高等学校试用教材

凸分析与凸二次规划

寇述舜　编著

天津大学出版社

高等学校试用教材

凸分析与凸二次规划

寇述舜 编著

天津大学出版社

2481163

内 容 提 要

本书主要内容有：凸集，仿射集，凸锥，凸多胞形，极点与极方向，凸集的相对内部，凸集分离定理及其应用；凸函数的概念，凸函数的性质，凸函数的充分必要条件，次梯度与次微分，Jensen不等式与Hadamard不等式；凸函数的极小点，凸规划最优解的充分必要条件，凸规划的对偶理论；凸二次规划的可行点有效集算法，线性互补问题与Lemke互补转轴算法，凸二次规划的对偶理论与灵敏度分析，凸二次规划的Dildreth与D'espo算法。

本书可作高等院校理工科研究生与高年级本科生的教材或参考书使用，也可供有关教师与工程师参考。

（津）新登字012号

凸分析与凸二次规划
寇述舜 编著
*
天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：850×1168毫米 1/32 印张：6.625 字数：172千字
1994年4月第一版 1994年4月第一次印刷
印数：1—1 000
ISBN 7-5618-0607-8
O·63
定价：5.40元

序

近十几年来国内许多高等学校的研究生与高年级本科生在学习了最优化方法或运筹学以后，希望在理论上进一步提高．凸分析正是最优化方法的理论基础．线性规划、非线性规划、多目标规划、不可微规划、最优控制以及数理经济学等都需要凸分析的某些概念与理论．

凸分析作为数学的一个分支是60年代发展起来的，奠基工作由Fenchel W，Moreau J J，Rockafellar R T等人完成．关于凸分析的著作国外有几本，参考文献1是一本经典著作，内容十分丰富，在应用数学界影响较大．参考文献2篇幅较小，取材得当，内容新颖．国内最早的是越民义教授的凸分析讲义．此外，最近两年出版的有：史树中教授的凸分析[10]与刘光中教授的凸分析与极值问题[11]．与其它学科相比，凸分析这一学科方面的书还很少．

凸二次规划与凸分析密切相关，而且最近几年研究凸二次规划的人越来越多，新的成果不断出现，应用也越来越广泛，可是将凸分析与凸二次规划这两方面的内容密切结合起来的书目前还未见到．本书试图将这两方面的内容结合起来，以满足社会需要．主要内容除凸分析的基本概念、基本理论以外，还有凸二次规划的三种常用算法、对偶理论与灵敏度分析等．本书具有内容广泛，系统性强，论证严谨，编排适当，便于阅读等特点．各章末都有少量习题，它们对于理解与掌握正文的内容是有益的．在附录3中给出一个源程序，可用以在微机上求解凸二次规划．

本书供应用数学专业、运筹学专业与计算数学专业的研究生与高年级本科生作教材使用．工科研究生在学习最优化方法或运筹学

时也可以此书为补充教材或参考书．此外，还可供有关教师与工程师参考．

阅读本书需要数学分析、线性代数方面的基本知识，也需要最优化方法与点集拓扑学方面的一些基本知识．应用数学专业、运筹学专业的研究生、高年级本科生都已具备这些知识．工科研究生在阅读前三章时，有些数学概念或记号可以查阅附录，某些内容（如打 * 号的部分）不必阅读．在学习最优化方法或运筹学的过程中，也可以直接阅读第四章、第五章，而不会有很大困难．

南开大学高鸿勋教授与孙澈教授曾于1989年审阅了本书的初稿，北京计算机学院席少霖教授也曾经给作者很大鼓励与指导，特向他们致以衷心的谢意．

本书初稿于1989年写成，在出版前夕又稍加修改与补充．由于作者水平有限，不妥与错误之处难免，敬请专家与读者批评指正．

寇 述 舜

于天津大学数学系

1993年9月

目　录

第一章　凸集

凸集是凸分析(convex analysis)中最重要最基本的概念之一.本章首先研究凸集的概念与性质，然后研究一些特殊的凸集：凸包、凸多面体、凸代数体、凸体、凸锥，最后介绍$\mathscr{R}^n$中的几个经典定理与凸集的相对内部.

在本书中用$\mathscr{R}$表示全部实数集合，V表示$\mathscr{R}$上的线性空间，$\mathscr{R}^n$表示n维欧氏空间. 为方便起见，假定V中包含的点多于一个. 在$\mathscr{R}^n$中向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$为欧氏范数.

设$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in V$，则集合$\{\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\mid 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}=\{\boldsymbol{y}+\lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mid 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$表示以$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$为端点的线段，记为$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]$. 与此类似，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\{\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\mid 0<\lambda<1\}$，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=\{\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\mid 0\leqslant\lambda<1\}$，$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\{\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\mid 0<\lambda\leqslant 1\}$.

若$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，则$[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}]=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}\}$.

若x，$y\in\mathscr{R}$，且$x\neq y$，则记号$[x,\ y]$，$[x,\ y)$，$(x,\ y]$以及$(x,\ y)$的含义与数学分析中的规定相同.

§1.1　凸集·凸包·凸多面体

1.1.1　凸集

定义 1.1.1　若$\boldsymbol{x}^{(i)}\in V$，$\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,\ \cdots,\ k$，且$\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，则称点$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}$为$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}^{(k)}$的**凸组合**.

定义 1.1.2　设$A\subset V$，若$\forall\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in A$均有$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\{\lambda\boldsymbol{x}

$+(1-\lambda)\boldsymbol{y} | 0<\lambda<1\} \subset A$，则称$A$为**凸集**（convex set）.

可以验证，以下各例中的集合都是凸集.

例 1 空集Φ，单元素集$\{\boldsymbol{a}\}$，整个线性空间V（这些都是平凡的凸集）.

例 2 $S=\{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\}$，其中$A$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}^m$，$\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}^n$.

例 3 超球 $B(\boldsymbol{a};\ r)=\{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x}\in\mathscr{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r\}$.

例 4 $A=\{$所有正系数单元多项式$\}$（设 V为$\mathscr{R}$上的所有单元多项式构成的线性空间）.

凸集具有以下性质：

性质 1 设C_1，C_2，…，$C_k\subset V$均为凸集，$\alpha_i\in\mathscr{R}$，$i=1$，…，k，则$\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i C_i$ 为凸集.

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i C_i=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}^{(i)},\ \boldsymbol{x}^{(i)}\in C_i\right\}\right)$$

性质 2 若C_j为凸集，$j\in J$，则它们的交$\bigcap\limits_{j\in J}C_j$也是凸集，其中$J$为任一指标集.

（证明留给读者）

性质 3 设$A\subset V$，则A是凸集等价于

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\ \forall\,\alpha,\ \beta\geqslant 0. \tag{1.1-1}$$

证 1° 设A是凸集，再设α，β是不同时为零的任意两个非负实数.

设$\boldsymbol{z}\in(\alpha+\beta)A$，即存在$\boldsymbol{x}\in A$，使$\boldsymbol{z}=(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$. 因为$\alpha\boldsymbol{x}\in\alpha A$，$\beta\boldsymbol{x}\in\beta A$，所以$\boldsymbol{z}\in\alpha A+\beta A$，因而

$$(\alpha+\beta)A\subset\alpha A+\beta A.$$

设$\boldsymbol{z}\in\alpha A+\beta A$，即存在$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$，使

$$\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\beta\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(2)}\right).$$

由于A是凸集，$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$，所以$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$的凸组合属于$A$，即

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(2)}\in A,$$

因而　$\boldsymbol{z}\in(\alpha+\beta)A$，于是$\alpha A+\beta A\subset(\alpha+\beta)A$.

综上所述得式(1.1-1)（当$\alpha=\beta=0$时，式(1.1-1)显然也成立）.

2° 假设式(1.1-1)成立，再设$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$，$\lambda\in(0, 1)$. 任取$\alpha>0$，令$\beta=\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\alpha$. 由此可得$\lambda=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$1-\lambda=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

由式(1.1-1)得　$\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\beta\boldsymbol{x}^{(2)}\in(\alpha+\beta)A$，即存在$\boldsymbol{x}\in A$使$\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\beta\boldsymbol{x}^{(2)}=(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}$. 由此得

$$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}.$$

因为$\boldsymbol{x}\in A$，所以$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$，因而$A$是凸集.

性质 4　设W是线性空间，T是由V到W的线性映射.

1° 若$A\subset V$是凸集，则$TA\subset W$是凸集；

2° 若$B\subset W$是凸集，则$T^{-1}B\subset V$是凸集.

证　1° 设A是凸集，$\lambda\in(0, 1)$. 若$\boldsymbol{y}^{(1)}$，$\boldsymbol{y}^{(2)}\in TA$，则存在$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$，使

$$\boldsymbol{y}^{(i)}=T\boldsymbol{x}^{(i)},\quad i=1,\ 2.$$

因而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{y}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{(2)}&=\lambda T\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)T\boldsymbol{x}^{(2)}\\&=T(\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}).\end{aligned}$$

由A的凸性可得　$\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in A$. 于是　$\lambda\boldsymbol{y}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{(2)}$

$\in TA$. 所以TA为凸集.

2° 设$B\subset W$是凸集，$\lambda\in(0,1)$. 若$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}\in T^{-1}B$，则存在$\boldsymbol{y}^{(1)}$，$\boldsymbol{y}^{(2)}\in B$，使$T^{-1}\boldsymbol{y}^{(i)}=\boldsymbol{x}^{(i)}$，$i=1,2$，因而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}&=\lambda T^{-1}\boldsymbol{y}^{(1)}+(1-\lambda)T^{-1}\boldsymbol{y}^{(2)}\\&=T^{-1}(\lambda\boldsymbol{y}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{(2)}).\end{aligned}$$

由B的凸性可得$\lambda\boldsymbol{y}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{(2)}\in B$. 于是 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in T^{-1}B$. 所以$T^{-1}B$为凸集.

1.1.2 凸包

定义 1.1.3 设$A\subset V$. V中所有包含A的凸子集的交称为A**的凸包**（convex hull）. 记为$\mathrm{co}(A)$（见图1-1）.

显然，凸包$\mathrm{co}(A)$是包含A的最小凸集，凸包具有以下重要性质：

定理 1.1.1 若$A\subset V$，$\boldsymbol{x}\in\mathrm{co}(A)$，则

$$\mathrm{co}(A\cup\{\boldsymbol{x}\})=\mathrm{co}(A).$$

证 因为 $A\subset\mathrm{co}(A)$，$\boldsymbol{x}\in\mathrm{co}(A)$，所以

$$A\cup\{\boldsymbol{x}\}\subset\mathrm{co}(A),$$

因而

$$\mathrm{co}(A\cup\{\boldsymbol{x}\})\subset\mathrm{co}(A).$$

显然还有

$$\mathrm{co}(A)\subset\mathrm{co}(A\cup\{\boldsymbol{x}\}),$$

于是

$$\mathrm{co}(A\cup\{\boldsymbol{x}\})=\mathrm{co}(A).$$

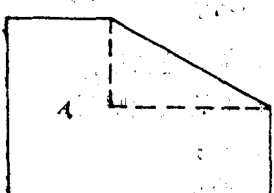

图1-1

定理 1.1.2 设$A\subset V$，则A的凸包$\mathrm{co}(A)$等于A中元素的有限凸组合的全体.

证 设B为A中元素的有限凸组合的全体.

1° 设$\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\cdots\boldsymbol{x}^{(k)}\in A$，因而也属于$\mathrm{co}(A)$. 于是

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}\in\mathrm{co}(A),\ \forall\lambda_i\geqslant0,\quad\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

（见本章习题 2）因而$B\subset \mathrm{co}(A)$.

2° 设$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in B$，即存在$\boldsymbol{x}^{(i)}$，$\boldsymbol{y}^{(j)}\in A$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\mu_j\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，$\sum_{j=1}^{m}\mu_j=1$使

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)},\ \boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{m}\mu_j\boldsymbol{y}^{(j)}.$$

$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$的凸组合

$$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{k}\lambda\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}+\sum_{j=1}^{m}(1-\lambda)\mu_j\boldsymbol{y}^{(j)},\ \lambda\in(0,\ 1)$$

而 $\lambda\lambda_i\geqslant 0$，$(1-\lambda)\mu_j\geqslant 0$，且

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}(1-\lambda)\mu_j=\lambda+(1-\lambda)=1,$$

所以 $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in B$，因而$B$为凸集. 而$B\supset A$，所以$B\supset \mathrm{co}(A)$.

综上所述得 $B=\mathrm{co}(A)$.

定理 1.1.3 设A，$B\subset V$是凸集，则

$$\mathrm{co}(A\cup B)=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}[\lambda A+(1-\lambda)B].$$

证 1° 设$\boldsymbol{z}\in\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}[\lambda A+(1-\lambda)B]$，因而存在$\lambda_1\in[0,1]$，使$\boldsymbol{z}\in\lambda_1A+(1-\lambda_1)B$.于是存在$\boldsymbol{x}^{(1)}\in A$，$\boldsymbol{y}^{(1)}\in B$，使

$$\boldsymbol{z}=\lambda_1\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda_1)\boldsymbol{y}^{(1)}.$$

又因为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{y}^{(1)}\in\mathrm{co}(A\cup B)$，$\lambda_1\in[0,\ 1]$，所以$\boldsymbol{z}\in\mathrm{co}(A\cup B)$，因而

$$\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}[\lambda A+(1-\lambda)B]\subset\mathrm{co}(A\cup B).$$

2° 设$\boldsymbol{z}\in\mathrm{co}(A\cup B)$.依定理 1.1.2，存在$\boldsymbol{z}^{(i)}\in A\cup B$，$\lambda_i\geqslant$

0，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，使 $\boldsymbol{z}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{z}^{(i)}$.

若 $\boldsymbol{z}^{(i)}\in A$，$i=1$，…，$m$，则$\boldsymbol{z}\in A$（见本章习题 2）。因而$\boldsymbol{z}\in\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}[\lambda A+(1-\lambda)B]$.若$\boldsymbol{z}^{(i)}\in B$，$i=1$，…，$m$，也有同样结论.

设$\boldsymbol{z}^{(i)}\in A$，$i=1$，…，$k$；$\boldsymbol{z}^{(i)}\in B$，$i=k+1$，…，$m$.令

$$\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_k,\quad 0<\lambda<1$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{z}^{(i)}+\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{z}^{(i)}\\&=\lambda\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda}\boldsymbol{z}^{(i)}+(1-\lambda)\sum_{i=k+1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda}\boldsymbol{z}^{(i)}.\end{aligned}$$

因为A为凸集，$\boldsymbol{z}^{(i)}\in A$，$i=1$，…，$k$，所以存在$\boldsymbol{x}\in A$，使

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda}\boldsymbol{z}^{(i)}.$$

同样，存在$\boldsymbol{y}\in B$，使

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=k+1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda}\boldsymbol{z}^{(i)}.$$

于是 $\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$，因而 $\boldsymbol{z}\in\lambda A+(1-\lambda)B$，由此可得

$$\mathrm{co}(A\cup B)\subset\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}[\lambda A+(1-\lambda)B].$$

综合1°与2°，命题得证.

1.1.3 凸多面体

V中有限点集$A=\{\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(m)}\}$的凸包记为$\mathrm{co}(\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(m)})$. 因为$A$中任意子集的凸组合都可以看作这$m$个点的凸组合，所以由定理1.1.2可得

$$\operatorname{co}(x^{(1)}, \cdots, x^{(m)})=\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} \middle| \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\right\}. \tag{1.1-2}$$

由此可引出以下定义.

定义 1.1.4 有限点集$A=\{x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}\}$的凸包$\operatorname{co}(x^{(1)}, \cdots, x^{(m)})$称为由$x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$生成的**凸多面体**(convex polyhedron). $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$称为凸多面体的**生成元**.

定义 1.1.5 设$C=\operatorname{co}(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$，而$a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}$中任何一个都不能表示为其余生成元的凸组合，则称$a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}$为**凸多面体的顶点**(vertex).

在图1-2中点$a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$是凸多面体$C$的顶点，而点$a^{(5)}$不是顶点.

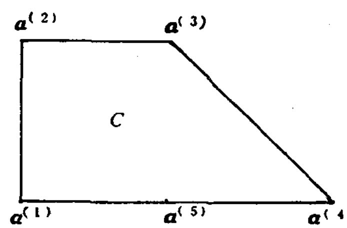

图 1-2

定理 1.1.4 一个凸多面体的顶点集是唯一确定的.

证 设某一凸多面体有两组顶点：$a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$和$b^{(1)}, \cdots, b^{(m)}$. 因为$a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$为一组顶点，所以$\forall j \in \{1, \cdots, m\}$均有

$$b^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a^{(i)}, \quad \lambda_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1. \tag{1.1-3}$$

又因为$b^{(1)}, \cdots, b^{(m)}$为一组顶点，所以$\forall i \in \{1, \cdots, n\}$均有

$$a^{(i)} = \sum_{t=1}^{m} \mu_{it} b^{(t)}, \quad \mu_{it} \geqslant 0, \quad \sum_{t=1}^{m} \mu_{it} = 1. \tag{1.1-4}$$

将$a^{(i)}$的表达式代入式(1.1-3)，整理之得

$$\begin{aligned} b^{(j)} = & (\lambda_{1j}\mu_{11} + \cdots + \lambda_{nj}\mu_{n1}) b^{(1)} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (\lambda_{1j}\mu_{1m} + \cdots + \lambda_{nj}\mu_{nm}) b^{(m)}. \end{aligned}$$

在上式中等号右端$b^{(1)}$，…，$b^{(m)}$的系数非负，且和为1，而且等式右端$b^{(j)}$的系数必为1．否则，$b^{(j)}$就可以表示为这组顶点中其余元素的凸组合．这与$b^{(1)}$，…，$b^{(m)}$为一组顶点矛盾．于是有

$$\lambda_{1j}\mu_{1j}+\cdots+\lambda_{nj}\mu_{nj}=1. \tag{1.1-5}$$

倘若 $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$均有$\mu_{kj}<1$，则

$$\lambda_{1j}\mu_{1j}+\cdots+\lambda_{nj}\mu_{nj}<\lambda_{1j}+\cdots+\lambda_{nj}=1,$$

这与式(1.1-5)矛盾．所以必有某个k，使$u_{kj}=1$．由式(1.1-4)得$u_{kt}=0$，$t\neq j$，于是得$a^{(k)}=b^{(j)}$．因而

$$b^{(j)}\in\{a^{(1)},\cdots,a^{(n)}\},\ \forall j\in\{1,\cdots,m\}.$$

同理可得

$$a^{(i)}\in\{b^{(1)},\cdots,b^{(m)}\},\ \forall i\in\{1,\cdots,n\}.$$

综上所述得

$$\{a^{(1)},\cdots,a^{(n)}\}=\{b^{(1)},\cdots,b^{(m)}\}.$$

§1.2 仿射集·仿射包·单纯形

在线性代数中线性子空间与向量组的线性相关性都是重要内容．在凸分析中和它们对应的内容有仿射集与点的仿射相关性．

1.2.1 仿射集与仿射包

定义 1.2.1 设L是V的一个线性子空间，$a\in V$，则L沿a的平移$L+a$称为V的一个**仿射集**（affine set）．

仿射集$L+a$的维数等于线性子空间L的维数，即 $\dim(L+a)=\dim(L)$．

定义 1.2.2 设$A\subset V$．V中所有包含A的仿射集之交称为**A的仿射包**（affine hull），记为$\mathrm{aff}(A)$．

A的维数定义为$\mathrm{aff}(A)$的维数，即

$$\dim(A)=\dim(\mathrm{aff}(A)).$$

定义 1.2.3 设$x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}\in V$，$\lambda_i\in\mathscr{R}$，$\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$．则称$x=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}$为$x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}$的仿射组合．

关于仿射集与仿射包有以下重要性质．

定理 1.2.1 设$M\subset V$，则M是仿射集等价于M包含通过任意两点$x, y\in M$的直线，即

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in M,\ \forall\lambda\in\mathscr{R}.$$

证 1° 设M是仿射集，即$M=L+a$，其中$a\in V$，$L\subset V$是某个线性子空间．

再设$x, y\in M$，即存在$x^{(1)}, y^{(1)}\in L$，使$x=x^{(1)}+a$，$y=y^{(1)}+a$，因而$\forall\lambda\in\mathscr{R}$有

$$\lambda x+(1-\lambda)y=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)y^{(1)}+a,$$

而 $z=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)y^{(1)}\in L$，所以$\lambda x+(1-\lambda)y\in M$．

2° 假设 $\forall x, y\in M$，$\forall\lambda\in\mathscr{R}$均有

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in M.$$

设$a\in M$，令$L=M-a$，再设$\overline{x}, \overline{y}\in L$，即存在$x^{(1)}, y^{(1)}\in M$，使$\overline{x}=x^{(1)}-a$，$\overline{y}=y^{(1)}-a$，$\forall\lambda\in\mathscr{R}$均有

$$\lambda\overline{x}=\lambda(x^{(1)}-a)=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)a-a.$$

因为 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)a\in M$，所以$\lambda\overline{x}\in L$，$\forall\lambda\in\mathscr{R}$．

另一方面有

$$\frac{1}{2}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{y}=\frac{1}{2}x^{(1)}+\left(1-\frac{1}{2}\right)y^{(1)}-a,$$

由假设及$x^{(1)}, y^{(1)}\in M$可得$\frac{1}{2}x^{(1)}+(1-\frac{1}{2})y^{(1)}\in M$，

所以$\frac{1}{2}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{y}\in L$．于是

$$\bar{x}+\bar{y}=2\left(\frac{1}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{y}\right)\in L.$$

综上所述，L是线性子空间．于是，$M=L+\boldsymbol{a}$是仿射集．

以上证明是在$M\neq\Phi$的条件下进行的，若$M=\Phi$，则命题显然正确．

推论1　设M_1，…，$M_k\subset V$均为仿射集，则交集$M=\bigcap\limits_{i=1}^{k}M_i$是仿射集．

证　设$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in M$，$\lambda\in\mathscr{R}$．因为M_i为仿射集，而且$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in M_i$，$i=1$，…，$k$，所以

$$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in M_i,\quad i=1,\ \cdots,\ k.$$

因而　$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in M$．于是$M$为仿射集．

注　若M为单点集$\{\boldsymbol{x}\}$，则通过M中任意两点$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$的直线$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$　退化为一点$\boldsymbol{x}$．

推论2　若M是仿射集，则M必为凸集．

定理 1.2.2　设$A\subset V$，则A的仿射包$\mathrm{aff}(A)$等于A中元素的有限仿射组合的全体．

（证明从略，可参阅定理1.1.2的证明）

有限点集$A=\{\boldsymbol{x}^{(1)}$，…，$\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的仿射包记为$\mathrm{aff}(\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\cdots\boldsymbol{x}^{(k)})$．若$A=\{\boldsymbol{a}\}$，则$\mathrm{aff}(A)=\mathrm{aff}(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{a}\}$．若$A=\{\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\}$，而且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则$\mathrm{aff}(\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b})$是通过$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的直线：

$$\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b},\ \forall\lambda\in\mathscr{R}.$$

若$A=\{\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\}$，而且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共线，则$\mathrm{aff}(\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c})$是由$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$三点决定的平面：

$$\lambda\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+(1-\lambda-\beta)\boldsymbol{c},\ \forall\lambda,\ \beta\in\mathscr{R}.$$

一般地有（依定理1.2.2）

$$\mathrm{aff}(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^{(m)})=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}\,\middle|\,\lambda_i\in\mathscr{R},\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\right\}.\tag{1.2-1}$$