线性偏微分算子

〔瑞典〕L. 霍曼德尔 著

陈庆益 译

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书用近代数学工具(分布理论)比较全面地讨论了线性偏微分方程的主要问题(解的存在问题、解的光滑性问题、初值问题和椭圆型边界问题),总结了七十年代以前的研究成果,是线性偏微分算子一般理论方面的重要著作. 原书于 1963 年初版. 中译本根据第一版译出,后又按照 1976 年第四次印刷本作了修订.

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生和有关科技人员阅读.

L. Hörmander
LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS
Springer-Verlag, 1976

线性偏微分算子
〔瑞典〕L. 霍曼德尔 著
陈庆益 译
*
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1980 年 3 月第 一 版　开本:787×1092 1/32
1980 年 3 月第一次印刷　印张:11 3/4
印数:0001—9,280　字数:269,000

统一书号:13031·1199
本社书号:1671·13—1
定价: 1.45 元

目 录

第一部分 泛 函 分 析

第一章 分 布 理 论

1.0. 引言. 本章的目的在于对以后各章要用到的分布[1]理论的一些定义和结果作一扼要的叙述. 为了了解这里所讨论的几乎全部论题的更详尽的研究,读者可参考 Schwartz[1]. 仅有的例外是定义 1.3.3 及有关的定理 1.7.8, 这些则建基于 Ehrenpreis[2]的思想(也可见Malgrange[3]和 Hörmander[14]). 在 1.8 节我们添加了流形上的分布的定义, 这将在第十章中用到. 在同一节我们还安插了特征方程古典积分理论的简要陈述.

分布理论的历史(见 Schwartz[1] 的引言)与偏微分方程理论密切相关. Cauchy 问题的研究引出了某些分布(见 Hadamard[1]及 Riesz[1]), 而沿同一途径 Sobolev [1] 几乎到达分布理论. 在微分方程变分方法研究中自然出现的弱导数概念(见 1.1 节)也早被 Friedrichs [1] 用到. 但只是在 Schwartz [1]中(这里, Fourier 变换是一个重要部分), 分布理论才以最终形式成为偏微分方程研究中的一个方便的工具.

在偏微分方程理论的某些领域, 例如在特征初值问题的唯一性问题中, 更要用到修正的分布理论. 我们不打算研究这些结果,而请读者参看 Gelfand 及 Šilov[1].

1.1. 弱导数. 如果想为偏微分方程建立一个简单而普遍

1) 也称为广义函数或广函. ——译者注

的理论，多变量函数的古典运算是不适用的．例如，尽管两个微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0$ 应该是等价的，但每一仅含 x 的函数总满足前一方程，而对这种函数，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 却不一定都有意义．这是很不自然的，而表明需要用新的对象"分布"来充实函数类，使微分运算总是可能的．这时重要的是：要尽可能多地保持函数空间的性质．

为了奠定形式定义，我们先注意怎样借把一个微分算子看作是伴算子而扩张这个算子的定义域．例如，方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f$ 表明：若 u 二次连续可微，则对每个二次连续可微且在一个有界集外恒等于零的函数 φ 有

$$\iint u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\,dxdy=\iint f\varphi\,dxdy. \qquad (1.1.1)$$

事实上，若在上式左端进行分部积分，把微分运算从 φ 转到 u 上，就立刻得到(1.1.1)．也容易看到，对任何给定的 u，恒等式(1.1.1)不会对多于一个的连续函数 f 成立(见1.2节)．这样，当恒等式(1.1.1)成立时，就自然在**弱意义下**定义 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f$．显然，方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f$ 在弱意义下就成为等价的了．

但我们可采取另一途径，把线性形式[1)]

$$\varphi\to\iint u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\,dxdy$$

当作 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 的表示式，即令这时不存在任何连续函数 f 使它

1) 也称为线性泛函或线性函数．——译者注

能写成 $\iint \varphi f dxdy$. 为了能研究任何阶的微分算子，我们就得考虑在有界集外为零并有各阶连续导数的函数的集上的线性形式. 在给出分布的确切定义之前，在下一节我们就要研究这种函数.

1.2. 试验函数. 设 Ω 为实 n 维空间 R_n 中的一个开集，u 是 Ω 中的一个连续函数. 我们称集 $\{x;\ x\in\Omega,\ u(x)\neq 0\}$ 在 Ω 中的闭包为 u (在 Ω 中)的支集，记成 $\operatorname{supp} u$. 故支集是 Ω 内使 u 在其外为 0 的相对闭[1]子集中最小的集.

定义 1.2.1. 用 $C^k(\Omega)(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 记定义于 Ω 的所有 k 次连续可微的函数 u 的集. 用 $C_0^k(\Omega)$ 记 $C^k(\Omega)$ 中所有具含于 Ω 的紧支集[2]的函数的集[3].

$C_0^\infty(\Omega)$ 中的元素常被称作 Ω 中的试验函数，因为它们被用于像(1.1.1)一类的公式中来检验一个微分方程是否依弱意义在 Ω 中成立. R_n 中试验函数的一个古典例子是 $\varphi(x)=f(|x|^2-1)$，其中 $|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$，而

$$f(t)=\begin{cases} e^{1/t}, & \text{当 } t<0;\\ 0, & \text{当 } t\geqslant 0.\end{cases}$$

事实上，因 f 的所有阶导数当 $t\neq 0$ 时存在且当 $t\to 0$ 时收敛于 0，故 $f\in C^\infty(R_1)$. 在用一个适当的常数因子修改 φ 的定义后可得

$$\varphi\in C_0^\infty(R_n),\quad \int\varphi dx=1,\quad \varphi\geqslant 0,\quad \operatorname{supp}\varphi=\{x;|x|\leqslant 1\}. \tag{1.2.1}$$

从满足(1.2.1)的任意函数出发，取任意可积函数 u 作卷

---

1) 所谓相对闭，指关于 Ω 为闭的. ——译者注

2) 所谓紧支集，指支集为紧集. R_n 中的紧集也就是有界闭集. ——译者注

3) $C_0^{(k)}(\Omega)$ 当然可等同于支集含于 Ω 的所有 $\varphi\in C_0^k(R_n)$ 的空间. 我们将一直利用这种等同性，并对任意集 $A\subset R_n$ 记 $C_0^\infty(A)=\{\varphi;\varphi\in C_0^\infty(R_n),\ \operatorname{supp}\varphi\subset A\}$.

积(见§ 1.6)

$$u_\varepsilon(x)=\int u(x-\varepsilon y)\varphi(y)dy=\int \varepsilon^{-n}u(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy, \tag{1.2.2}$$

可得新的试验函数. 事实上,我们将证明

定理 1.2.1. 设 u 可积且在 Ω 的紧子集 K 外为 0,则当 ε 小于 K 到 $C\Omega$ 的距离 δ 时, $u_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 若 $u\in L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$[1], 则在 L_p 的范下有 $u_\varepsilon\to u$; 若 u 连续,则 u_ε 均匀收敛于 u.

证 u_ε 的连续性由(1.2.2)的后一表达式及 φ 的连续性推出. 此外,我们可在同一公式中在积分号内微分 φ 任意次,这就证明了 $u_\varepsilon\in C^\infty(\Omega)$. 今 $u_\varepsilon(x)\neq 0$ 表明对球 $|y|\leqslant 1$ 上某点 y 有 $x-\varepsilon y\in K$. 故 u_ε 的支集是由与 K 相距最多为 ε 的点组成的闭子集, 而当 $\varepsilon<\delta$ 时, 它是 Ω 的紧子集. 因此, $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

现在假定 u 连续. 因 $\int\varphi dx=1$, 可写

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int[u(x-\varepsilon y)-u(x)]\varphi(y)dy.$$

由 u 的均匀连续性知,当 $\varepsilon\to 0$ 时 u_ε 均匀收敛于 u. 再设 $u\in L_p$. 因 $\varphi\geqslant 0$ 且 $\int\varphi dx=1$, 由 Minkowski 不等式[2]得 $\|u_\varepsilon\|_p\leqslant\|u\|_p$, 这里范为 L_p 中的范. 对任何 $\eta>0$, 我们能找到

---

1) L_p 为可测并关于 Lebesgue 测度 p 次幂可积的函数(的等价类)的空间. L_p 中的范记作 $\|\ \|_p$. 若 Ω 为开集, 用 $L_p^{loc}(\Omega)$ 记在 Ω 任一紧子集上属于 L_p 的函数的空间. 当 $p=\infty$ 时,这些定义可按通常方式修订.

2) 也可用 Hölder 不等式: $u_\varepsilon=\int u(y)\left[\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^{1/p}[\varphi]^{1/q}dy$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. ——译者注

$v \in C_0^0(\Omega)$ 使 $\|u-v\|_p<\eta$，故有 $\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_p<\eta$. 由关于均匀收敛性已证得的结果知

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\|u_\varepsilon-u\|_p \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_p+\|u-v\|_p$$

$$+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\|v_\varepsilon-v\|_p<2\eta,$$

这就证明在 L_p 中范下有 $u_\varepsilon\to u$.

特别，这个定理表明 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L_p(\Omega)$ 中为稠密的. 此外，对分布的定义重要的是：一个测度由它对 $C_0^\infty(\Omega)$ 的缩相[1)]唯一确定. 因若 $d\mu$ 为 Ω 中测度且对每个 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $\int ud\mu=0$，则对每个 $u\in C_0^0(\Omega)$ 有

$$\int ud\mu=\lim\int u_\varepsilon d\mu=0.$$

我们也还要用到下面两个关于试验函数的存在性的结果.

定理 1.2.2. 若 K 为 Ω 的紧子集，存在函数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 具性质：$0\leqslant\phi\leqslant 1$，且在 K 的某邻域中 $\phi=1$.

证. 设 $0<\varepsilon<\varepsilon'<\varepsilon+\varepsilon'<\delta$，这里 δ 和定理 1.2.1 中一样定义. 在由与 K 的距离 $\leqslant\varepsilon'$ 的点组成的紧集 $K_{\varepsilon'}$ 中令 $u=1$，在 $K_{\varepsilon'}$ 外令 $u=0$，则由(1.2.2)定义的 u_ε 的支集显然在 $K_{\varepsilon+\varepsilon'}$ 中，且 u_ε 在 $K_{\varepsilon'-\varepsilon}$ 中等于 1. 取 $\phi=u_\varepsilon$，ϕ 的其他性质由定理 1.2.1 推出.

更一般地，我们要证明单位分解的存在性的如下弱形式(见 Schwartz[1]，p. 23 及 de Rham [1]，p. 4).

定理 1.2.3. 设 $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$ 为开集，K 为紧集且 $K\subset\bigcup_1^k\Omega_j$.

1) 指把 $C^0(\Omega)$ 上的线性连续泛函(测度)作为 $C^0(\Omega)$ 的子空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的线性连续泛函. ——译者注

则存在函数 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$具性质：$\varphi_j \geqslant 0, \sum_1^k \varphi_j \leqslant 1$，且等号在 K 的某邻域中成立.

证. 对 $j = 1, \cdots, k$，选择紧集 $K_j \subset \Omega_j$ 使 $K \subset \bigcup_1^k K_j$. 应用定理 1.2.2 可得 $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ 使 $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$，且在 K_j 的某邻域中 $\psi_j = 1$. 令 $\varphi_1 = \psi_1$; $\varphi_j = \psi_j(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1})$, $j = 2, \cdots, k$.

则有
$$\sum_1^k \varphi_j = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k),$$
故定理中的所有结论显然成立.

1.3. 分布的定义和基本性质. 我们先就 n 变量的运算引进一些有用的记号. 以 α 表多重指标，即非负整数的 n 重组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 它们的和 $\sum_1^n \alpha_j$ 记作 $|\alpha|$[1]，而积 $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$ 记作 $\alpha!$. 若 m 为整数 $\geqslant |\alpha|$，记 $\binom{m}{\alpha} = \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!}$. 对 $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$，令
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}.$$
这里 i 为虚数单位；它用于 D_j 的定义中是为了以后的方便. 同样可写
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

定义 1.3.1. Ω 中的一个分布 u 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的一个线性形式，使得对于每个紧集 $K \subset \Omega$，存在常数 C 及 k 致
$$|u(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup |D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K). \tag{1.3.1}$$

---

1) 有时称 $|\alpha|$ 为多重指标 α 的长. ——译者注

Ω 中所有分布的集记作 $\mathscr{D}'(\Omega)$. 若(1.3.1)中的 k 可取得与 K 无关，则分布 u 称为在 Ω 中具有限的阶，且整数 k 中的最小者称为 u 在 Ω 中的阶. Ω 中所有有限阶的分布的集记作 $\mathscr{D}'_F(\Omega)$.

例 1. 若 $u\in L_1^{loc}(\Omega)$ 而 α 为任意的多重指标，则线性形式

$$C_0^\infty(\Omega)\ni\varphi\to\int uD^\alpha\varphi dx$$

定义一个阶 $\leqslant|\alpha|$ 的分布. 这就是我们在 1.1 节中引出的一种类型的分布.

例 2. 设 $n=1$ 而 $\Omega=(0,1)$，则线性形式

$$u(\varphi)=\sum_1^\infty\varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)$$

在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中而不在 $\mathscr{D}'_F(\Omega)$ 中.

记号 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的来由是：Schwartz [1] 用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 记空间 $C_0^\infty(\Omega)$，并赋以拓扑使 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 为其对偶空间(见定理 1.3.2 下的注).

定义 1.3.1 的一个等价形式由下面的定理给出.

定理 1.3.1. $C_0^\infty(\Omega)$ 上的线性形式 u 为分布乃当且仅当对具下列性质的每个列 $\varphi_j\in C_0^\infty(\Omega)$，当 $j\to\infty$ 时有 $u(\varphi_j)\to 0$：i) 对每个多重指标 α，当 $j\to\infty$ 时均匀有 $D^\alpha\varphi_j\to 0$；ii) 存在 Ω 的固定紧子集，包含所有 φ_j 的支集.

满足条件 i) 及 ii) 的列称为在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中收敛于 0.

证. 必要性由(1.3.1)立刻推出. 另一方面，若(1.3.1)对 $C=k=j$ 不成立，则因(1.3.1)关于 φ 为齐次的，我们能找到 $\varphi_j\in C_0^\infty(K)$ 使 $u(\varphi_j)=1$ 且 $\sup|D^\alpha\varphi_j|\leqslant\frac{1}{j}$, $|\alpha|\leqslant j$. 若对某 K，(1.3.1)对任何的 C 及 k 都不成立，我们就得到一个列

φ_j,而与定理中的条件矛盾．这就证明了定理．

若 $d\mu$ 为 Ω 中测度,则线性形式

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \to \int \varphi d\mu$$

是 Ω 中一个分布,且如我们在定理 1.2.1 后所证明的，不同的测度对应于不同的分布．这样，我们就可以把测度与相应的分布等同起来．由于一个绝对连续测度和其密度函数的等同性（如在积分理论中通常所作的那样），这就特别表明一个函数 $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ 等同于分布

$$\varphi \to \int \varphi f dx.$$

这个分布也记作 f（注意我们把殆遍相等的函数等同起来）．

在 3.6 节我们要用到分布的连续性质的如下的等价表述．

定理 1.3.2. $C_0^\infty(\Omega)$上的线性形式 u 为分布当且仅当：存在一族函数 $\rho_\alpha \in C^0(\Omega)$,使集 $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ 为局部有限的[1],且

$$|u(\varphi)| \leqslant \sum_\alpha \sup|\rho_\alpha D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (1.3.2)$$

此外，当且仅当 u 具阶$\leqslant k$ 时，所有使 $|\alpha| > k$ 的 ρ_α 可取为 0.

证．(1.3.2)的充分性是显然的．另一方面,设$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$．取单增紧集列 $K_j \subset \Omega$ 使 Ω 的每一紧子集属于某 K_j，选择 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$，使在 K_j 中 $\varphi_j = 1$．令 $\psi_1 = \varphi_1$; $\psi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1}$, $j > 1$，有

$$\varphi = \sum_1^\infty \psi_j \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

这个和实际是有限项的．既然 $\psi_j \varphi$ 的支集含于 K_j,选择适当

---

1) 这就是说，Ω 中无紧子集能与多于有限个 $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ 相交．

的 C_j 和 k_j，根据定义 1.3.1 知

$$|u(\varphi)| \leqslant \sum_1^\infty |u(\varphi\phi_j)| \leqslant \sum_1^\infty C_j \sum_{|\alpha|\leqslant k_j} \sup |D^\alpha(\phi_j\varphi)|. \tag{1.3.3}$$

因在 K_{j-1} 中 $\phi_j = 0$，集 $\{\operatorname{supp}\phi_j\}$ 是局部有限的．若应用 Leibniz 公式完成 (1.3.3) 右端的微分运算，显然就得到形如 (1.3.2)的估式．若注意到对于一个 k 阶分布 u 可就每个 j 取 $k_j = k$，证明就完成了．

注．定理 1.3.2 表明：若用出现于 (1.3.2) 右端的半范族定义 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的拓扑[1)]，$C_0^\infty(\Omega)$ 就成为一个局部凸的拓扑向量空间，并以 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 为对偶空间（见 Dieudonné-Schwartz[1]，Bourbaki[1]，pp.64—65）．

$\mathscr{D}'(\Omega)$ 显然为向量空间，而具如下的自然的加法及与纯量的乘法定义：

$$(a_1u_1 + a_2u_2)(\varphi) = a_1u_1(\varphi) + a_2u_2(\varphi),$$
$$u_1,\ u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega),\quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

（这里 a_1 及 a_2 记复的常数）．我们常要用到 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的**弱拓扑**，即由半范族

$$\mathscr{D}'(\Omega) \ni u \to |u(\varphi)|$$

定义的拓扑，这里 φ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 中任一固定元．因此，$u_i \to u$ 意味着：对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$u_i(\varphi) \to u(\varphi).$$

注．由 Banach-Steinhaus 定理可知：若列 $u_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$，且对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，极限 $u(\varphi) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(\varphi)$ 存在，则 $u \in$

---

1) 即以$\{\varphi;\ \sum\limits_\alpha \sup|\rho_\alpha D^\alpha\varphi| < \varepsilon\}$ 作为零元邻域而产生的拓扑．这些邻域显然是凸集，故所得拓扑向量空间称为局部凸的．——译者注

$\mathscr{D}'(\Omega)$，故据定义有 $u_j \to u(j \to \infty)$. 我们不会用到这个事实，所以读者可补充证明的细节.

给定 Ω 中一个分布 u，我们可借限定线性形式 u 的定义域于 $C_0^\infty(\Omega')$ 来定义 u 对开集 $\Omega' \subset \Omega$ 的缩相. $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的两个分布 u_1 及 u_2 若在一点 $x \in \Omega$ 的某个开邻域的缩相是相等的，就说它们在 x 的邻域中是相等的. 一个分布的局部性状完全确定这个分布；事实上，我们将证明

定理 1.3.3. 设 Ω 中两个分布 u_1 及 u_2 具性质：Ω 中每点都有一邻域，使在其中有 $u_1 = u_2$，则在 Ω 中有 $u_1 = u_2$.

证. 设 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，记 $K = \operatorname{supp} \varphi$. 据假定，$K$ 中每点有一邻域使 $u_1 = u_2$. 因 K 为紧集，我们可从这些邻域中找出有限个 Ω_j 来覆盖 K. 按定理 1.2.3 作 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$，有 $\varphi = \sum \varphi \varphi_j$，于是

$$u_1(\varphi) = \sum u_1(\varphi \varphi_j) = \sum u_2(\varphi \varphi_j) = u_2(\varphi).$$

这就证明了定理.

定义 1.3.2. 设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$u$ 的支集定义为 Ω 中这样的点集，在这些点的任何邻域中 u 都不为 0. u 的支集记作 $\operatorname{supp} u$.

显然，$\operatorname{supp} u$ 在 Ω 中为相对闭的，因为它的补集是开的. 此外，由定理 1.3.3 知，在 $\operatorname{supp} u$ 对 Ω 的补集中有 $u = 0$，即：

若 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$，则 $u(\varphi) = 0$，这里 $\varnothing$ 记空集. 因此，$\operatorname{supp} u$ 的补集是 Ω 中使 $u = 0$ 的最大开集. 故当 u 为连续函数时，这里支集的定义与 1.2 节给出的定义一致.

下面一个与支集密切相关的概念在 3.6 节中将是重要的.

定义 1.3.3. 设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$u$ 的奇支集，记作 $\operatorname{sing\,supp} u$，定义为 Ω 中这样的点集，在这些点不存在邻域使 $u \in C^\infty$.

同样明显，sing supp u 为 Ω 中相对闭子集，且重复定理 1.3.3 的证明可知：在 sing supp u 关于 Ω 的补集中有 $u\in C^\infty$.

1.4. 分布的微分法及以函数相乘. 为引出导数的定义，我们先假定 $u\in C^1(\Omega)$ 并注意借分部积分一次可得

$$\int (D_k u)\varphi dx = -\int u D_k\varphi dx,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1.4.1)$$

(这就是 1.1 节讨论过的微分法的弱形式). 故下面的定义对 C^1 中的函数说就与古典的定义一致.

定义 1.4.1. 设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，我们定义

$$(D_k u)(\varphi) = -u(D_k\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega). \qquad (1.4.2)$$

显然,(1.4.2)定义一个新分布 $D_k u$，且映射 $u\to D_k u$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$中为连续的. 还可注意

$$D_k D_j u = D_j D_k u,$$

因为

$$(D_k D_j u)(\varphi) = u(D_j D_k\varphi) = u(D_k D_j\varphi) = (D_j D_k u)(\varphi),$$
$$\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

更一般地,总有

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\varphi),\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.4.3)$$

例 1. 设 ε_a 为由 $\varepsilon_a(\varphi)=\varphi(a)$ 定义的在点 a 的 Dirac 测度[1),则

$$(D^\alpha\varepsilon_a)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha\varphi)(a),\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

(Dirac 测度也常记作 δ_a,且当 $a=0$ 时足标 a 可略去.)

例 2. 设 H 为 Heaviside 函数: $H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则有

$$H' = \delta.$$

其次我们要证明,至少局部地，$\mathscr{D}'(\Omega)$ 是 L_∞ 的最小的

---

1) 也称为 δ 函数. ——译者注

可能扩张，使在其中微分运算总是可能的.

定理 1.4.1. 设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$且 ω 为开集而使 $\omega\Subset\Omega$[1]. 则存在函数 $f\in L_\infty(\omega)$ 及整数 m 使在 ω 中有 $u=D_1^m\cdots D_n^m f$.

证. 我们要找出一个函数 $f\in L_\infty(\omega)$ 使

$$u(\varphi)=(-1)^{nm}\int fD_1^m\cdots D_n^m\varphi dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega).\tag{1.4.4}$$

记 $C=\|f\|_\infty$，上式表明

$$|u(\varphi)|\leqslant C\int |D_1^m\cdots D_n^m\varphi|dx,\ \varphi\in C_0^\infty(\omega).\tag{1.4.5}$$

反之，若我们能证明(1.4.5)，则由 Hahn-Banach 定理知，线性形式

$$(-1)^{nm}D_1^m\cdots D_n^m\varphi\to u(\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega)$$

可延拓为 $L_1(\omega)$ 上的线性形式，且范$\leqslant C$. 但因 $L_\infty(\omega)$ 是 $L_1(\omega)$ 的对偶空间，这就正表明存在函数 $f\in L_\infty(\omega)$，$\|f\|_\infty\leqslant C$，使(1.4.4)成立.

因此只须证明(1.4.5). 首先注意，由定义 1.3.1 知

$$|u(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|D^\alpha\varphi|,\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega).$$

若 $\psi\in C_0^\infty(\omega)$，而 a_j 为 $|x_j|$ 在 ω 中的上界，则据中值定理有 $\sup|\psi|\leqslant a_j\sup|D_j\psi|$，$\psi\in C_0^\infty(\omega)$. 重复应用这种估计，则对另一常数 C 得

$$|u(\varphi)|\leqslant C\sup|D_1^k\cdots D_n^k\varphi|,\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega).\tag{1.4.6}$$

但当 $\psi\in C_0^\infty$ 有

$$\psi(x)=i^n\int_{y<x}D_1\cdots D_n\psi dy,$$

这里积分乃对集 $x_1>y_1,\cdots,x_n>y_n$ 进行. 因此

$$\sup|\psi|\leqslant\int|D_1\cdots D_n\psi|dx.\tag{1.4.7}$$

---

1) 这表示 $\bar\omega$ 为紧集且 $\bar\omega\subset\Omega$.