岩波講座　基礎工学 1

線形分布定数系論 I

高橋秀俊 著

岩波書店

岩波講座 基礎工学 7

線形分布定数系論

I

高 橋 秀 俊

岩 波 書 店

岩波講座　基礎工学　7 線形分布定数系論 I　　(全19巻／第2回配本)

1968年1月16日　第1刷発行 ©
東京都千代田区神田一ツ橋2-3　株式会社 岩波書店／精興社印刷・松岳社製本

はじめに

この講義で扱うのは，連続体(continuum)の問題である．連続体の典型的なものは弾性体である．**弾性体**，つまり固体の力学は，ある外的条件のもとに，固体の各部分がどのように変形するか，あるいはどのように変位するか，つまり本来の位置からずれるか，をきめることを目的とする．固体の各部分という場合に，固体は3次元のひろがりをもつので，三つの変数の組 (a,b,c) を与えることによってそれがきめられる．ここで a,b,c としてどういうパラメーターをとってもよいが，とにかく，この三つの組 (a,b,c) で与えられるものは，固体の実質部分，もし固体が究極的に原子から構成されていることを認めるなら，ある定まった原子である．実際には (a,b,c) として，その固体が何も力を受けない自由な状態でとる位置(空間座標) (x_0,y_0,z_0) をとるのが便利である．

すると，(x_0,y_0,z_0) で与えられる点の変位，つまりその点の実際の空間座標を x,y,z とすると，

$$u=x-x_0,\quad v=y-y_0,\quad w=z-z_0$$

が (x_0,y_0,z_0,t) の関数として与えられれば問題はとけたものと見なされる．そうして，これらの関数 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ をきめる方程式が弾性方程式である．もし $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が比較的ゆっくり変わる関数(つまり，$\dfrac{\partial u}{\partial x_0}, \dfrac{\partial v}{\partial y_0}, \cdots \ll 1$) であるなら，方程式は近似的に線形になることがわかる．すなわち多数の独立変数をもつ関数自体を未知量として解くいわゆる変分法，関数方程式の問題で，しかもそれらは線形の偏微分方程式に書くことができる．そうして本講では，そのような線形方程式であらわされるような物理系を取り扱う．

同じような連続体の問題は，**電磁場**の問題としてもあらわれる．この場合は弾性体のような実在する“連続体”は存在しないが，空間の各点 (x,y,z) に対して場の量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の組，あるいはスカラー・ポテンシャル V とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の組が変数(未知数)となる．この場合これらの量をきめる方程式は電磁場のマックスウェル方程式である．そうしてマックスウェル方程式は

場の量に対して線形の方程式である(特殊の誘電体が含まれたときは除く).

同様に**熱伝導**の問題は各点の温度が未知量となった連続体の問題であり，**拡散**の問題は各点での物質の濃度が未知量となった連続体の問題である．流体の力学も弾性体と同様，連続体の問題であるが，通常の流体力学(流体の流れ学)では変位が大きくなるので，線形の方程式では(近似的にすら)あらわされない．しかし変位の小さい場合，たとえば圧縮性流体中の波(**音波**)の問題は線形方程式で十分よい近似であらわされるので，本講の対象になる．また変位が大きい場合のうちで，特殊な場合，つまり非圧縮性流体の渦なしの流れの問題，粘性の高い流体の流れ(いわゆる低レイノルズ数の流れ)は，ある表現法によると線形の方程式であらわされる．

以上はすべて3次元連続体の場合であるが，たとえば膜状の弾性体の力学を扱うならば2次元の連続体の問題になる．また1本の針金の振動を扱うときには1次元連続体の問題に帰着する．導線を伝わる電気的な波なども1次元の連続体の問題である．

このような連続体の問題では物理的変化をになう媒質が空間的に連続に分布しているので，これを(電気工学の方の術語で)**分布定数系**と呼んでいる．本講で扱うのは線形の方程式であらわされる分布定数系である．そのような系は上述のように物理学，工学のいろいろな方面にあらわれるが，それらは線形分布定数系という点で共通性があるので，それらをできるだけ一つの立場から統一して扱おうというのが本講の主眼であるわけである．

このような問題はルジャンドル関数，ベッセル関数等のいわゆる特殊関数の応用が主体をなし，応用偏微分方程式論等の名で応用数学の一つの主流をなしてきたものである．本講でも当然これらの特殊関数の取扱いがかなりの重点となるわけであるが，筆者のねらいとしては，それらの数学的な解析に深入りすることなく，できる限り物理的な意味を表に出して，多くの重要な定理，公式の間の関係を明らかにするようにしたい．

なお，本講の前稿を校閲され，いろいろと貴重な御意見をたまわった多くの方々に対して謝意を表したい．

目　　次

はじめに

第1章　1次元分布定数系

1.1　鎖の力学とその極限 …… 1
1.2　波動方程式 …… 6
1.3　二つの媒質の境界 …… 13
1.4　共　振 …… 24
1.5　損失のある分布定数系 …… 28
1.6　強制振動とグリーン関数 …… 31
1.7　不均一な系の中の波(WKB法) …… 37
1.8　熱伝導 …… 38
1.9　4階微分方程式であらわされる系，棒の曲げ …… 40
1.10　棒の横波と曲げ振動 …… 43
1.11　相反定理の一般的証明☆ …… 47

第2章　2次元分布定数系

2.1　網の静力学と動力学 …… 53
2.2　2次元ポテンシャル …… 67
2.3　等角写像による2次元ポテンシャルの解法 …… 71
2.4　ポアソンの方程式とグリーン関数 …… 93

線形分布定数系論 II 目次

第3章　3次元のポテンシャル

第4章　2次元，3次元の波動(前半)

線形分布定数系論 III 目次

第4章　2次元，3次元の波動(後半)

第5章　4階微分方程式であらわされる場

線形分布定数系論 IV 目次

第6章　波動の一般的性質

第7章　過 渡 現 象

表紙カット製作：渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第1章

1次元分布定数系

1次元分布定数系は最も簡単な分布定数系である．具体的には糸の横方向の振動や波，糸の縦方向の振動や波など，線状の物体におこる現象がこれに属する．電線を伝わる電流の波も同様である．また，3次元空間の中でも，y, z 方向にはすべての点で一様に変化するような波(平面波)については1次元分布定数系による取扱いが可能である．その意味で，1次元分布定数系は一般の分布定数系を取り扱う基本になる．

1.1　鎖の力学とその極限

まず，具体的な例として弾性的な棒または針金の縦方向の振動の問題を考えよう．ここで針金の属性として各部分がもつ(慣性)質量と，のびに対する弾性とがある．即ち，針金の各部が縦方向に変位すると，そこには両側からの弾性的な復元力がはたらき，また加速度に比例した慣性力がこれと釣り合う．しかし，針金という連続体はやや考えにくい点があるから，そのかわりに離ればなれ(離散的)な質点が重さのないばねでつなげられたようなもの(鎖)を考えることにする．針金はこの鎖が細かくなった(質点の間隔が小さくなった)極限と考えることができる．

そこで各質点に番号0, 1, 2, … をつけて，i 番の質点の変位を u_i とする(図1.1)．すると，これに働く力はその両側のばねの力で，それはそれらのばねの両側の質点の変位の差(相対変位)に比例するから，これを力として運動の方程式

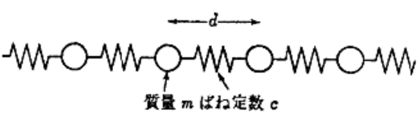

図1.1　1次元の離散的モデル

をつくると

$$m\ddot{u}_i = c(u_{i-1} - u_i) + c(u_{i+1} - u_i). \tag{1.1}$$

これがすべての i について成立し，これが u_i の時間的変化をきめる運動方程式である．これは u_i に対して時間の関数としての微分方程式であるが，また u_i という数列に対する差分方程式(difference equation)でもある．

まずこの方程式で

$$u_i = u_{i0}e^{j\omega t} \tag{1.2}$$

と置いて†，つまり時間的に周期的(正弦波的)な解を求めることにする．即ちこう置くと

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 u_i. \tag{1.3}$$

だから

$$-m\omega^2 u_i = c(u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i) \tag{1.4}$$

という線形差分方程式ができる．これを解くにはさらに

$$u_i = u_0 z^i \tag{1.5}$$

と置いて

$$-m\omega^2 u_i = c\left(z + \frac{1}{z} - 2\right)u_i \tag{1.6}$$

によって z をきめる．こうしてきめた z (2次方程式の根)と ω とは

$$\omega^2 = -\frac{c}{m}\left(z + \frac{1}{z} - 2\right) = -\frac{c}{m}\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \tag{1.7}$$

の関係がある．これを解くと，ω が小さくて $1 - \frac{m}{4c}\omega^2 > 0$ のときは

$$\sqrt{z} = \sqrt{1 - \frac{m}{4c}\omega^2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}\omega \tag{1.8}$$

で，$\sqrt{z}$ は絶対値が1に等しい複素数，つまり $e^{j\beta/2}$ という形の数になる．すなわち

$$u_r = u_0 \exp(\pm j\beta r) \cdot \exp(j\omega t). \tag{1.9}$$

ここで，ω が小さくて $\frac{m}{4c}\omega^2 \ll 1$ のときは

† 本講では，電気工学の習慣にしたがい，虚数単位を i ではなくて j で示す．

$$\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}\omega. \tag{1.10}$$

つまり

$$u_r = u_0\exp\left(\pm\sqrt{\frac{m}{c}}\omega jr\right)\cdot\exp(j\omega t)$$

$$= u_0\exp\left\{j\omega\left(t\pm\sqrt{\frac{m}{c}}r\right)\right\}. \tag{1.11}$$

これは次々とおこる質点の運動が $\sqrt{m/c}\,\omega$ だけの位相の遅れをもって，波のような形になって i の減る方または増す方の方向へ伝わって行くことを示している．そうして $\sqrt{m/c}$ は波が隣の質点まで伝わる時間である．

一方 $\dfrac{m}{4c}\omega^2$ が 1 より大きいときは，z は負の実数となり，振動の伝播は波の形をとらなくなるが，ここでは連続的な弾性的な針金の近似として鎖を考えているのであって，その場合質点の間隔が小さくなる(したがって m は減り c は増すことになる)と，そのような条件はおこりにくくなるから，ω, β は共に小さい場合だけを考えることにする．そのときは(1.11)でわかるように，波の伝わる時間，つまり波の速度は一定になるのである．

質点の間隔を d とすると，波の速度は

$$v=\sqrt{\frac{c}{m}}d. \tag{1.12}$$

また，単位長さ当りの質量 $m^*=m/d$，単位長さ当りのばねの強さ $c^*=cd$ を使うと

$$v=\sqrt{\frac{c}{m}}d=\sqrt{\frac{d}{m}\cdot cd}=\sqrt{\frac{c^*}{m^*}}. \tag{1.13}$$

結局，$d\to 0$ という極限を考えるならば，方程式(1.1)自身を極限にもっていってもよい．それには，差分を $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ のように書くことを約束すると，

$$(u_{i-1}-u_i)+(u_{i+1}-u_i)=-\Delta u_{i-1}+\Delta u_i=\Delta^2 u_{i-1} \tag{1.14}$$

であるから(u_{i-1} と u_i とのちがいを無視すれば)

$$m\ddot{u}=c\Delta^2 u \quad \text{または} \quad m^*\ddot{u}=\frac{c^*\Delta^2 u}{d^2}. \tag{1.15}$$

ここで Δ^2 を ∂^2 と書き，また d^2 を ∂x^2 と書くと

$$m^*\ddot{u} = c^*\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.16}$$

という微分方程式になる．これが質点をばねでつないだ鎖の極限，つまり連続的な針金の縦振動の方程式である．

ここで，m^* は単位長さの質量で，したがって，針金の材料の密度を ρ，断面積を S とすれば，

$$m^* = S\rho. \tag{1.17}$$

また，c^* は針金の単位長さのもののばね定数(張力/伸び)で，したがって，針金の材料のヤング率を E とすると

$$c^* = SE. \tag{1.18}$$

したがって，

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1.19}$$

で，これは針金の材料だけによってきまり，太さに無関係な定数である．

同様にして鎖状の質点の横方向の振動に対しては

$$m\ddot{u}_i = T\frac{u_{i-1}-u_i}{d}+T\frac{u_{i+1}-u_i}{d}. \tag{1.20}$$

ただし，$\frac{u_{i-1}-u_i}{d}$ はばねの傾き，T はばねの張力である．ここでは，ばねははじめから引っぱってあって，ほぼ一定の張力をもっているものとする．ここでまた m のかわりに m^*d を入れると，

$$m^*\ddot{u} = T\frac{\Delta^2 u}{d^2}. \tag{1.21}$$

ここで Δ^2 を ∂^2，d^2 を ∂x^2 と書きなおすと，微分方程式

$$m^*\ddot{u} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.22}$$

が得られる．これは張力を加えた(たわみやすい)ひもの横振動の方程式である．その形は(1.16)と全く同じであることに注意されたい．ただ縦振動でばね定数 c の入っていたところに糸の張力 T が入っている点だけが違う．

梯子形回路　電気の場合は，一様な平行な導線対，または同軸ケーブル等が1次元分布定数系の代表である．この場合の系の属性は導線のインダクタン

スと導線間(内外導体間)の静電容量である．そこでここでも離散的な場合を考えると，それは図1.2のような L, C の梯子形回路になる．ここで，L_i を通る電流を I_i, C_i の両端の電位差を V_i とすると，キルヒホフの第1法則により，

$$I_i - I_{i+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CV_i) = C\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}. \tag{1.23}$$

またキルヒホフの第2法則を使うと

$$V_{i-1} - V_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LI_i) = L\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t}. \tag{1.24}$$

これらが(*1.1*)に相当する差分方程式である．この場合(*1.1*)のように一つの方程式にまとめるには(*1.23*)と同じ式の i を $i-1$ にしたものとの差をとり，(*1.24*)を使って

$$I_{i-1} - 2I_i + I_{i+1} = LC\frac{\mathrm{d}^2 I_i}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.25}$$

のようにすればよい．さて，ここではむしろ(*1.23*), (*1.24*)を基本にして，ここで $d \to 0$ の極限を求めると

$$\left.\begin{aligned} C^*\frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial I}{\partial x}, \\ L^*\frac{\partial I}{\partial t} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

となる．ただし C^*, L^* はそれぞれ単位長さ当りの C, L である．これが分布定数系としての平行導線の方程式である．

(*1.26*)から I だけに対する2階微分方程式をつくると，

$$C^* L^* \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \tag{1.27}$$

となる．これはまた(*1.25*)で $d \to 0$ の極限を求めても得られる．いずれにして

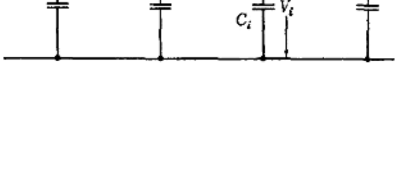

図1.2 L, C の梯子形回路

もこれは前の(*1.16*)と同じ形の式であるので，そのことから導線に沿って一定の速さの波が伝わることがわかる．波の速さは

$$v=\frac{1}{\sqrt{L^*C^*}} \tag{1.28}$$

で与えられる．

なお，電圧 V についても(*1.27*)と全く同じ形の方程式が成り立つことに注意しておく．その証明はのべるまでもない．

1.2 波動方程式

以上のように，いろいろの種類の1次元の系が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.29}$$

の形の方程式によってあらわされる．また．この方程式は

$$u=u_0 e^{j\omega t}, \tag{1.30}$$

つまり，時間的変化が正弦的であるような場合は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}u=0 \tag{1.31}$$

となって

$$u=Ae^{j\omega t}\cdot e^{\pm j\frac{\omega}{c}x}=Ae^{j\omega\left(t\pm\frac{x}{c}\right)} \tag{1.32}$$

の形に解かれる．即ち u は $-x$ または $+x$ の方向に速度 c で進む波となる．ここで重要な点は波の進行速度が ω に無関係な定数 c であることである．このことを，"この系は**分散**(dispersion)がない"という．ここで分散とは c が ω の関数として変わることを意味する．分散のないことは波動方程式(*1.29*)の特質であって，一般の波動現象では必ずしもそうはならない．

さて(*1.29*)が線形微分方程式であること，つまりもとの系が**線形系**(linear system)であることの帰結として，このようにして得られた種々の ω に対する多くの解を適当な係数を乗じて加えた(重ね合わせた)ものも，また(*1.29*)の解である．即ち

$$u=\sum_i a_i \exp j\omega_i\left(t-\frac{x}{c}\right)+\sum_i b_i \exp j\omega_i\left(t+\frac{x}{c}\right), \tag{1.33}$$

あるいは

$$u=\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\mathrm{d}\omega+\int_{-\infty}^{\infty} b(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}\mathrm{d}\omega \tag{1.34}$$

のような式であらわされる u はすべて解になっている．ところで，これらの式で t, x は第1項ではいつも $t-\dfrac{x}{c}$，第2項ではいつも $t+\dfrac{x}{c}$，という形で組になって入っているし，また $t-\dfrac{x}{c}=\tau$ と書くと

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{1.35}$$

は，いわゆるフーリエ積分であって，$a(\omega)$ を適当に与えることによって $A(\tau)$ は任意の関数をあらわしうる．即ち $A(\tau)$ が勝手に与えられると，それに対して $a(\omega)$ を

$$a(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.36}$$

によってきめればよい．そこで結局(第2項にも同様な考えを適用すると)

$$u=A\left(t-\frac{x}{c}\right)+B\left(t+\frac{x}{c}\right) \tag{1.37}$$

となり，ここで A, B は任意の関数でよいということになる．

上の説明ではフーリエ積分というような収束性その他について数学的にやや面倒なものを使って出したので，(1.37)の正しさについて多少疑問をもたれるかもしれないので，(1.37)を直接(1.29)に入れてみると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\left(-\frac{1}{c}\right)^2 A''\left(t-\frac{x}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}\right)^2 B''\left(t+\frac{x}{c}\right)\\&=\frac{1}{c^2}\left\{A''\left(t-\frac{x}{c}\right)+B''\left(t+\frac{x}{c}\right)\right\}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}$$

となってたしかに解になっていることがわかる．そうしてこれは(1.29)の一般解である．即ち(1.29)の解は一般に二つの波 $A\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$ と $B\left(t+\dfrac{x}{c}\right)$ との重ね合せである．$A\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$ は x の正方向に速度 c をもって形を変えずに進む波であり，その波の形はどんなものであってもよい．同様に $B\left(t+\dfrac{x}{c}\right)$ は x の負方

向に速度 c をもって進む波で，やはり任意の波形をもつ．このように，どんな形をした波でも，そのまま形を変えずに進み得るというのが方程式(*1. 29*)の特質である．それは，前述の分散がないことの必然的な帰結でもある．

境界条件

以上，一般的な解は(*1. 37*)で与えられることがわかったが，一義的に解がきまるためには，もっと具体的な条件，たとえば**境界条件**が与えられなければならない．境界条件というのは，方程式(*1. 29*)が成り立つ(つまり解の存在する) x の区間を (a, b) としたとき，その区間の両端，$x=a$，$x=b$ のところで u の値その他が与えられた値(t の関数)をとるようにするという条件である．たとえば $a=0$，$b=l$ として

$$x = 0 \quad \text{で} \quad u = f(t), \tag{1. 38}$$

$$x = l \quad \text{で} \quad u = g(t) \tag{1. 39}$$

というのが境界条件の典型的な例である．すると，これに(*1. 37*)を代入すれば

$$A(t)+B(t) = f(t), \tag{1. 40}$$

$$A\left(t-\frac{l}{c}\right)+B\left(t+\frac{l}{c}\right) = g(t). \tag{1. 41}$$

これは t の関数としての A, B に対する線形の関数方程式(差分方程式)であるが，これだけではまだ A, B はきまらないことがわかる．(*1. 41*)で $t-\dfrac{l}{c}$ のかわりに t と書きかえると

$$A(t)+B\left(t+\frac{2l}{c}\right) = g\left(t+\frac{l}{c}\right). \tag{1. 42}$$

これと，(*1. 40*)とから

$$B\left(t+\frac{2l}{c}\right)-B(t) = g\left(t+\frac{l}{c}\right)-f(t) \tag{1. 43}$$

で，これからたとえば $B(0)$ をきめれば $B(2l/c)$，$B(4l/c), \cdots$ と，$2l/c$ きざみに B の値はきまる．しかし B のそれ以外の値はきまらないし，また，$B(0)$ も任意定数としてのこる．

そこで(*1. 29*)の解を一義的にきめるにはこのほかに**初期条件**たとえば $t=0$ で $u=0$，$\partial u/\partial t=0$ というようなことが必要である．これは，**世界のはじめ**には波は存在せず，境界における変化 $f(t), g(t)$ が**原因**となって波が発生すると

いう考え方である．その場合，また$f(t), g(t)$ はいずれも $t>0$ についてだけ定義され，境界条件は $t>0$ でだけ成り立つものとする．$t<0$ は“世界のはじめ”の前であって，われわれの考えおよばないところと考えるのである．

また(*1.43*)で $f(t)$ と $g(t)$ の両方を考えることは事柄を面倒にするから $f(t)$ だけを考え，$g(t)=0$ とする．こうすることは一般性をそこなわない．なぜなら，別に $f(t)=0$ として，$g(t)$ だけを考えて得た解をつくってあとから重ね合わせれば，$f(t), g(t)$ の両方が存在する場合の解が得られるからである．

そこで

$$\left.\begin{aligned} A(t)+B(t)&=f(t), \\ A\left(t-\frac{l}{c}\right)+B\left(t+\frac{l}{c}\right)&=0, \end{aligned}\right\} \quad t>0. \tag{1.44}$$

また

$$\left.\begin{aligned} A\left(-\frac{x}{c}\right)+B\left(\frac{x}{c}\right)&=0, \\ A'\left(-\frac{x}{c}\right)+B'\left(\frac{x}{c}\right)&=0, \end{aligned}\right\} \quad 0<x<l. \tag{1.45}$$

そこで

$$\left.\begin{aligned} A\left(-\frac{x}{c}\right)&=0, \\ B\left(\frac{x}{c}\right)&=0 \end{aligned}\right\} \quad 0<x<l. \tag{1.46}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} A(t)&=0, \quad -\frac{l}{c}<t<0, \\ B(t)&=0, \quad 0<t<\frac{l}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

そこで(*1.44*)から

$$B(t)=0, \quad \frac{l}{c}<t<\frac{2l}{c}. \tag{1.48}$$

(*1.47*)とあわせると

$$B(t)=0, \qquad 0<t<\frac{2l}{c}. \tag{1.49}$$

そこで(*1.44*)に入れると

$$A(t)=f(t), \qquad 0<t<\frac{2l}{c}.$$

これから

$$B(t)=-f\left(t-\frac{2l}{c}\right), \qquad \frac{2l}{c}<t<\frac{4l}{c},$$

$$A(t)=f(t)+f\left(t-\frac{2l}{c}\right), \qquad \frac{2l}{c}<t<\frac{4l}{c}.$$

以下同様にして

$$\left.\begin{aligned} A(t)&=f(t)+f\left(t-\frac{2l}{c}\right)+f\left(t-\frac{4l}{c}\right)\\ &\quad+\cdots+f\left(t-\frac{2nl}{c}\right),\\ B(t)&=-f\left(t-\frac{2l}{c}\right)-\cdots-f\left(t-\frac{2nl}{c}\right),\end{aligned}\right\} \frac{2nl}{c}<t<\frac{2(n+1)l}{c}. \tag{1.50}$$

こう書くと面倒であるが，要するにこれは図1.3のように$f(t)$が原因となって出た$+x$方向への波$A\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$が$x=l$のところで反射されてもどり，また，$x=0$で反射され，こうして反射をくりかえすうちに，さらに後から発生した波が累加されて行く様子を式であらわしたにすぎない．ここで波は反射のたびごとに符号が逆になることが(*1.38*), (*1.39*)のような境界条件の場合の特徴である(固定端反射)．しかしこの場合，両方の端の反射で符号は元に戻るから一度発生した波は元と同じ符号で累加されて行く．これを式にあらわせば

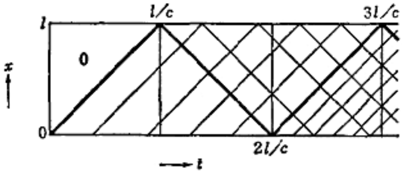

図1.3