华南理工大学工程数学教研室

# 线性代数教学指导

XIANXINGDAISHU



华南理工大学出版社

# 线性代数教学指导

华南理工大学工程数学教研室 编

华南理工大学出版社
·广州·

DV72/08

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数教学指导/华南理工大学工程数学教研室编. —广州：华南理工大学出版社，1996.5

ISBN 7-5623-1010-6

Ⅰ. 线…

Ⅱ. 华…

Ⅲ. 线性代数

Ⅳ. O 151；O151.2

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮码 510641）

责任编辑　陈怀芬

*

广东省新华书店经销

广东封开人民印刷厂印装

开本：787×1092　1/32　印张：3.5　字数：78 千

1996 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 2 次印刷

印数：5001—10000

定价：6.00 元

# 前　言

随着科学技术和计算机的迅速发展，生产力的极大提高，使现代生产规模越来越大，各个部门之间的相互联系也越来越密切和复杂. 这就要求人们在经营管理和生产活动中，必须采用科学的方法. 而“线性规划”和“线性代数方程组的数值解法”，就是由于生产力需要而产生和发展的. 随着计算机的日益普及，给工程技术和管理人员应用新的数学方法，提供了极为有利的条件. 所以，为了实际应用的需要，要求工科大学生懂得“线性规划”和“线性代数方程组的数值解法”的基本原理是必要的. 此外，在线性代数的学习过程和复习中，也需要补充例题和习题，因此，我们编了此书，作为线性代数的补充教材.

全书分三个部分：第一部分为线性代数方程组的数值解法，由刘研平老师编写；第二部分是线性规划，由杨纶标老师编写；第三部分是线性代数的补充习题以及课本中较难的题的解答提示，由杨纶标、庚镜波和杨茂信等老师编写. 在编写过程中，考虑到补充教材不宜占太多学时，所以尽量做到少而精，除给出重要理论于论证外，着重于应用. 叙述力求深入浅出，通俗易懂，便于学生掌握基本理论和方法. 此外，书中

所选例题和习题，精选了多年来的考试题，对学生有很好的辅导作用. 另外，书中习题的难题解答提示，可供做作业时参考.

编写此书得到学校教务处和系领导的支持及陈璞华、杨茂信和谢满耀等老师对本书的仔细审阅，在此一并致谢.

华南理工大学工程数学教研室

# 目 录

# 第一部分
# 线性代数方程组数值解法

线性代数方程组（简称线性方程组）数值解法，是工程实践中经常遇到的问题. 据不完全统计，工程问题中提出的计算问题，有一半以上包括求解线性方程组. 如电力传输网分析问题、结构应力分析问题、大地测量问题、数据拟合问题、二次型极值问题、经济领域中生产关联分析问题以及非线性方程组和微分方程数值解问题等等，都要涉及求解线性方程组（参阅〔1〕）. 因此，了解线性方程组的计算机解法，对于工科大学生和工程技术人员来说是十分必要的. 本书介绍一些目前在计算机上常用的有效方法，并假定读者学习了《线性代数》有关知识.

求解大型线性方程组，需要大量的庞杂的运算. 线性方程组计算方法的课题是要研究构成数值解所需的算法程序，以便计算机按程序执行运算.

通常把线性方程组的数值解法分为直接法与迭代法两类. 所谓直接法，就是经有限次的运算就可求得方程组的精确解（如果没有舍入误差的话）的方法；迭代法则是将求解方程组的问题化为一个无限序列，其极限就是方程组的解，因而在有限步之内是得不到精确解的. 直接法与迭代法各有优缺点，前者存储量较大，工作量较小，精确度较高，程序较

复杂；后者存储量较小，工作量较大，程序较简单．一般来说，前者适宜于系数矩阵的阶数不是太高的方程组．后者主要用于某些高阶方程组．实际计算时，应根据具体问题的特点和要求以及使用的计算机的情况，决定方法的取舍．

# 第一章　解线性方程组的直接法

## §1.1　高斯（Gauss）消去法的基本思想

设有 $n$ 阶线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

或写为矩阵形式

$$AX=B$$

其中，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_a, b_2, \cdots b_n)'$，$X=(x_1, x_2, \cdots x_n)'$．

大家知道，只要矩阵 $A$ 的行列式 $\det A\neq 0$，方程组(1.1)有唯一解，且其解可表示为

$$x_i=\det A_i/\det A \qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中，$A_i$ 为用右端向量 $b$ 替换 $A$ 的第 $i$ 列而得的矩阵．这一公式称之为克莱姆法则．按克莱姆法则求解方程组(1.1)，需要计算 $n+1$ 个 $n$ 阶行列式，每个 $n$ 阶行列式如按直接展开法来算，需要 $(n-1)\times n!$ 次乘法和 $n!$ 次加法运算，当 $n=$

20（不算太大）时，就需完成 $19\times20!+20!$ 次乘法和加法运算，这已经是一个十分惊人的数字，即使在每秒1亿（$10^8$）次的计算机上完成这一计算，也得用一万多年时间！所以，尽管这种方法也是一种直接法，并且理论上可行，但实际上是不现实的，即使采用其他方法计算行列式，按克莱姆法则求解的工作量，也比通常的直接法多得多. 这个简单的例子说明，即使有了高速运转的计算机，也并不意味着计算机上的算法可以任意选择.

目前计算机上常用的直接解法，大多数是以系数矩阵的三角形化为基础的. 本节先介绍高斯消去法的基本思想.

高斯消去法的基本思想是：首先，用逐次消去一个未知数的办法，把原方程组（1.1）化为同解的三角形方程组

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right\}\qquad(1.2)$$

其中，系数 $a_{ij}$（$i\leqslant j$）和 $b_i$ 记号同前，但其值有的已改变了（与（1.1）比较）. 然后，方程组（1.2）很容易从下到上逐次地把 $x_n$，$x_{n-1}$，…，$x_1$ 的值计算出来，这就是高斯消去法的两个过程，前者叫做“消去”过程，后者称为“回代”过程.

## §1.2 高斯消去法的计算过程

考虑一般 $n$ 阶线性方程组（1.1），为了符号统一，把方程组（1.1）改写成

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

或用矩阵符号记为

$$A^{(1)}X = B^{(1)} \tag{1.3$'$}$$

其中，$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$，$B^{(1)} = (b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots b_n^{(1)})'$.

假设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，分别从（1.3）式的第 2 个方程减去第 1 个方程乘以 $a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$，第 3 个方程减去第 1 个方程乘以 $a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$，如此类推，即可消去（1.3）式中后面 $n-1$ 个方程中的未知数 $x_1$，得同解方程组

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

用矩阵符号表示为

$$A^{(2)}X = B^{(2)} \tag{1.4$'$}$$

其中 $$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

若令 $m_{i1} = a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$，则系数 $a_{i,j}^{(2)}$ 和 $b_i^{(2)}$ 的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}
a_{i,j}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)} \\
b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}
\end{aligned} \qquad i,j = 2,3,\cdots,n \right\} \tag{1.5}$$

类似地，若 $a_{22}^{(2)} \neq 0$，分别从（1.4）式的第 3 个方程减去第 2 个方程乘以 $a_{32}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$，第 4 个方程减去第 2 个方程乘以 $a_{42}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$，等等，即可进一步消去（1.4）式中后面 $n-2$ 个方程中的未知数 $x_2$，从而将（1.4）式化为同解方程组

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)}
\end{array}\right\} \quad (1.6)$$

用矩阵符号表示为

$$A^{(3)}X = B^{(3)} \qquad (1.6)'$$

其中

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix} \qquad B^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

若令 $m_{i2} = a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$，则系数 $a_{ij}^{(3)}$ 和 $b_i^{(3)}$ 的计算公式为

$$\left.\begin{array}{l}
a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)} \\
b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}
\end{array} \quad i,j = 3,4,\cdots,n\right\} \quad (1.7)$$

若 $a_{33}^{(3)} \neq 0$，上述步骤还可以继续下去，重复 $n-1$ 次后，即可得如下同解的三角形方程组

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}
\end{array}\right\} \quad (1.8)$$

用矩阵符号表示为

$$A^{(n)}X = B^{(n)} \tag{1.8$'$}$$

其中 $$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \qquad B^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

把系数矩阵 $A^{(1)}$ 化为上面三角形矩阵 $A^{(n)}$ 的过程，称为消元过程. 消元过程中元素的计算公式可归纳为

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} && (i \leqslant k, j \leqslant n) \\ & a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - (a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)})a_{kj}^{(k)} && (k+1 \leqslant i \leqslant n, k+1 \leqslant j \\ & b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - (a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)})b_k^{(k)} && \leqslant n) \\ & a_{ij}^{(k+1)} = 0 && (i \leqslant j \leqslant k, j+1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

有了同解的三角形方程组（1.8），求解就容易了. 从（1.8）中的最后一个方程即可求出 $x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$；把求得的 $x_n$ 代入（1.8）中倒数第 2 个方程，便可求出 $x_{n-1}$；把求出 $x_n$，$x_{n-1}$ 代入（1.8）中倒数第 3 个方程，便可求出 $x_{n-2}$，等等，最后可求出 $x_1$. 这一过程叫回代过程. 它的计算公式可归纳为

$$\left.\begin{aligned} & x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \\ & x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j)/a_{ii}^{(i)} \qquad i = n-1, n-2, \cdots 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

注意到在消元过程中，我们假定了 $a_{ii}^{(i)} \neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 这些条件就是要求系数矩阵 $A$ 的顺序主子式都不为零. 这对于正定矩阵来说是满足的，但一般情况下不能保证. 不过

对于非奇异矩阵来说，通过行、列交换后，总是可以满足的.

## §1.3 高斯消去法的运算量

只计乘、除法运算，在消去第 1 列的 $n-1$ 个系数，需作乘法运算 $n\times(n-1)$ 次；消去第 2 列的 $n-2$ 个系数，需作乘法 $(n-1)\times(n-2)$ 次；等等，总次数为

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$$

生成 $m_{ij}$时，要做的除法运算次数为

$$\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n}{2}(n-1)$$

回代求解时，需要的乘、除法运算次数是

$$\sum_{k=1}^{n-1} k+n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

所以，高斯消去法解 $n$ 阶线性方程组，共需乘、除运算的总次数为

$$\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$$

可见，对于比较大的 $n$，所需运算的工作量，可以用$\frac{1}{3}n^3$来估计（其中主要工作量花在消去过程）. 相对而言，低阶项微不足道，而加减运算也可以略而不计. 比如用高斯消去法求解一个 100 阶方程组，只需 30 多万次乘、除运算，用现代的高速计算机，无需一秒钟.

## §1.4 高斯列主元消去法

主元消去法是为控制舍入误差而提出来的一种算法. 在

高斯消去法的消元过程中，未知数是按其出现于方程式中的自然顺序消去的，所以又叫顺序消去法. 顺序消去法的方式有很大的缺点：首先，消去过程中可能出现 $a_{kk}^{(k)}=0$，这时消元无法进行；即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，但绝对值很小，用它作为除数，就会导致其他元素量级的巨大增长和舍入误差的扩散，最后使计算结果不可靠. 先看下面的例子.

**例 1** 方程组

$$\begin{cases}0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001\\1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000\end{cases}$$

的准确解已知为 $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=\dfrac{2}{3}$. 现用顺序消去法求解. 取 5 位有效数字，把第 2 个方程中的 $x_1$ 消去，得

$$\begin{cases}0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001\\\qquad\qquad 9999.0x_2=6666.0\end{cases}$$

从第 2 个方程解出 $x_2=0.6667$，再代入第 1 个方程，得 $x_1=0$. 这个结果严重失真. 究其原因，是由于所用的除数 0.0003 太小，使舍入误差扩散所造成的. 避免这类错误的一种有效方法，是在消元前先对调方程的次序，变为

$$\begin{cases}1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000\\0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001\end{cases}$$

再消去第 2 个方程中的 $x_1$，得

$$\begin{cases}1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000\\\qquad\qquad 2.9997x_2=1.9998\end{cases}$$

从而求得 $x_2=0.6667$，$x_1=0.3333$. 这个结果是正确的.

抑制舍入误差的增长，通常有两个途径. 一是增加参加计算的数字位数，使最后结果中积累起来的误差随之减小，如采用双倍位字长计算，但这样会使计算的时间增加. 我们这

里要讲的是另一种途径，就是在做除法运算时，要选取绝对值比较大的元素做分母. 这就是所谓主元素消去法的基本思想.

最常用和最有效的选取主元素的方法是列主元消去法和全主元消去法. 而一般来说，列主元法更可取（较简单、较省时且有效）.

列主元消去法中，未知数仍然是顺序地消去，但在各方程中要消去的那个未知数的系数中按模最大者作为主元素. 即是每消去一个未知数（例如 $x_k$）时，在要消去的各方程中找出这个未知数系数中按模最大者，例如 $a_{rk}$（$r\geqslant k$），并将第 $r$（$r\geqslant k$）个方程与第 $k$ 个方程交换位置，再按顺序消去法进行.

框图 1-1 描述了高斯列主元消去法的计算过程. 程序执行前，单元 $a_{ij}$，$b_i$（$i$，$j=1$，2，…，$n$）内先存放方程组原始数据，程序运行后，在单元 $b_1$，$b_2$，…$b_n$ 中得到所求的解 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$.

框图 1-2 描述了选列主元的处理过程. 它是图 1-1 中的选主元的具体化（子程序），其中单元 $a_{i,n+1}$ 用来存放方程组右端的 $b_i$（$i=1$，2，…$n$）.

## §1.5 应用高斯消去法的条件

从前述计算过程可知，高斯消去法能进行到底的充要条件是逐次的主对角元 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$（$k=1$，2，…，$n$）. 这对于非奇异矩阵来说，只要通过必要的行交换，总是可以满足的. 这从方程组（1.3）变到（1.8）的过程中不难看出，初等变换不会改变矩阵的非奇异性.

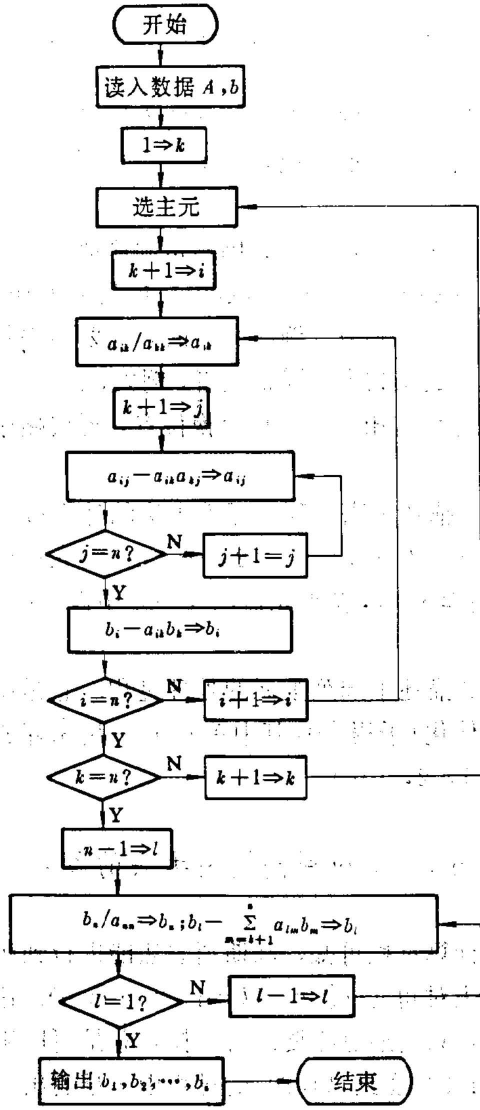
开始
读入数据 A，b
1⇒k
选主元
k+1⇒i
$a_{ik}/a_{kk} \Rightarrow a_{ik}$
k+1⇒j
$a_{ij} - a_{ik}a_{kj} \Rightarrow a_{ij}$
j=n?
N
j+1=j
Y
$b_i - a_{ik}b_k \Rightarrow b_i$
i=n?
N
i+1⇒i
Y
k=n?
N
k+1⇒k
Y
n−1⇒l
$b_n/a_{nn} \Rightarrow b_n; b_l - \sum_{m=l+1}^{n} a_{lm}b_m \Rightarrow b_l$
l=1?
N
l−1⇒l
Y
输出 $b_1, b_2, \cdots, b_n$
结束

图 1-1