高等学校试用教材

复变函数教程

朱静航 编

高等教育出版社

内容提要

全书分成八章和两个附录. 前五章叙述单变量单值函数的微分、积分、级数、留数理论和应用，第六章论述共形映射，第七章在解析开拓的基础上讲解初等多值函数和黎曼面，第八章讨论调和函数以及复变函数在流体力学上的应用. 两个附录分别介绍多元复变函数和复数域的函数逼近的初步知识.

本书可作为高等师范院校数学专业的试用教材使用.

高等学校试用教材

复变函数教程

朱静航 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.375 字数 275 000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 00 001—5,100

书号 13010·01410 定价 2.15 元

序　言

“复变函数论”所研究的对象，主要是复数域里具有解析性质的函数——一种特殊的复变函数类，故亦称“解析函数论”.

复变函数论和其他学科一样，经历了长期积累的过程. 它最初孕育于数学分析. 它的许多概念、理论以及研究方法，是数学分析里相应概念、理论和方法在复数域的拓广；并在拓广的过程中又出现了许多新概念、新理论、新方法和新应用. 从 18 世纪末到 19 世纪前半期，它才逐步发展成为具有独特逻辑结构、完善科学体系的重要数学分支. 复变函数论亦称“复分析”. 相对地，主要研究实变函数的“数学分析”，又名“实分析”.

关于复变函数的理论和方法，最先在 18 世纪出现于有名的数学家 Euler 的作品中. 他曾较详细地研讨过对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等. 人们都把他称为复变函数论的缔造人. Lagrange 也是有名的数学家，他继 Euler 之后，系统地讨论和发展了 Euler 的关于幂级数的性质，奠定了幂级数理论的全部基础. 到 19 世纪中叶，著名数学家 Cauchy 使复变函数逐步形成为严谨的理论. 他系统地研究并发展了积分概念，首创了至今仍在发展的函数结构理论. 人们称他为复变函数理论贡献最大的创始人. 如 Cauchy 积分理论是复变函数理论讨论的主要课题. Riemann 是对复变函数论有特殊贡献的另一位有名的数学家. 他不仅把 Cauchy 未完成的工作予以完成，并创造和奠定了复变函数论的几何理论基础. 与此同时另一位有名的数学家 Weierstrass 把函数理论算术化. 他重新研究了 Lagrange 关于用级数表示函数的观点，对级数理论作了大量有价值的工作. 嗣后 Riemann 和 Weierstrass 的学生们沿着两个不同的方向，形成观点不同的学

派. 直到 Cantor 集合论建立后，才使两个观点统一在共同的、坚实的集合论的基础上.

我们知道，任何数学理论的作用和意义，只有在它和客观现实对象相联系时才能最好地表现出来. 这种联系由于其具体内容，使理论更加丰富和充实；而随着理论的丰富和充实，它的应用范围又不断扩大. 这种联系显然标志着数学理论的生命力. 复变函数论的发展也是一样. 它的理论一开始就和现实对象流体力学结合起来，因而发展很快. 例如，C.-R.条件(方程) 这一判别复变函数为解析的条件，就是 Euler 在研究流体力学时获得的. 再如，某些稳定平面场的复势、复速度都是解析函数. 势(位)函数就是调和函数，任一调和函数能在物理上表现向量场的势(位)，等等.

复变函数理论的应用范围很广，如应用于代数、解析数论、微分方程、积分方程、计算数学、概率论、理论物理、流体力学、弹性理论、空气动力学、静电场、热场等，并成为解决有关问题的有力工具. 由于它的广泛应用，许多新理论、新方法又大量涌现. 因此，随着复变函数理论本身的发展及其与其他科学技术的联系，它的内容更加丰富多彩，并且开辟了许多新分支和正在发展的新领域，如复逼近理论、多复变函数理论等，它们的发展正在方兴未艾.

本教程是根据 1980 年部颁教学大纲的要求和学时编写的，鉴于时间有限，只能从大量的内容中选取最基础的内容，即围绕 Euler, Cauchy, Riemann 和 Weierstrass 等人的基础工作，以 Cauchy 理论为中心，围绕解析函数的特征性质（如无穷可微分性、沿闭路积分等于零、展开成幂级数、共形映射等），来构成本教程的基本内容. 这些内容虽说是古典的，但都是最基本的、不可缺少的基础知识、基本理论和基本方法. 有的还各自代表不同的分支和科学研究方向.

在这些内容的基础上，还适当引进了这一学科的某些新发展，

为读者提供一些科研方向和课题．如复函数逼近、多复变函数、拟共形映射、整函数与亚纯函数、多项式零点分布等．这些内容尽管是极初步的，但对于巩固和加强理解基础知识，扩大视野，了解发展趋势和科研方向，增强学习兴趣和钻研的积极性，可能都是有益的．这些内容有的加*号，有的作为附录给出，读者可以根据实际情况取舍．

为了高师院校培养目标的需要，第一章从复数的产生、复数构成域、复数无大小讲起，进而建立解析函数概念．第二章从初等函数分类讲起，以 e^z 与 $\ln z$ 为中心，系统地讨论了初等函数的性质．我们把共形映射纳入第六章，把多值性纳入第七章，以分散难点．如果对前两章内容已有些基础，则可以从第三章讲起，用积分定义解析函数，用第四章幂级数定义 e^z，$\cos z$等．但对高师院校来说，仍以从头讲起为好．

我们希望教师根据这门课程的部颁教学大纲和时间，围绕各章主题和重点内容，安排课堂讲授重点和课外作业；针对程度不同的学生，提出不同的要求，使绝大多数学生掌握好基本内容；对有余力的学生，鼓励他们学带*号和附录里的某些内容，多作一些习题（或另选习题）①；有些内容可让学生自学．

本教程是在多年使用的讲义基础上，依部颁新大纲（1980年），在新形势下重新改写的．但谬误之处在所难免，务希读者提出批评和指正．在这次改写过程中，承新乡师范学院穆鸿基副教授、吉林工学院刘俊英副教授、东北师大肖荫菴副教授、讲师梁世安等提出过许多宝贵的具体意见，特此一并致谢．

编　　者

① 请参考朱静航主编的《复变函数论》（大学自学丛书，辽宁人民出版社，1983）一书的例题和习题解答．

目　录

第一章 复变解析函数

在序言里，我们曾指出这一学科所研究的对象是复数域里的解析函数类. 什么是解析函数?怎样判别一个复变函数是解析的?这是本章讨论的主题.

在序言里还说复变函数论最初孕育于“数学分析”，经过发展又从“数学分析”中分离出来，并发展成为数学里分析领域的重要分支之一. 它的某些概念如函数、极限、连续、导数等几乎逐字逐句是“数学分析”相应概念的推广或极为类似. 因此，这一章与“数学分析”相平行地，从复数构成域、在复数域上定义函数出发，讨论函数的极限、连续、导数，进而建立解析函数概念，从 $f'(z)$ 存在、从偏导数存在且满足 C.-R. 方程来判别 $f(z)$ 的解析性. 在突出主题的同时，对复数的产生、有无大小等问题作了回答.

在引入解析函数概念之前，先介绍一些预备知识. 我们从虚数的产生、复数的运算谈起.

§1.1* 虚数的产生，i 的引入

今天，我们已习惯于负数开平方的运算，对于虚数及其运算和解方程出现虚根并不陌生. 而历史上对于虚数的产生却出现过截然相反或对立的认识. 人们长时期对于它们的实际意义不了解，这从它们的名称(虚数)可以看出. 从虚数的地位能在数学上巩固下来到复变函数理论的创立，其间经历了漫长的岁月. 远在三世纪，尽管人们能解某些数字系数的一元二次方程，但对于 $x^2+1=0$ 这一简单方程却束手无策 (那时限于实数范围，$x^2+1=0$ 自然不能解)

直到 16 世纪 50 年代，人们在解一般的一元三次方程时，才发

现了虚数. 如解型如

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

的代数方程,得出根为

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\quad R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} \tag{2}$$

其中 p 与 q 为实数. 人们称(2)为 Carcano 公式. 在实数范围内. 这个公式对于某些方程有效. 例如,解方程

$$x^3-6x+9=0$$

应用(2)能求出一个实根 -3,其中 $R=\frac{49}{4}$,$\sqrt{R}=\frac{7}{2}$. 但(2)对于另一些方程便无效. 例如,解

$$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)=0$$

时,显然可得三个实根1, 2, -3. 但因 $R=-\frac{100}{27}$,$\sqrt{R}$在实数范围内无意义.

于是人们就突破实数范围这个限制,创立和引入一种新数——虚数. 经过实践验证,在新数范围内 Cardano 公式对于解任意一元三次方程都有效,在实数范围内无解的方程 $x^2+1=0$ 这时有解了. 嗣后丹麦土地测量者 Westel 给出了复数运算的几何表示. 法国 Argand、德国 Gauss 等人各自给出了复数的几何表示的新论证(后来人们称复平面为 Argand 平面或 Gauss 平面). 正是这种几何表示法,使虚数在数学中的地位巩固下来. 而在这以前,它们一直是不可理解的.

直到 19 世纪末,随着科学技术的发展,复数概念在流体力学及其他物理学科上被广泛应用,实践证明了"虚"变量函数的理论,完全不是虚假的,而是客观存在与解决实际问题的现实的有力工具之一. 从此复数和复变函数理论不仅在数学里取得了重要地位,并且由于虚数的产生,复数的建立,数域的扩张,复变函数理论

与实践的密切结合，新理论、新方法和新应用的不断出现，数学也就进入了新阶段.

我们已知虚数$\sqrt{-4}$，$\sqrt{-m}$等可分别写成$2\sqrt{-1}$，$\sqrt{m}\sqrt{-1}$（m是实数）的形式.称$\sqrt{-1}$为**虚数单位**，并用i来表示它，$i^2=-1$. Euler在他的著作中第一次引入i，$i=\sqrt{-1}$（$\sqrt{-1}$表示它可能取的两个值中的一个）.

§1.2 复数及其几何表示

1°. 复数概念

怎样定义和表示复数?人们依不同的需要创造了多种形式.19世纪40年代英国Hamilton利用“实数对”来定义复数. 所谓**复数，就是具有一定次序的实数对**. 例如：$a,b,c,d,\cdots$为实数，则实数对(a,b)，(c,d)，$\left(-\frac{1}{2},\sin 30°\right)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(0,0)$，$\left(\sqrt{2},-e\right)$等都是复数.我们把$(1,0)$，$(0,0)$，$(-1,0)$，$(0,1)$分别定义为$1,0,-1,i$. 即$1=(1,0)$，$0=(0,0)$，$-1=(-1,0)$，$i=(0,1)$、从下面定义的运算法则易见，这样规定是合理的.

设$\alpha=(a,b)$，$\beta=(c,d)$，则它们的**相等**、**加法**与**乘法**的运算分别用下列等式来定义；

$$(a,b)=(c,d)\text{ 当且仅当 }a=c,b=d$$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b),\lambda\text{ 为实数}$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

又设$\beta\neq(0,0)$，置$\beta^{-1}=\frac{c}{c^2+d^2}-i\frac{d}{c^2+d^2}$. 我们称$\frac{\alpha}{\beta}$（意即$\alpha\beta^{-1}$）为$\alpha$被$\beta$除的商. 于是

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right),c^2+d^2\neq 0$$

我们把全体复数连同加法和乘法运算一起称为**复数系**，记为 C. 依集合构成域的公设,C 构成域:

(i) 它对于加、乘两种运算显然是封闭的,即两复数的和与积仍是复数:

(ii) 加法和乘法运算满足交换律、结合律和分配律;

(iii) 存在零元 $0=(0,0)$ 及幺元 $1=(1,0)$ 使

$$(a,b)+(0,0)=(a,b),(a,b)(1,0)=(a,b)$$

(iv) 有逆元 $(-a,-b)$ 使 $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$; 及 $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ 使 $(a,b)(a,b)^{-1}=(1,0)$, 其中 $(a,b)\neq 0$

所以 C 是代数上所谓域的一种.

由上所述,显然有

$$\begin{aligned}\alpha&=(a,b)=(a,0)+(0,b)\\&=(1,0)(a,0)+(0,1)(b,0)\\&=1\cdot a+ib=a+ib\end{aligned}$$

这里的 $a+ib$ 是复数通常(或古典)的表示形式. 在具体运算中,这种古典的表示式比数对 (a,b) 要方便，也易于掌握和记忆. 例如:

$$\alpha\pm\beta=(a\pm c)+i(b\pm d)$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(a+ib)(c+id)\\&=(ac-bd)+i(ad+bc)\end{aligned}$$

我们依次称 a 与 b 为复数 $\alpha=a+ib=(a,b)$ 的**实数部分**和**虚数部分**(或**实部**和**虚部**)①,分别记为

$$a=\mathrm{Re}\alpha, b=\mathrm{Im}\alpha$$

---

① 实部(Real part),虚部(Imaginary part).

我们把数$\sqrt{a^2+b^2}$称为α的**模**（**或绝对值**），记为$|\alpha|$；把$\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$称为$\alpha(\neq 0)$的**辐角**，记为$\operatorname{Arg}\alpha$①. 显然$|\alpha|\geqslant 0$，$\operatorname{Arg}\alpha$为多值.

数“零”是唯一模为0、辐角无定义的（有限）复数.

我们把复数$a-ib$称为$\alpha=a+ib$的**共轭复数**，记为$\bar{\alpha}$. 它的模$|\bar{\alpha}|=|\alpha|$，辐角$\operatorname{Arg}\bar{\alpha}=\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{-b}{a}\right)$.

显然，下列诸式成立：

$$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2,\ \overline{(\alpha\pm\beta)}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta},\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}(\beta\neq 0)$$

$$a=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2},b=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i},|\alpha|\geqslant|a|,|\alpha|\geqslant|b|$$

$$-|\alpha|\leqslant\operatorname{Re}\alpha\leqslant|\alpha|,-|\alpha|\leqslant\operatorname{Im}\alpha\leqslant|\alpha|$$

注意：全体复数所构成的域与实数域不同，后者是有序域，前者不是有序域. 即任意两个复数α与β，不能像实数那样有$\alpha<\beta$或$\alpha>\beta$. 也就是说，不能把实数的有序性推广到复数. 这是因为，如果假定复数是有序的，则i与0之间应有

$$i>0\quad 或\quad i<0$$

如果设$i>0$，则$i\cdot i>0$，于是$-1>0$，这是不可能的. 同样，设$i<0$，则$-i>0$，于是$(-i)(-i)>0$，得$-1>0$，这也是不可能的. 故复数域不是有序域.

但是，复数的模和辐角都是实数，模和辐角是有序的. 从这个意义来说，复数域是**部分有序的**.

我们还要指出，复数域除了不是有序域外，它同有理数域和实数域还有一个很重要的差别，即复数域C的**代数封闭性**. **就是说**

① 辐角（Argument 或 amplitude）.