

应用数学丛书

常微分方程及其应用

秦化淑 林正国 编著

8

国防工业出版社

应用数学丛书

常微分方程及其应用

秦化淑 林正国 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书简要介绍常微分方程基本理论中的主要内容，通过典型例子说明常微分方程理论在自然科学和工程技术中的广泛应用。此书采用了向量矩阵符号，从而使基本理论的叙述和定理的证明简单明确。书中对容易引起误解的部分用例子和加注的方式进行说明，以引起读者的注意。因此，此书易为工程技术人员和工科大学教师理解和掌握。本书内容包括：微分方程的初等解法，解的存在和唯一，线性微分方程，稳定性，二阶矢量微分方程解的性态等。

本书可供有关高等院校师生及工程技术人员参考。

应用数学丛书 常微分方程及其应用

秦化淑 林正国 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张8³/₄ 225千字

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷 印数：0,001—9,300册

统一书号：15034·2795 定价：1.80元

应用数学丛书目录●

这是第一批的目录，以后将陆续分批刊登

1. Z -变换与拉普拉斯变换……………关肇直 王恩平 编著
2. 常微分方程及其应用……………秦化淑 林正国 编著
3. 实变函数论基础……………胡钦训 编著
4. 正交函数及其应用……………柳重堪 编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换……………关肇直 陈文德 编著
6. 圆柱函数……………刘颖 编著

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前 言

常微分方程是一门古老学科，它的历史可以追溯到发明微积分的年代。目前，常微分方程已经发展成为数学中一个庞大的分枝。不仅内容丰富，理论深刻，而且它的应用也十分广泛。近二十多年来，由于电子计算机的普遍使用，使得过去许多无法求解的微分方程问题已能获得数值解，从而能更多地认识解的种种性质和其数值特征。这就为微分方程理论应用于工程实际问题提供了定量的依据。常微分方程这门学科，无论在理论研究、还是数值求解以及实际应用方面都已经达到十分广泛的地步。常微分方程的方法论也正在为广大科学工作者、工程技术人员所掌握。限于篇幅，本书不能把常微分方程的所有重要内容介绍给读者，只能把其中最基本最常用的部分介绍出来，供读者参阅。书中没有介绍的一些内容我们将指出一定的参考书，供读者查阅。为了节省篇幅，对于定理的证明我们也不作过于详细的推导。为了使读者易于掌握某些定理的主要思想，定理证明中一些重要的事实我们放在附录中加以说明。

本书共分六章。第一章通过某些物理问题和工程问题说明常微分方程与各种实际问题的联系。从中并可了解到研究微分方程的求解问题、解的存在性、唯一性等等问题的重要性和必要性。第二章讨论微分方程的初等求解问题，即讨论几种常见类型的微分方程的求解，从中或者可以看到这些类型微分方程的解的表示式，或者可以了解到其解的重要性质。第三章讲述一阶微分方程组的基本理论，即一阶微分方程组初值问题的解的存在性、唯一性，解的延拓以及解对参数和初值的连续性和可微性。第四章介绍线性矢量微分方程的解的表示式和解的性质。特别要介绍线性定常矢量微分方程的解的构成以及实际求解的方法。第五章介绍

常微分方程解的稳定性概念及其重要结果。这里指的是李雅普诺夫意义下的稳定性。因此书中将介绍与李雅普诺夫直接方法（第二方法）有关的一些问题。第六章则介绍平面定性理论的部分结果，即一次奇点附近二阶微分方程的轨线的性态，它的孤立周期解存在和不存在的有关结果。

目 录

第一章 微分方程问题的提出	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 一些常见的微分方程问题	1
一、自由落体运动的规律	1
二、单摆运动	2
三、真空中的抛射体运动	4
四、深水炸弹的水下运动	5
五、电容器的放电规律	6
六、质量和能量之间转换关系的规律	7
七、运载火箭的运动规律	8
八、行星运动规律和万有引力定律	9
九、人造地球卫星的运动规律	13
十、导弹的导引规律	14
§ 1.3 讨论意见	16
第二章 微分方程的初等解法	18
§ 2.1 引言	18
§ 2.2 $\frac{dy}{dt} = f(t)$ 型微分方程	20
一、 $f(t)$ 为连续函数情况	21
二、 $f(t)$ 有间断点, 且在断点处趋于无穷	22
三、例	23
§ 2.3 $\frac{dy}{dt} = f(y)$ 型微分方程	25
一、 $f(y)$ 在其定义区间内连续且不为零	26
二、 $f(y)$ 在其定义区间内某 y 处为零	26
三、例	26
§ 2.4 分离变量型的微分方程	28
一、 $g(y) \neq 0, \forall y \in (a_1, a_2)$ 的情况	28
二、 $g(\bar{y}) = 0, \bar{y} \in (a_1, a_2), g(y) \neq 0, \forall y \neq \bar{y}$ 的情况	29
三、例	29
§ 2.5 齐次型微分方程	30

一、 $h(u)$ 在其定义区间内连续, 且 $h(u) \neq u$	31
二、 $h(\bar{u}) = \bar{u}$ 的情况	31
三、例	33
§ 2.6 $\frac{dy}{dt} = f(at + by)$ 型微分方程	35
一、例	35
§ 2.7 $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1y + c_1}{a_2t + b_2y + c_2}\right)$ 型微分方程	36
一、 $a_1t + b_1y + c_1 = 0$ 与 $a_2t + b_2y + c_2 = 0$ 有共同解的情况	36
二、 $a_1t + b_1y + c_1 = 0$ 与 $a_2t + b_2y + c_2 = 0$ 无共同解的情况	37
三、例	37
§ 2.8 一阶线性微分方程	38
一、 $b(t)$ 在 (t_1, t_2) 内恒为零的情况	38
二、 $b(t)$ 在 (t_1, t_2) 内不恒为零的情况	38
三、例	39
§ 2.9 $P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$ 型微分方程	42
一、全微分方程	42
二、积分因子	44
三、例	46
§ 2.10 克莱洛方程和拉格朗日方程	50
一、克莱洛型方程	50
二、拉格朗日型方程	51
三、例	52
§ 2.11 某些特殊的二阶微分方程	54
一、 F 中不显含 y	54
二、 F 中不显含 t	55
三、例	56
第三章 微分方程解的存在和唯一	59
§ 3.1 引言	59
§ 3.2 微分方程解的局部存在性和唯一性	61
§ 3.3 微分方程解的延拓	67
§ 3.4 微分方程的解对参数和初值的关系	70
一、解对参数的连续依赖性	71
二、解对参数的可微性	74
三、解对初值的连续性与可微性	79
§ 3.5 微分方程的变分方程	82
一、参数扰动引起的微分方程的扰动	83

二、扰动微分方程的解的一次近似表示	83
三、扰动微分方程的解的二次近似表示	85
第四章 线性微分方程	90
§ 4.1 引言	90
§ 4.2 线性齐次矢量微分方程	91
一、线性齐次矢量微分方程初值问题的解的表示式	91
二、阵值函数 $\Phi(t; t_0)$ 的性质	94
三、线性齐次矢量微分方程的基本解矩阵	97
四、线性齐次矢量微分方程的通解	100
§ 4.3 线性非齐次矢量微分方程	103
一、线性非齐次矢量微分方程初值问题的解的表示式	103
二、线性非齐次矢量微分方程的初值问题的解的性质	105
三、线性非齐次矢量微分方程的通解	107
§ 4.4 线性常系数矢量微分方程	108
一、状态转移矩阵 e^{At} 的性质	111
二、 SAS^{-1} 的几种常见的形式	112
三、状态转移矩阵 e^{At} 的构成	117
四、线性齐次常系数矢量微分方程解的性质	124
§ 4.5 线性矢量微分方程的解法	129
一、求解线性齐次矢量微分方程的待定常数法	129
二、求解线性非齐次矢量微分方程的待定常数法	132
三、高阶线性定常微分方程的解法	135
四、欧拉方程	137
第五章 稳定性	139
§ 5.1 引言	139
§ 5.2 微分方程解的稳定性	141
一、李雅普诺夫意义下解的稳定性	141
二、微分方程解的扰动和线性齐次方程的稳定性	145
三、线性定常矢量微分方程解的稳定性	148
四、线性非常数矢量微分方程解的稳定性	155
§ 5.3 李雅普诺夫第二方法	162
一、正定函数及其有关性质	162
二、李雅普诺夫直接方法及主要结果	165
三、线性定常矢量微分方程的李雅普诺夫函数	173
四、线性定常矢量微分方程解的过渡过程时间 t_p 的估计	178
§ 5.4 一次近似理论	182
一、线性化微分方程	182

二、从 A 的本征值的状况判别方程的解的稳定性	185
三、非线性微分方程的李雅普诺夫函数	191
§ 5.5 关于大范围 (全局) 稳定性的某些结果	194
一、矢值函数及其雅可比矩阵的有关性质	194
二、非线性矢量微分方程大范围稳定性定理	196
三、非线性矢量微分方程解的过渡过程时间的估计	199
第六章 二阶矢量微分方程解的性态	201
§ 6.1 引言	201
§ 6.2 二阶矢量微分方程的常点和奇点	202
一、常点和奇点的有关性质	203
二、无切线段的主要性质	204
三、微分方程的解在常点附近的性态	206
§ 6.3 二阶矢量微分方程的奇点	209
一、齐次微分方程的一次奇点及其分类	209
二、微分方程的解 (轨线) 在一次奇点附近的性态	220
三、微分方程的非一次奇点	223
§ 6.4 微分方程的极限环	228
一、微分方程的周期解	229
二、微分方程的轨线在极限环附近的性态	233
三、极限环存在的判别法	237
参考资料	250
附录一	252
附录二	252
附录三	254
附录四	263

第一章 微分方程问题的提出

§ 1.1 引言

人们对物质的运动进行定量或定性的描述时，常常需要借助于数学工具。常微分方程是描述物质运动经常使用，而且还使用得十分广泛的一种数学工具。在工程技术领域内，为了刻画某种设计准则，也常常导致常微分方程问题。通过分析相应的微分方程的各种特性，能够对所研究物质的运动或所要刻画的工程设计准则获得某些定性和定量的了解。如果人们能够进一步求得相应微分方程的分析解或数值解，那么所讨论对象的运动规律的数量关系就能够确定下来。这样人们对问题的认识就会深刻得多。本章我们将通过实例说明一些物理学、力学和自动控制理论的某些定律或某些设计准则是如何导致微分方程问题的。至于这些微分方程的求解问题或分析问题将在后面的章节中去讨论和研究。在掌握了后面各章的理论和方法后，本章提到的这些特殊类型的微分方程的求解问题和分析问题将不难解决了。

自然，本章涉及到的微分方程是简单的，而且其中多数是直接能够求得其分析解的。由于我们这里的目的是说明如何从实际问题导致微分方程问题的。所以，尽管简单，我们也不去求它们的解。

§ 1.2 一些常见的微分方程问题

一、自由落体运动的规律

自由落体运动是指物体在仅受到地球引力的作用下，初速为零的运动。根据经典力学的牛顿第二定律：物体动量变化的大小与它所受的外力成正比，其方向与外力的方向一致。当物体的运

动速度 \vec{v} 的绝对值不大 (与光速 = 3×10^8 公里/秒相比较) 时, 其质量 m 可以是一恒量。于是这一运动定律能表达成

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \text{ 或 } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (1.2.1)$$

其中 \vec{F} 表示物体所受外力的合力。

对于仅受到地球引力作用的自由落体的运动, 则有:

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

这里 \vec{g} 表示重力加速度, 其大小 g 一般取为: $g = 9.8$ 米/秒²; \vec{S} 表示自由落体运动的路程, 其大小以 S 表之。

注意到 \vec{S} 的方向与 \vec{g} 的方向一致, 将 $\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$ 代入式 (1.2.1) 后得到自由落体运动路程大小变化的规律:

$$m \cdot \frac{d^2S}{dt^2} = m \cdot g \text{ 或 } \frac{d^2S}{dt^2} = g \quad (1.2.2)$$

运动规律式 (1.2.2) 表示一个微分方程问题。等式 (1.2.2) 的左端是路程大小 S 的二次微商, 它的右端是常数 g 。这里 S 和 g 之间不是普通的函数关系, 而是二次微商的关系。自然, 这个微分方程很简单, 能够通过直接求积分的方法得到路程大小 S 随时间变化的规律。

二、单摆运动

单摆又称为钟摆或数学摆。所谓单摆运动是指一质量为 $m > 0$ 的小球, 用长度为 l 的柔软细绳拴住, 细绳的一端固定在某点 O 处。小球在铅垂平面内运动。略去空气的阻力和细绳在 O 点处的摩擦力。并且认为细绳的长度 l 不变, 仅考虑地球的引力和细绳对小球的拉力 (见图1.1)。

在铅垂平面内引进以 O 为坐标原点的极坐标系。由于细绳长度不变且细绳总是直的, 所以小球的位置用一个坐标 $\theta(t)$ 就能表示。这里 θ 表示细绳 l 和铅垂方向之间的夹角。铅垂方向即是小球的平衡方向, 它对应的 θ 为零。

作用在小球上的地球引力的大小为 mg , 其方向铅垂向下。重

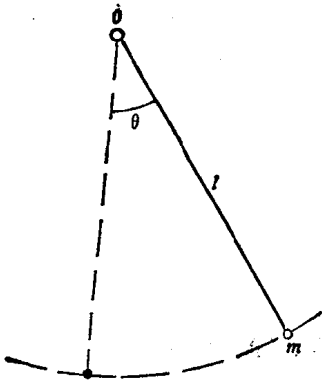


图1.1

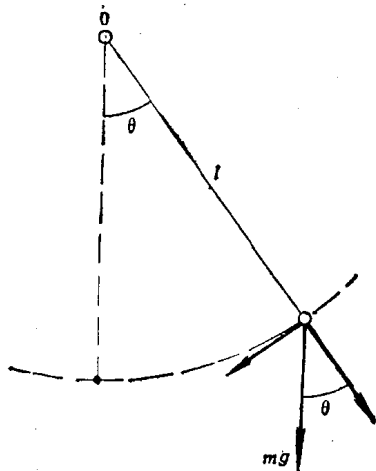


图1.2

力沿细绳方向的分力的大小为 $mg \cdot \cos \theta$ ，其方向沿细绳指向外。这个力与小球运动所需要的向心力正好平衡。所以小球沿细绳方向没有运动。重力在垂直于细绳方向的分力的大小为 $mg \cdot \sin \theta$ ，它的方向与角 θ 增加的方向相反（见图1.2）。

根据牛顿第二定律得到单摆运动的规律为：

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg \cdot \sin \theta \quad (1.2.3)$$

• 根据圆周运动规律有： $l \cdot \frac{d\theta}{dt} = v$ ，于是从式(1.2.3)得出：

$$l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot \sin \theta \quad (1.2.4)$$

关系式(1.2.4)是包含 θ 及其二阶微商的方程，并且 θ 不是线性而是非线性地出现在方程中（以 $\sin \theta$ 这种非线性形式）。从方程(1.2.4)来求出 θ 随时间变化规律的分析表达式是困难的。

当 $|\theta|$ 比较小时[●]，对微分方程(1.2.4)能够进行线性化处理，即用 θ 代替 $\sin \theta$ ，或者说，用 θ 来近似 $\sin \theta$ 。这样得到式(1.2.4)

● $|\theta|$ 表 θ 的绝对值

的线性化微分方程:

$$l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot \theta \quad (1.2.5)_1$$

在相同初始条件下从微分方程 (1.2.5) 求得的 θ 随时间 t 变化的规律 $\theta(t)$ 是单摆运动的近似规律。通常将式 (1.2.5)₁ 写成如下的规范形式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \cdot \theta = 0 \quad (1.2.5)_2$$

其中 $k^2 = \frac{g}{l}$ 。

三、真空中的抛射体运动

在空气中运动的抛射体, 它的运动规律十分复杂。这里仅考虑在真空中抛射体的运动规律。即忽略抛射体所受的空气阻力, 而仅考虑质量为 m 的抛射体受地球引力作用而引起的运动。

在三维欧氏空间 R^3 中取一直角坐标系 $oxyz$; o 为坐标原点, oy 轴铅垂向上; ox 轴沿水平方向; oz 轴与 ox 轴、 oy 轴一起组成右手坐标系。

依牛顿第二定律, 抛射体的运动规律为:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

抛射体的初始状态取为:

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \cdot \cos \alpha, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \sin \alpha, \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中 \vec{v}_0 是抛射体的初始速度, 位于 oxy 平面内, v_0 表示 \vec{v}_0 的大小; α 表示 \vec{v}_0 与水平方向 (即 ox 轴) 之间的夹角 (见图1.3)。

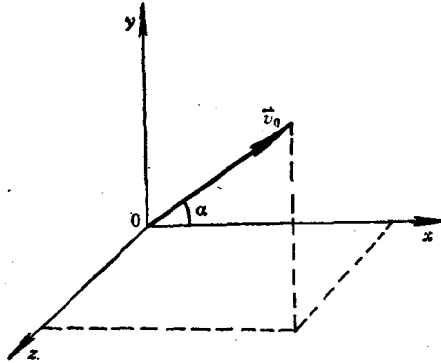


图 1.3

四、深水炸弹的水下运动

一质量为 m 的深水炸弹，从高为 h (米) 处自由下落到海中。这里不考虑深水炸弹在水平方向的运动，而仅考虑它在铅垂方向的运动。由经典力学知：物体从高为 h (米) 处自由下落至海平面时，其铅垂方向的速度 v_0 为：

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

这里 g 为重力加速度。

按如下方式取定坐标系：坐标原点 o 取在海平面上某处， ox 轴铅垂向下 (见图1.4)。

深水炸弹 m 自高度为 h (米) 处自由下落至海平面的瞬时时间为 t_0 。于是深水炸弹的初始状态为：

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} \\ &= v_0 = \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

深水炸弹在海水中运动时，我们不考虑海水对它的浮力，这时炸弹受到两个力的作

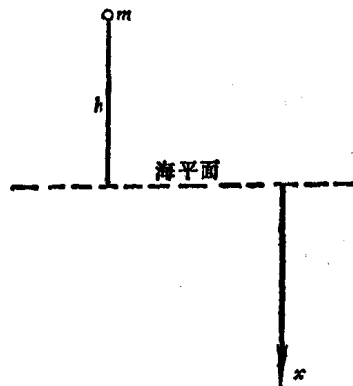


图 1.4

用：一是地球引力 mg ，其方向铅垂向下；另一个是海水对炸弹的摩擦力。这个摩擦力是很复杂的，它和炸弹的形状、速度等因素有关。这里仅近似地认为摩擦力的大小和炸弹的速度 v 成正比，比例系数即摩擦系数 μ 为常数。摩擦力的方向与炸弹的速度方向相反，因而是铅垂向上的。于是摩擦力 f 能表示为：

$$f = -\mu \cdot v = -\mu \cdot \frac{dx}{dt}$$

根据牛顿第二定律知深水炸弹在水下运动的规律为：

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\mu \cdot v + m \cdot g$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dx}{dt} = g \quad (1.2.7)$$

五、电容器的放电规律

电容器 C 的极板通过电感 L 和电阻 R 相连接。如图 1.5 所示。

今考察电容器的放电规律。设电容器极板上的电荷量为 Q ，这时电路中的电流强度 I 等于电荷量对时间的变化率，即

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

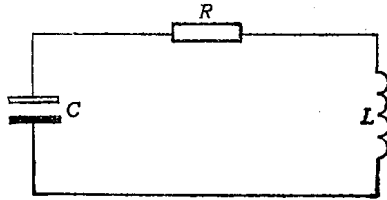


图 1.5

令电容器两极板上 t 时刻的电位差为 $V(t)$ 。于是电路中总电位降为： $IR + V$ 。根据克希荷夫定律：电路中总的电位降等于电路中作用着的电动势。鉴于由图 1.5 表示的电路中仅有自感电动势 $-L \cdot \frac{dI}{dt}$ ，所以成立如下等式关系：

$$IR + V = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (1.2.8)$$

由于 $V = \frac{Q}{C}$ ， $I = \frac{dQ}{dt}$ ，所以由式 (1.2.8) 得电容器的