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数.

几何上,$f(x)$是奇函数意味着其图形关于原点对称;$f(x)$是偶函数意味着其图形关于y轴对称(见图 1-11). 由此,奇、偶函数的研究可限制在$D\cap[0,\infty)$上进行.

例如:函数x、$\sin x$、$\mathrm{tg}x$、$x\sin^2 x$、$\mathrm{sgn}x$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数;x^2、$\cos x$、$x\sin x$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

定义 4 设函数$f(x)$在D上有定义. 若存在常数M,使得$\forall\ x\in D$,$f(x)\leqslant M$(或$f(x)\geqslant M$),则称$f(x)$在D上有上界(或有下

界)，而且称 M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界(或下界). 若存在 $M>0$，使 $\forall\ x\in D$，$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

显然，$f(x)$ 在 D 上有界意味着：$f(x)$ 的图形介于两条水平直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间(见图1-12).

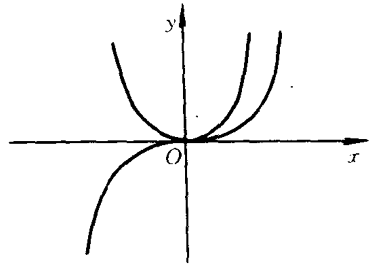


图 1-11

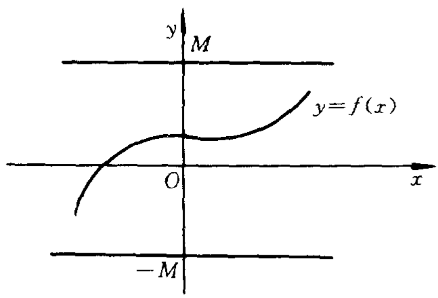


图 1-12

例如，函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$、$\sin x$、$\arcsin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数；函数 $\dfrac{1}{x}$，$\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的无界函数.

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若存在正常数 T，使得 $\forall\ x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期.

图 1-13 表示一个周期为 T 的周期函数.

若 T 是 $f(x)$ 的周期，显然，$nT(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期是指最小正周期. 例如，$\sin x$、$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$\mathrm{tg}x$、$\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的周期函数. 应当注意，并不是每一个周期函数都有最小周期. 例如，常数函数以任一