高等学校交流讲义

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

黄 正 中 编

人民教育出版社

高等学校交流講义

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

黄正中编

人民教育出版社

本书系根据编者在南京大学物理系一、二年級讲授高等数学的讲稿修改而成，分上下两册出版。上册內容包括平面解析几何、函数和极限、一元函数的微分学、不定积分、定积分、无穷級数。下册內容包括空間解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲綫积分和曲面积分、矢量分析和場論、一阶常微分方程、高阶綫性方程、一阶偏微分方程、行列式和矩陣、綫性方程組和矢量空間、矩陣代数和綫性变换、酉空間和二次齐式等。

本书可作为綜合大学、高等师范学校物理各专业高等数学課程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

高 等 数 学

下 册

黃 正 中 編

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·971 开本 850×1168 1/32 印張 12 11/16

字数 290000 印数 20,001—35,000 定价(6)￥1.20

1961年8月第1版 1961年11月北京第2次印刷

下册目录

第七章　空間解析几何，矢量

§76　空間的直角坐标系

要确定空間一点的位置，可在空間建立直角坐标系，其法为先在空間取一定点 O，称曰**原点**，过 O 作三条相互正交的有向直綫 $X'OX, Y'OY, Z'OZ$ 顺次称为 x 軸，y 軸，z 軸①另取一綫段 U 作为量长单位；于是原点 O，三条坐标軸，及单位长 U 組成空間的一个直角坐标系 S，为方便起見，今后称平面 $(X'OX, Y'OY)$ 为 xy 平面，平面 $(Y'OY, Z'OZ)$ 为 yz 平面，平面 $(Z'OZ, X'OX)$ 为 ZX 平面，并統称为**坐标面**，三个坐标面分整个空間为八个部分，每一部分称为一个挂限；在每一条坐标軸上，以 O 为原点，U 为单位长建立坐标系，設 M 为空間任意一点，过 M 作三平面分别平行于 yz 平面，zx 平面，xy 平面，这三平面各自交 x 軸，y 軸，z 軸于三点 A, B, C，設 A 在 x 軸上的坐标为 x，B 在 y 軸上的坐标为 y，C 在 z 軸上的坐标为 z，则称 (x, y, z) 为点 M 在坐标系 S 上的**坐标**，显然，当坐标系 S 选定后，每一点有三个有序的实数 (x, y, z) 作为它的坐标；反之，每三个按一定顺序排列的实数 (x, y, z) 也在空間唯一地确定一点。这样，空間的点和有序的三实数 (x, y, z) 便建立一一对应了，为了表示空間一直綫的方向，还要定义空間两条

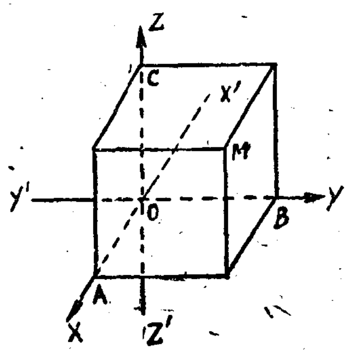

图 7-1

① 在物理上，坐标軸的正向常如此确定：使右手拇指同 x 軸同向，食指同 y 軸同向，则中指和 z 軸同向。

有向直綫 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的交角①，在直綫 AB 上取一点 O，自 O 作 OE 和 CD 平行，假定 $\overrightarrow{OE}$ 的指向和 $\overrightarrow{CD}$ 相同，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 的交角 θ 便認作是 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的交角。

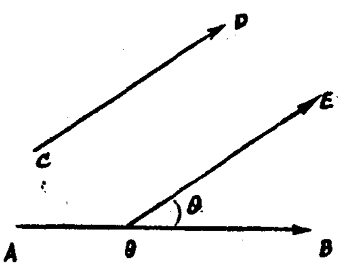

图 7-2

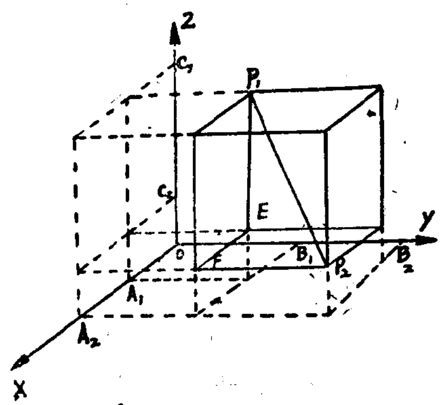

图 7-3

空間一条有向直綫 AB 和坐标軸 $\overrightarrow{X'X}, \overrightarrow{Y'Y}, \overrightarrow{Z'Z}$，的交角称为这直綫的方向角，順次以 α, β, γ 表之，当直綫 AB 的指向沒有肯定时，习惯上作如下的規定：

(i) 当：$\gamma\neq\frac{\pi}{2}$，則取 $0\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2}$；

(ii) 当：$\gamma=\frac{\pi}{2}$，$\beta\neq\frac{\pi}{2}$时，則取 $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$

(iii) 当：$\gamma=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$时，則 $AB\,/\!/\,x$ 軸，取 $\alpha=0$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为这直綫的方向余弦，給定空間两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，有向綫段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三条坐标軸上的射影为

$$x_2-x_1,\quad y_2-y_1,\quad z_2-z_1,$$

① CD 和 AB 可以沒有交点。

因此(見图 7-3)

$$\left.\begin{aligned} A_1A_2 &= x_2-x_1=|P_1P_2|\cos\alpha,\\ B_1B_2 &= y_2-y_1=|P_1P_2|\cos\beta,\\ C_1C_2 &= z_2-z_1=|P_1P_2|\cos\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

注意 $EF=A_1A_2,\quad FP_2=B_1B_2,\quad EP_1=C_2C_1,$

和 $$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |EP_1|^2+|EP_2|^2=|EP_1|^2+|EF|^2+|FP_2|^2\\ &= |A_1A_2|^2+|B_1B_2|^2+|C_1C_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \end{aligned}\tag{2}$$

便得 $$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\tag{3}$$

这就是两点間的距离公式，将(1)代入(2)，并消去$|P_1P_2|^2$得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这就是方向余弦之間的关系，注意由(1)有

$$\frac{x_2-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y_2-y_1}{\cos\beta}=\frac{z_2-z_1}{\cos\gamma}$$

通常若三实数 a, b, c 之比等于一直綫的三个方向余弦之比，便說这三数是此直綫的**方向数**，故 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, 就是直綫 P_1P_2 的方向数，从方向数 $a:b:c$ 找方向余弦，只要注意

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}=\frac{c}{\cos\gamma}=\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{1}$$

便知

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\tag{4}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

和平面解析几何一样，当三点 P_1, P_2, P 在一直綫上，我們称

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$$

为点 P 分綫段 P_1P_2 之比，若 P_1, P_2, P 的坐标順次为 (x_1, y_1), $(x_2,$

y_2)，(x, y)，則

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}.$$

因而

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{5}$$

特别是，綫段 P_1P_2 的中点的坐标为

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2) \tag{6}$$

关于直綫段在一直綫上的射影，下列定理显然成立。

定理 折綫 $P_1P_2\cdots P_n$ 的各段 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}\cdots\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ 在一条有向直綫 U 上射影之和等于 $\overrightarrow{P_1P_n}$ 在 U 上的射影。

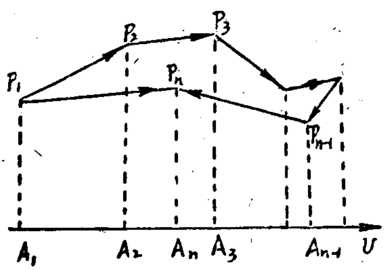

图 7-4

事实上，$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}=\overrightarrow{P_1P_n}$ 在直綫 U 上的射影。

利用这定理可以找出計算射影的公式;

設有向直綫 u(見图 7-5)的方向余弦为

$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma.$$

直綫段 P_1P_2 两端的坐标为

$$P_1(x_1, y_1, z_1)\quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

首先，自 P_1 作 $P_1B\perp xy$ 平面于 B，再自 B 作 $BA\perp x$ 軸于 A，于是

$$OA=x_1,\quad AB=y_1.$$

$$BP_1 = z_1$$

将 OP_1 在直綫 u 上的射影記作

$$\text{Proj}_u OP_1$$

則

$$\text{Proj}_u\overrightarrow{OP_1} = \text{Proj}_u\overrightarrow{OA} +$$
$$+ \text{Proj}_u\overrightarrow{AB} + \text{Proj}_u\overrightarrow{BP_1} =$$
$$= x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma,$$

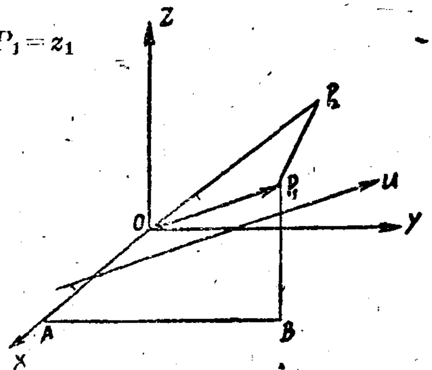

图 7-5

同理

$$\text{Proj}_u\overrightarrow{OP_2} = x_2\cos\alpha + y_2\cos\beta + z_2\cos\gamma,$$

而

$$\text{Proj}_u\overrightarrow{P_1P_2} = \text{Proj}_u\overrightarrow{OP_2} - \text{Proj}_u\overrightarrow{OP_1}$$
$$= (x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma \qquad (7)$$

故得

定理 給定两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 和一条有向直綫 u，若 u 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，則 P_1P_2 在直綫 u 上的射影为

$$(x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma$$

若 P_1P_2 的方向余弦为 $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, 它和直綫 u 的交角为 θ, 則有

$$x_2 - x_1 = |P_1P_2|\cos\alpha', \quad y_2 - y_1 = |P_1P_2|\cos\beta',$$
$$z_2 - z_1 = |P_1P_2|\cos\gamma'$$

另一面，$$\text{Proj}_u\overrightarrow{P_1P_2} = |P_1P_2|\cos\theta$$

代入(7)得 $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \qquad (8)$$

定理 3 設两条有向直綫 l, l' 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ 則 l 和 l' 的交角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

由此定理容易得到

推論　設两条直綫 l, l' 的方向数为 $a, b, c; a', b', c'$，則 l 和 l' 平行的条件为① $a:a'=b:b'=c:c'$；l 和 l' 正交的充要条件为 $aa'+bb'+cc'=0$，在一般情況，直綫 l 和 l' 的交角 θ 可用公式

$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

确定之。

事实上，注意 $\dfrac{\cos\alpha}{a}=\dfrac{\cos\beta}{b}=\dfrac{\cos\gamma}{c}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，

$$\frac{\cos\alpha'}{a'}=\frac{\cos\beta'}{b'}=\frac{\cos\gamma'}{c'}=\frac{1}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

代入定理 3 的公式，便得所証的結論。

§77　矢量代数

物理量有很多种，其中最常見的有两类；一类只有大小多寡，沒有方向；例如質量，时間，长度，能，热量等，我們称它为**数量**，另一类非但有大小；而且有方向；例如位移，速度，加速度，力，运动量等，我們称它为**矢量**（也称**向量**）。矢量用图形来表示时，它是一个带箭头的綫段，綫段的长短表示矢量的大小，箭头表示矢量的指向，綫段所在的直綫表示矢量的方向。通常用一个黑体拉丁字母，或两个拉丁字母附一箭头来表示一个矢量。例如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 等，根据物理上的要求，我們把矢量的运算定义如下：

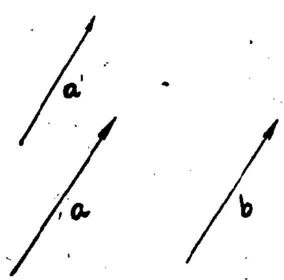

图　7-6

(1) **相等**　当两矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的大小相等，所在的直綫相同或平行，且指向相同便說

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}.$$

① 若 a, b, c 中有一个或两个等于 0 时，为了直綫 l 和 l' 平行，相应的 a', b', c' 也等于零。

这是因为說明一个物体的速度或加速度，只要指出它的大小、方向、指向便够了。

(2) **零矢量** 当矢量的大小为零时，便說它为**零矢量**，显然零矢量沒有一定的方向和指向(零矢量的引入，仅仅是为了运算的方便，在物理上矢量为零意味着这矢量根本不存在)。

(3) 当两矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的大小相等，所在的直綫相同或平行，但指向相反，便說 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，或 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$。

事实上，当一物体同时有速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$，它便靜止不动，換句話說，它的实际速度等于零。

(4) 当矢量 $\boldsymbol{a}$ 乘正数 λ，便得一矢量 $\lambda\boldsymbol{a}$，其大小为 $\boldsymbol{a}$ 的 λ 倍，其方向和指向与 $\boldsymbol{a}$ 相向，当 $\lambda<0$ 我們定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=-(-\lambda)\boldsymbol{a}$$

(5) 給定两矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两邻边，作平行四边形 $ABDC$，則对角綫 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这是因为物理上一切矢量的加法都符合这样的規定。注意 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，故

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$$

因此得矢量加法的另一法則：

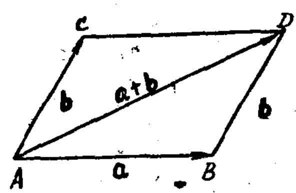

图 7-7

为了求得矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，只要在矢量 $\boldsymbol{a}$ 的終点作一矢量等于 $\boldsymbol{b}$，則由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的終点的有向綫段便是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

当然，这法則可推广到任何有限个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n$ 之和，而且矢量的加法滿足代数上的交換律和結合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

推論 給定矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 作折綫 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 使 $\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$.

則

$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=0$ 的充要条件为点 A_0 和 A_n 重合。

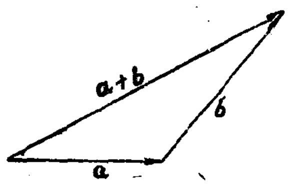

图 7-8

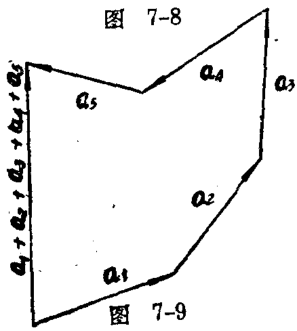

图 7-9

事实上，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=A_0A_n$.

在空間建立直角坐标系后，在三个坐标軸的正向各取一个单位長矢量，称为这坐标系的底矢量，今后以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$[①]表之，事实上，只要原点 O 和底矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 給定后，坐标系卽完全确定。

空間的任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 可分解为三个矢量 $a_1\boldsymbol{i}, a_2\boldsymbol{j}, a_3\boldsymbol{k}$ 之和：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

如图 7-10,

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB},\quad \overrightarrow{FB}=a_3\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED},\quad \overrightarrow{CE}=a_2\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{ED}=a_1\boldsymbol{i}$$

故
$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

此处 a_1, a_2, a_3 順次表示 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标軸上的射影。

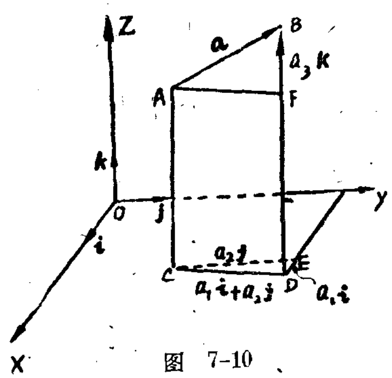

图 7-10

显然，$\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当

$$a_1=a_2=a_3=0.$$

因而任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 只有一种方式表示为

$$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

事实上，若

$$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=$$
$$=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

則

$$(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}=0.$$

---

① 一般的数学书上用符号 e_1, e_2, e_3 表示底矢量，以便推广到高維空間。

因此

$$a_1-b_1=0,\quad a_2-b_2=0,\quad a_3-b_3=0.$$

故当 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 时，我們說(a_1, a_2, a_3)是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，当 $\boldsymbol{a}$ 为单位长矢量时，a_1, a_2, a_3 便是它的方向余弦。

推論 当 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}.$$

事实上，由加法的交换律和結合律立即推出这結論。

(6) **数量积** 两矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数，它是等于 $\boldsymbol{b}$ 的长度 $|\boldsymbol{b}|$ 乘上 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的射影。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\ \mathrm{Proj}_b\ \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\ |\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

此处 θ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的交角①。

所以这样定义两个矢量的数量积，也是为了物理上的方便，事实上当用力 $\boldsymbol{F}$ 曳引物体使发生位移 $\boldsymbol{d}$，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W=\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{F}\text{ 在 }\boldsymbol{d}\text{ 上的射影})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}.$$

据数量积定义，立即得出下列結果

(i) $\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ （交换律）

事实上 $\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(ii) $\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ （分配律）

因矢量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的射影等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的射影加上 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的射影。

(iii) 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的坐标順次为(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3)

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

---

① 矢量数量积的定义只适用于两个矢量，例如 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 便沒有意义。

事实上，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

注意 $$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

和 $$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1.$$

对 $i, j=1,2,3$ 都成立，再应用分配律和交换律便知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

特别是 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$，矢量 $\boldsymbol{a}$ 之长为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

(7) **矢量积**　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一矢量 $\boldsymbol{c}$，其定义如下：

(i)　$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，此处 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，

(ii)　$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面正交，

(iii)　将右手的拇指，食指，中指竪成相互正交的位置，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别为拇指和食指的指向，則中指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的指向。換句話說，当自 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的轉向和右轉螺紋相同时，$\boldsymbol{c}$ 的指向恰好是螺旋前进的方向。

这样定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 后，讀者不难看出：

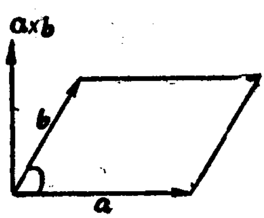

图　7-11

(a)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(b)　$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两邻边所成平行四边形的面积。

(c)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ 时，有三种可能情况：

$\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行

矢量积的定义也来自物理，因为当力 $\boldsymbol{F}$ 作用在一物体上，自一点 O 引一綫段 OA 到力 $\boldsymbol{F}$ 所在的直綫上，則力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 所产生的力矩

$$\boldsymbol{L}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}$$

事实上，自 O 作 $OB\perp AF$ 于 B，