工程振动导引

骆振黄 编著

上海交通大学出版社

工 程 振 动 导 引

骆振黄　　编著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了振动学的基本原理，并且提供了工程应用实例。每一章都有生动的例题，以加深读者对基本概念的理解。

前五章介绍振动力学一般概念，着重研究单自由度系统的自由、阻尼、受迫与瞬态振动。对阻尼机理作较详细的讨论是本书特色之一。后四章介绍多自由度系统振动，重点放在建立现代矩阵分析方法和研究近似方法(例如 Rayleigh-Ritz 法、Dunkerley 法、Southwell 法等)与数值计算方法。此外，还专章介绍连续系统振动。最后一章是阻抗与导纳，为研究振动新分支——模态分析打下基础。

本书可作为工科大专院校机械类本科各专业高年级及研究生"机械振动学"课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员参考和自学。

工程振动导引

出 版：上海交通大学出版社
(淮海中路 1984 弄 19 号)
发 行：新华书店上海发行所
排 版：浙江上虞汤浦 印刷厂
印 刷：江苏太仓印刷厂
开 本：787×1092(毫米) 1/16
印 张：17
字 数：418000
版 次：1989年5月 第1版
印 次：1989年6月 第1次
印 数：1—2300
科 目：198—265
ISBN 7-313-00508-3/TB·1
定价：3.40 元

前　　言

本书原系1980年以来著者为大学本科生及研究生(部分内容)开设振动课程的讲稿，曾于1984年整理成讲义在校内试用。这次作了大幅度修改增删，使内容更为充实。

有些专题，例如随机振动、非线性振动、板壳振动等，近年来已发展成为振动学中的独立分支，属于研究生选修课程，另有专著，本书不包括这些内容。

国内外振动著作已有不少，与其他书籍比较，本书有以下几个特点：

(1) 本书着重振动学中最基本的原理和工程应用，每一章都有例题以加深概念的理解和应用；

(2) “阻尼”是振动中一个很重要的概念，但大多数书上都“语焉不详”，不加重视，本书对此有较详细的讨论；

(3) 注意国内外新发展，例如 Rayleigh-Ritz、Dunkerley、Southwell 等方法，其他书籍都停留在经典处理方式上，本书对各方法都增加了最新推广的应用内容；

(4) 尽可能采用工程处理实用方法，例如瞬态响应，大多数书上用的是 Laplace 变换和卷积，本书用的是工程近似处理方法；

(5) 第十一章介绍阻抗与导纳，除专著外，一般书籍都不专设这一章。这个内容为最近发展起来的振动分支——模态分析打下基础。

原打算在每章后附有习题，并在最后加一个计算程序附录，但考虑到目前公开出版的习题集及程序已有多种，同时为了节省篇幅，所以没有这样做。不过，这并不意味着不需要习题；相反，习题是学习振动的一个相当重要的环节。教师必须结合课程布置大量作业，对较复杂的习题，学生到三四年级已具备编程能力，应该能完成任务(必要时，可加以适当辅导)。

作为教材，前六章适合大学本科生少学时(约40学时)教程，后五章可作为高年级或研究生多学时(另加约30～40学时)教程使用。

当然，本书也可作为工程技术人员自学或参考之用。

方之楚博士对本书例题的校核及全书文稿的杀青做了许多工作，还绘制了全部图稿；镇江船舶学院叶祖荫教授担任了本书的主审工作，特此致谢。

骆　振　黄

1988年12月于上海交通大学

目　　录

第一章　绪　　论……1

§1-1　概述……1
§1-2　简谐运动(简写为SHM)……2
§1-3　简谐矢量的加减法……3
§1-4　矢量的复数表示法……5
§1-5　振动元件的组成……6
§1-6　实物简化为力学模型……7

第二章　单自由度系统无阻尼自由振动……9

§2-1　运动方程的建立……9
§2-2　等效刚度计算……13
§2-3　单自由度系统自由振动方程的求解……16
§2-4　能量法……18

第三章　单自由度系统有阻尼自由振动……24

§3-1　带粘滞阻尼的自由振动……24
§3-2　粘性阻尼的测量和对数衰减……31
§3-3　带摩擦(库仑)阻尼的自由振动……35
§3-4　同时带粘性阻尼和摩擦阻尼的自由振动……37

第四章　单自由度系统的受迫振动……41

§4-1　带粘性阻尼和谐激励的振动……41
§4-2　无阻尼系统的受迫振动……45
§4-3　带滞后阻尼和谐激励的振动……47
§4-4　粘弹性阻尼、滞后阻尼和复刚度……53
§4-5　带摩擦阻尼和谐激励的振动……55
§4-6　共振和Q因子……58
§4-7　旋转失衡……62
§4-8　振动隔离和传递率……64
§4-9　双频率运行……68
§4-10　增益和分贝……70
§4-11　具有非谐激励力的振动……72

第五章　单自由度系统的瞬态振动……75

§5-1　基本力函数……75

§ 5-2 力函数的组合 ……………………………………………………………81
§ 5-3 Duhamel 积分和卷积……………………………………………………89

第六章 两自由度系统的振动……………………………………………………94

§ 6-1 引言 ……………………………………………………………………94
§ 6-2 无阻尼自由振动 ………………………………………………………95
§ 6-3 耦合与主坐标 …………………………………………………………97
§ 6-4 有阻尼自由振动 ……………………………………………………… 101
§ 6-5 受迫振动——动力吸振器 …………………………………………… 104

第七章 多自由度系统的振动…………………………………………………… 111

§ 7-1 引言 …………………………………………………………………… 111
§ 7-2 无阻尼自由振动 ……………………………………………………… 112
§ 7-3 有阻尼自由振动…… ………………………………………………… 123
§ 7-4 受迫振动 ……………………………………………………………… 131

第八章 多自由度系统固有特性的近似估算…………………………………… 136

§ 8-1 等效系统法 …………………………………………………………… 136
§ 8-2 Rayleigh 原理………………………………………………………… 138
§ 8-3 静挠度法——Rayleigh 法的特例…………………………………… 142
§ 8-4 Rayleigh 原理的推广………………………………………………… 148
§ 8-5 Ritz 法………………… ……………………………………………… 156
§ 8-6 改进的 Rayleigh-Ritz 法(R-R 法)…………………………………… 162
§ 8-7 振幅近似估算 ………………………………………………………… 165

第九章 集中参数系统(离散系统)……………………………………………… 169

§ 9-1 离散与连续 …………………………………………………………… 169
§ 9-2 矩阵迭代法 …………………………………………………………… 174
§ 9-3 Holzer 法 ……………………………………………………………… 180
§ 9-4 传递矩阵法 …………………………………………………………… 189

第十章 分布质量系统(连续系统)……………………………………………… 206

§ 10-1 等截面圆轴的扭转振动……………………………………………… 206
§ 10-2 等截面直杆的纵向振动……………………………………………… 209
§ 10-3 直梁的弯曲振动……………………………………………………… 211
§ 10-4 连续梁的振动………………………………………………………… 223
§ 10-5 传递矩阵……………………………………………………………… 228

第十一章 振动分析的阻抗-导纳法 …………………………………………… 235

§ 11-1　阻抗或导纳的基本概念…………………………………………………………235
§ 11-2　机械网络…………………………………………………………………………244
§ 11-3　阻抗匹配和部件导纳法………………………………………………………248
§ 11-4　应用实例…………………………………………………………………………255
§ 11-5　模态辨识…………………………………………………………………………259

第一章　绪　　论

§1-1　概　　述

对于振动，我们在日常生活中都有一定的感性认识。例如，我们上船走过跳板时可以感觉到跳板的振动，走进机舱，把手放在机器上，也可感觉到机器在振动。

从数理力学的角度来看，振动可定义为：围绕某一固定位置来回摆动并随时间变化的运动。

图 1-1 就是这种运动的一个例子。如果这种运动随时间呈现周期性变化，便称为周期振动。从这样的力学模型出发，心脏的跳动、肺部的呼吸、海潮的涨落、柴油机排气管的噪声等都可属于振动学研究的范畴。但本课程只研究、讨论机械振动问题，虽然它的分析原理可以推广到热力学、电力工程或医学工程等方面。

任何振动工程问题都可用图 1-2 来概括地说明。

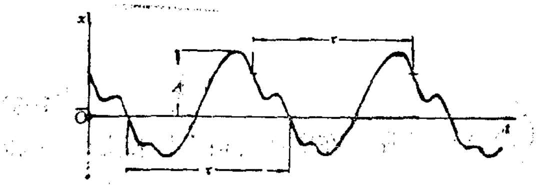

图 1-1

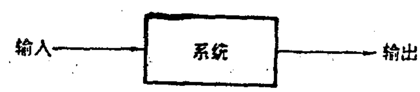

图 1-2

这里的输入即作用在系统上的激励或干扰，输出也称响应。机械工程上，激励大多为力；常用的响应物理量为位移、速度和加速度。

要引起振动，必须有干扰。例如，我们在船舶机舱中感到的振动是由于机器转动产生的干扰力引起的。这种有输入的振动称为强制振动或受迫振动。上面我们提到上船走过跳板会感到振动，这种振动也属于受迫振动之列。但当人走过后，跳板仍在振动，这种现象在跳板较薄时更为显著。这种在外界干扰力撤去后依然存在的振动称为自由振动或固有振动。从理论上讲，若无阻力，跳板会永远振动下去。事实上，总是存在着阻力，在很短时间内，振动便感觉不到了，这就是自由衰减振动。

为了研究振动，下面介绍一些最基本的术语：

振幅（A）

距离稳定平衡位置的最大响应称为振幅 A，如图 1-1 所示。在测量时，平衡位置的坐标不易确定，有时也用响应相邻上、下两峰间的量值作为振幅，称为峰-峰值（p-p）。当上、下峰对称时，峰-峰值是一般振幅的两倍（$2A$）。

周期（τ）

周期振动中一个循环所需要的时间称为周期 τ，如图 1-1 所示。

频率（f）

单位时间内振动循环次数称为频率 f，因此频率与周期是倒数关系，即

$$f = \frac{1}{\tau}。 \tag{1-1}$$

频率的单位是次/秒，也称赫芝，写作 Hz。

自由度

确定振动物体系统运动所需要的最少位置坐标数称为自由度。自由度也可表示如下：

自由度 = (运动方程数) − (约束方程数)。

例如，一个刚体共有六个自由度——三个平动，三个转动。如果我们只允许它在一个方向运动，其他都约束住，就成为单自由度了。

还有一些术语，我们以后用到时再介绍。

§1-2 简谐运动(简写为 SHM)

简谐运动是一种最简单的周期运动，它以正弦或余弦函数表示。我们知道简谐运动是使用 Fourier 技术从事复杂运动分析的基础。简谐运动的数学表达式为

$$x = A\cos\omega t。 \tag{1-2}$$

式中：A 为振幅；ω 为圆频率或角速度 (rad/s)。

式 (1-2) 的图形表示为图 1-3。

简谐运动也可写成

$$x = A\sin\omega t。 \tag{1-3}$$

这是因为正弦与余弦只相差一个 90° 相位角。若图 1-3 中的原点在虚线与横坐标相交处，就得到式 (1-3) 的图形表示。

上面两个式子中都有一个称为圆频率或角速度的 ω，现在我们来看一下它的物理意义。

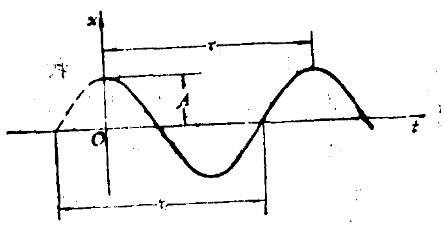

图 1-3

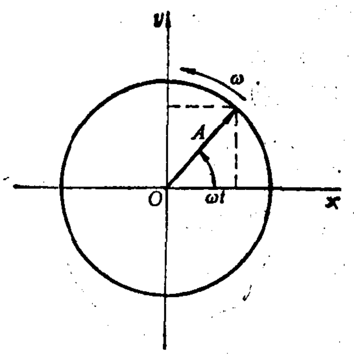

图 1-4

图 1-4 表示一个半径为 A 的圆，圆周上的点以角速度 ω 运动着，因此任何一点的坐标为 $(A\cos\omega t,\ A\sin\omega t)$，也就是说这坐标正好是式 (1-2) 和 (1-3) 的表达式。我们知道圆周运动一个循环(转一周)是 360°，或 2π 弧度，从图 1-3 可看出，当完成一个循环时，$t=\tau$。把上面这两句话写成数学式：

$$\omega\tau = 2\pi \quad 或 \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}。 \tag{1-4}$$

式中，τ 为周期 (s)。

从式（1-1）可得频率为

$$f=\frac{\omega}{2\pi}。\tag{1-5}$$

式（1-5）也可写成

$$\omega=2\pi f。\tag{1-6}$$

由于 f 是频率，从式（1-6）不难看出为什么 ω 又称为圆频率。

若用图 1-4 中的旋转矢量表示简谐运动的位移，从式（1-2）可得到速度

$$\dot{x}=-A\omega\sin\omega t=A\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\tag{1-7}$$

这就是说最大速度或速度振幅是 $A\omega$。比较式（1-2）与（1-7），显示速度矢量与位移矢量相差一个相位角 $\pi/2$。我们说速度矢量领先位移矢量 $\pi/2$ 相位，或位移滞后速度 $\pi/2$ 相位。

从式（1-7）又可得到加速度矢量

$$\ddot{x}=-A\omega^2\cos\omega t=A\omega^2\cos(\omega t+\pi),\tag{1-8}$$

即加速度矢量与位移矢量相差相位角 π。我们说加速度领先位移 π 相位，或位移滞后加速度 π 相位。

这三者的关系可用图 1-5 表示。由于 $(A\omega)^2=A(A\omega^2)$，故从几何学来说，速度振幅是位移振幅与加速度振幅的比例中项，也就是说这三者构成几何级数的关系。

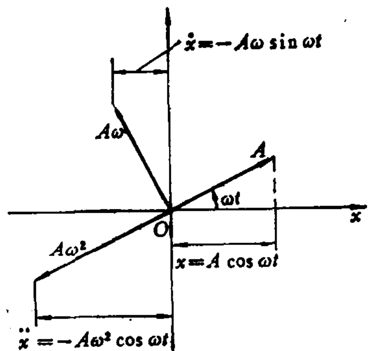

图 1-5

由式(1-2)和(1-8)可得到

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\tag{1-9}$$

式（1-9）称为简谐运动方程。

§1-3 简谐矢量的加减法

简谐矢量要进行加减必须满足两个条件：

（1）必须有相同量纲。这是不难理解的，因为力、位移、速度等不同量纲的量是不能加减的。

（2）相对位置必须固定。例如，$A\cos\omega_1t$ 和 $B\cos\omega_2t$ 可用两个矢量表示，但由于它们的角速度（即频率）不等，它们彼此间的相对位置随时间变化，因此两者加减就没有什么意义。

在 $A\cos\omega t$ 和 $B\sin\omega t$ 中，如果 A 和 B 代表同一类物理量振幅，例如位移振幅，那么两者之间就有固定相对位置，便满足以上两个条件，能进行加减了。根据图 1-4 的表示方法，相应的两个矢量彼此垂直。

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right),$$

令

$$x_0=\sqrt{A^2+B^2}\quad,\quad\phi=\tan^{-1}\frac{B}{A}\quad\left(\sin\phi=\frac{B}{x_0}\quad,\quad\cos\phi=\frac{A}{x_0}\right),$$

上式便成为

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t=x_0\cos(\omega t-\phi),\tag{1-10}$$

其中 ϕ 称为相位角。

可以看出两个具有相同频率的简谐运动相加，其结果仍是简谐运动，但振幅 x_0 滞后 A 一个相位角。式 (1-10) 可用图 1-6 表示。

两个简谐矢量相减，如 $A\cos\omega t - B\sin\omega t$，只要将图 1-6 中的 B 矢量向相反方向延伸，然后相加即可。这里不再重复，读者可自行试作。

简谐量 $A\sin\omega t$ 和 $B\sin 2\omega t$ 按照上面所讲的不符合第二点条件，故不能相加。但是，在某一特定时刻 t，两者相对位置是固定的，便能进行加减。例如，图 1-7 是各个 t 值时相加的联接曲线。可看出，这时候结果再也不是简谐运动了。

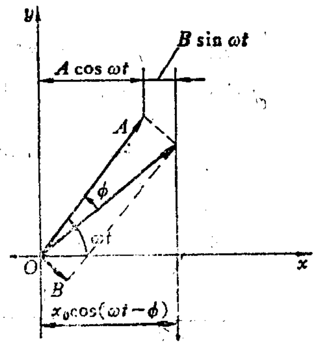

图 1-6

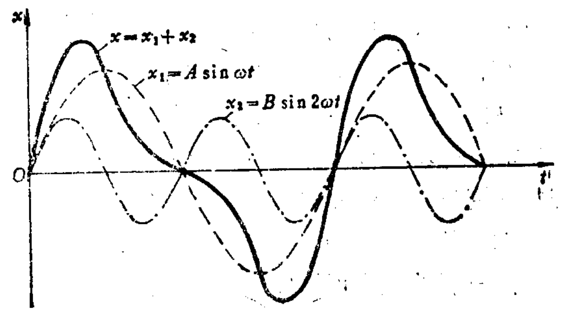

图 1-7

下面我们来看一个特例。两个简谐量 $x_1 = x_0\cos\omega_1 t$ 和 $x_2 = x_0\cos\omega_2 t$ 在同一时刻下相加，若 ω_1 和 ω_2 相差很小，那末

$$x = x_1 + x_2 = x_0\cos\omega_1 t + x_0\cos\omega_2 t = 2x_0\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}$$

或

$$x = 2x_0\cos\frac{\delta\omega}{2}t\cos\frac{\omega}{2}t, \tag{1-11}$$

式中：

$$\delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \qquad \omega = \omega_1 + \omega_2。$$

最后结果可以认为是一根余弦曲线，其圆频率为 $\omega/2(\approx\omega_1)$，其可变振幅为 $[2x_0\cos(\delta\omega/2)t]$。图 1-8 表示这个结果的图形。这种振动称为拍振。每当曲线振幅达到极大值，可以说完成一拍。拍频 f_b 为

$$f_b = \frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi} = \frac{\delta\omega}{2\pi}。 \tag{1-12}$$

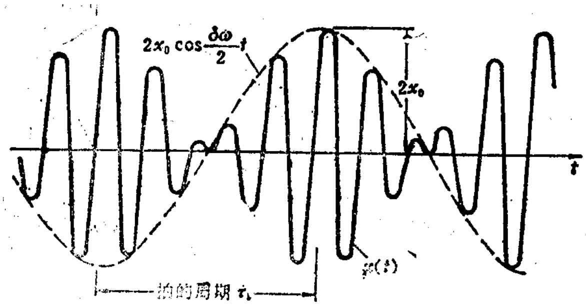

图 1-8

根据前面周期的定义，一拍的周期 τ_b 为

$$\tau_b=\frac{2\pi}{\delta\omega}。\tag{1-13}$$

更一般的情况为 x_1 和 x_2 的振幅不相等，留给读者作为练习。

拍振现象在工程中可能碰到。例如，双桨推进的船舶，若两个螺旋桨的转速略有不同，便可能产生拍振。

§1-4 矢量的复数表示法

按照复数 z 在复平面内的表达法，图 1-9 中的矢量 A 可表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=A\exp(\mathrm{i}\theta)=A\underline{/\theta}$$

或

$$z=A(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)。\tag{1-14}$$

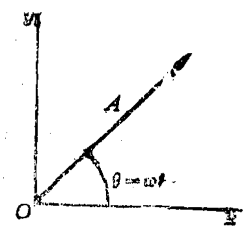

图 1-9

上述各种表达方式都是等价的，可以彼此换算，它们见于数学和电工学的著作中。上式还可表达为

$$A\cos\theta=\mathrm{Re}\,(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),\qquad A\sin\theta=\mathrm{Im}\,(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),\tag{1-15}$$

式中 Re 和 Im 分别表示复数的实部和虚部。

1. 复数矢量的加减法

复数矢量一般都要转化为 $x+\mathrm{i}\,y$ 形式再进行加减。

［例 1-1］

$$z_1=12\underline{/27^\circ}\ ,\qquad z_2=10\underline{/124^\circ}\ 。$$

则

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=12(\cos 27^\circ+\mathrm{i}\sin 27^\circ)+10(\cos 124^\circ+\mathrm{i}\sin 124^\circ)\\&=(10.69+\mathrm{i}\,5.45)+(-5.59+\mathrm{i}\,8.29)\\&=5.10+\mathrm{i}\,13.74=14.65\underline{/69.6^\circ}\ 。\end{aligned}$$

2. 复数的乘除法

复数的乘除以相位角的表达式较为方便。例如，

$$z_1=A\underline{/\theta_1}\ ,\qquad z_2=B\underline{/\theta_2}\ ,$$

则

$$z_1z_2=AB\underline{/(\theta_1+\theta_2)}\ ,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{A}{B}\underline{/(\theta_1-\theta_2)}。$$

［例 1-2］

$$z_1=8-\mathrm{i}\,10\ ,\qquad z_2=6+\mathrm{i}\,4。$$

这里可用一般的复数乘除方法

$$z_1\cdot z_2=(8-\mathrm{i}\,10)(6+\mathrm{i}\,4)=88-\mathrm{i}\,28=92.3\underline{/-17.6^\circ}\ ,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{8-\mathrm{i}\,10}{6+\mathrm{i}\,4}=0.154-\mathrm{i}\,1.77=1.78\underline{/-85^\circ}\ 。$$

但若先将复数化为相位角形式，运算可更方便些。

$$z_1 = 8 - \mathrm{i}\,10 = 12.8\underline{/-51.3^\circ}\ ,\quad z_2 = 6 + \mathrm{i}\,4 = 7.21\underline{/33.7^\circ}\ ,$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = 12.8 \times 7.21\underline{/(-51.3^\circ + 33.7^\circ)} = 92.3\underline{/-17.6^\circ}\ ,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12.8}{7.21}\underline{/(-51.3^\circ - 33.7^\circ} = 1.78\underline{/-85^\circ}。$$

两者结果一致。

§1-5　振动元件的组成

求解任何工程问题必须有一个力学模型，模型中包括若干元件。振动问题也不例外，其力学模型一般包括以下三种元件：

1. 质量元件

质量元件通常假定为一非弹性固态物体或一种不可压缩的无粘性流体。质量仅作为物体惯性的量度。按照物体的速度变化规律，质量元件可得到或失去动能。它关联力和加速度。

2. 弹性元件

弹簧或弹性元件通常想象为无质量或无惯性的，它关联力和位移或变形。它反抗变形或位移产生弹性力，该力在变形或位移上所作的功以势能的形式贮存在元件中。一旦它恢复到原来形状或位置时，所贮存的弹性势能又以机械功释放。

弹性元件可取任意弹性物体的形式。通常的例子有弯曲梁、圆圈弹簧、扭转轴、橡胶垫和气垫。引力作用或液体施加于物体的浮力也可等价于一个弹性元件。

3. 阻尼器

任何耗散振动系统能量的元件均可视为阻尼器。通常假定它没有质量。常见的阻尼器有摩擦型、粘滞型、滞后型等。最简单和常用的是粘滞阻尼器，它产生的阻尼力与阻尼器两端的相对速度成正比。

所有振动系统都可以用以上三类元件表示。例如人体可以用这三种元件表示为图 1-10。

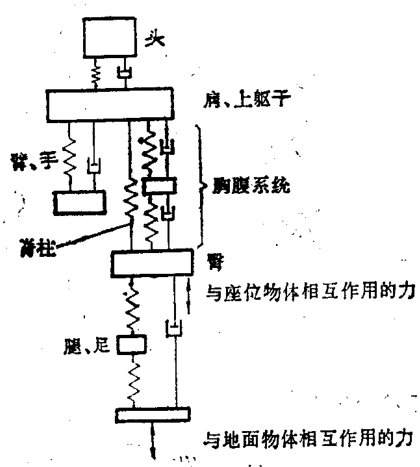

图 1-10

§1-6 实物简化为力学模型

实际工程中的振动问题十分复杂。单摆运动很容易理解，但飞行器的颤振或在高低不平道路上行驶着的汽车的振动问题就需要十分复杂的分析方法才能求解。从工程的观点来看，对实际系统作一恰当的简化总是必需的。经过简化所得到的力学模型，用我们掌握的数学工具进行性态分析后，能够大致描绘实际系统的主要特征。因而，振动理论用相当大篇幅讨论简化系统的振动性态分析。这并不因为简化系统在实际生活中出现，而是因为它们能在不同程度上或从各个不同侧面代表实际系统。工程系统的“模型化”问题在振动研究中占有十分重要的地位。能否将实际工程系统正确、合理地简化为力学模型，是反映工科学生力学知识的综合运用能力以及丰富的想象力、敏锐的观察力等创造性思维能力高低的重要标志，是理论联系实践的关键。

例如，实际船舶的螺旋桨转轴系统常被简化为一个带有一桨叶盘的悬臂梁的分布参数(即连续)系统，见图 1-11(a)。这个系统有无穷多个自由度，需求解偏微分方程；为简化问题起见，悬臂梁可简化为有限个质点，由无质量的轴段相联结，此时系统为离散(或集中)参数系统，自由度减少为有限个，见图 1-11 (b)，需求解常微分方程组；最粗糙的情况是将系统简化为无质量的悬臂梁带一个质量点的单自由度系统，见图 1-11 (c)，只需求解一个常微分方程。

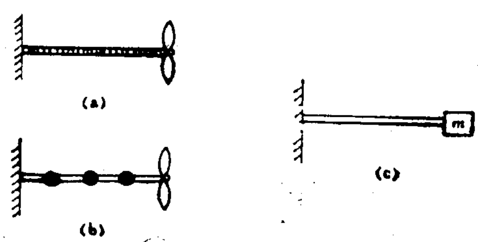

图 1-11

由此可见，同一系统的不同模型，其数学求解的难易程度不同。如何将复杂结构简化为简单的力学模型，计算工作量最少，而结果又与实际情况相当接近，这需要经验的长期积累。

对于特殊结构，无资料可借鉴时，往往采用图 1-12 所示的步骤工作以解决问题。以后遇到类似结构，便有所凭借了。

根据上述讨论，我们对建立力学模型归纳如下：

(1) 正确判断

一定要正确判断结构的主要因素和次要因素，这样方能忽略次要因素，使模型简单化。

例如，图 1-11 中的推进轴系，若较长，一般总有几个联接法兰。这些法兰与轴的质量相比是较小的，故为了简化模型，这些法兰往往是忽略的。

(2) 工程知识

对结构物，设计者一定要了如指掌，方能使模型与实际符合。还是以图 1-11 的推进轴系为例。我们知道螺旋桨转动时，桨叶带动水一起旋转，因此模型中的盘质量应是螺旋桨质量加上附水质量。要是没有这方面的工程知识，附水质量就不会考虑，模型与实际情况就有差别。

(3) 理想化

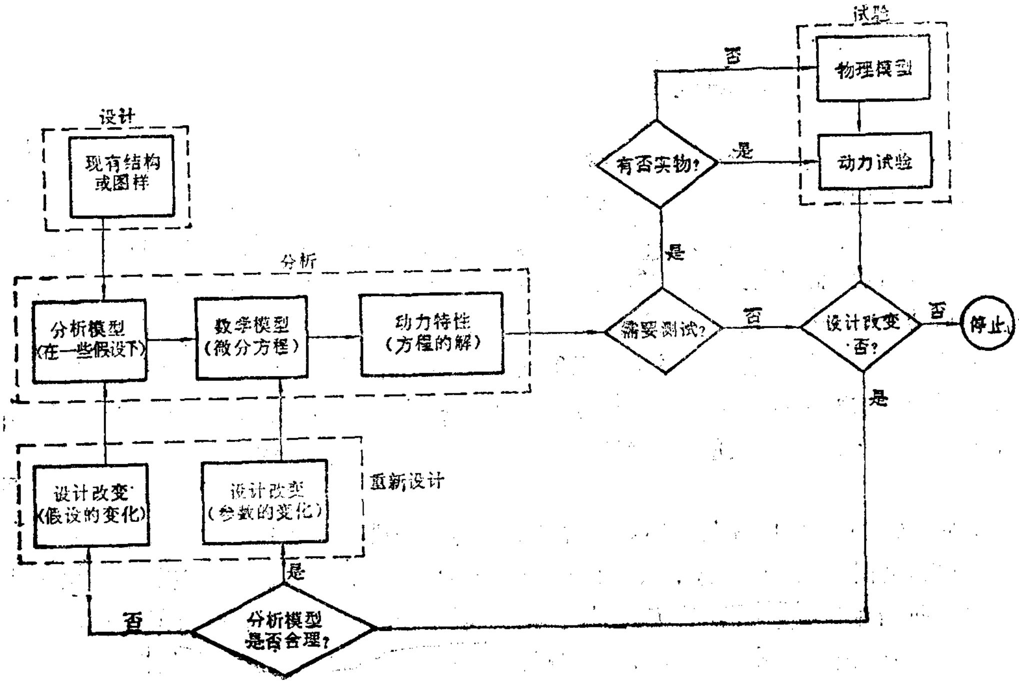

图 1-12

为了数学上处理方便起见，模型或多或少具有理想化情况。图 1-11 中轴的左边固定端通常是推力轴承处，我们知道推力轴承实际上并不是绝对固定的，因此这个模型理想化了。

(4) 折衷

任何模型与实际都有一定程度的矛盾，都要采用一些折衷处理。如图 1-11 中为了简化数学运算，不采用连续系统(a)，而采用离散系统。那末要选择多少个质量(或自由度)呢？这就产生了计算机容量与计算精度的折衷问题。

上面仅以简单结构为例，对于复杂结构，以上几点就更为突出了。实际问题中，上述四点互相关联，应同时予以考虑。

第二章 单自由度系统无阻尼自由振动

§2-1 运动方程的建立

通常把所研究的对象(结构或机器)称为系统。系统运动时，其中各质点的位置坐标是时间的函数。若只需要一个坐标即可确定系统的位置和状态,则按第一章关于自由度的定义,该系统称为单自由度系统。下面我们来看几个例子。

[例 2-1] 弹簧质量系统。

这是最简单的单自由度系统。图 2-1 中，我们考察弹簧质量系统沿铅垂方向的自由振动。弹簧刚度为 k,其质量忽略不计,x_1 方向以向下为正,由牛顿第二定律,系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_1+k(x_1-l)=mg。\qquad(2\text{-}1)$$

若设偏离静平衡位置的位移为 x，则因 $x_1=x+l+mg/k$,故式 (2-1) 变为

$$m\ddot{x}+kx=0。\qquad(2\text{-}2)$$

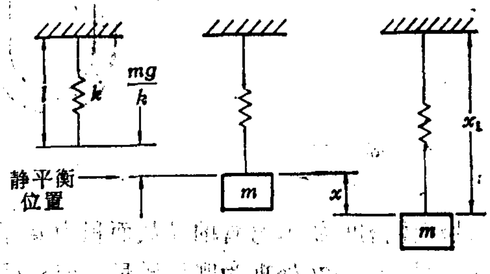

图 2-1

因此,当重力一类的不变力作用时,我们只考虑偏离系统静平衡位置的位移，运动方程中不会出现重力这类常力,方程形式简洁。我们约定,以后若无特别指明，一律以系统静(或稳定)平衡位置作为运动(或广义)坐标的原点。

[例 2-2] 单摆的振动。

如图 2-2 所示，相对于固定点 O，建立系统的转动运动方程。仅有两力矩作用在质点 m 上：

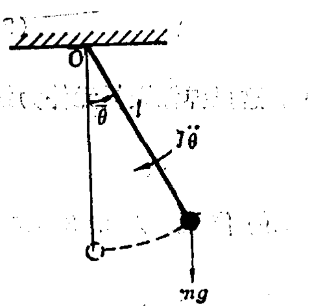

图 2-2

惯性力矩：$J\ddot{\theta}$；

恢复力矩：$mgl\sin\theta$。

由 D'Alembert 原理得

$$J\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0,\qquad(2\text{-}3)$$

当 $\theta<6°$时,$\sin\theta\approx\theta$(弧度),且单质点转动惯量 $J=ml^2$,故 θ 为小角度时有

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0。\qquad(2\text{-}4)$$

[例 2-3] 扭摆的振动。

如图 2-3 所示,相对于固定轴 x,建立系统的转动运动方程。仅有两力矩作用在圆盘上：

惯性力矩：$J\ddot{\theta}$。

恢复力矩： $\frac{GI_p}{l}\theta$。

由 D′Alembert 原理得

$$J\ddot{\theta}+\frac{GI_p}{l}\theta=0,$$

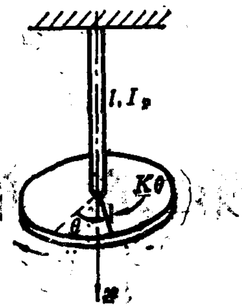

图 2-3

其中，$\frac{GI_p}{l}$为轴的扭转刚度k_t，故

$$\ddot{\theta}+\frac{k_t}{J}\theta=0。\tag{2-5}$$

［例 2-4］ 弯管中液柱的振动(见图2-4)。

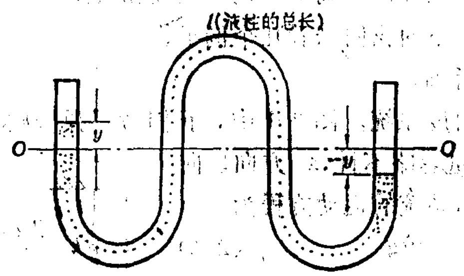

图 2-4

设液体密度为ρ，弯管的横截面积为a，管中液柱全长为l。假定液柱弯曲曲率略去不计，液体质量$m=\rho al$处理为刚体质量。液柱受有两力均垂直向下：

惯性力：$m\ddot{y}$。

恢复力：$2\rho gay$。

由 D′Alembert 原理有

$$\rho al\ddot{y}+2\rho gay=0$$

或

$$\ddot{y}+\frac{2g}{l}y=0。\tag{2-6}$$

本系统与摆长为$l/2$的单摆等效。可看到，方程与液体密度无关。这里弹性恢复元件为线性的，但质量元件由于曲率效应仅是近似线性的。

［例 2-5］ 带重物m的梁的横向振动。

梁的质量与m相比可略去。弹簧常数k取决于质量m在梁上的位置。对图 2-5(a) 所示的简支梁，由材料力学得

$$\Delta=\frac{mg}{3EI}\cdot\frac{l_1^2l_2^2}{l},$$

从而

$$k=\frac{mg}{\Delta}=\frac{3EIl}{l_1^2l_2^2},$$