

高等学校交流讲义

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

下 册

黄 正 中 编

人民教育出版社

高等学校交流讲义



高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

黄正中编

人民教育出版社

本书系根据编者在南京大学物理系一、二年级讲授高等数学的讲稿修改而成，分上下两册出版。上册内容包括平面解析几何、函数和极限、一元函数的微分学、不定积分、定积分、无穷级数。下册内容包括空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和面积分、矢量分析和场论、一阶常微分方程、高阶线性方程、一阶偏微分方程、行列式和矩阵、线性方程组和向量空间、矩阵代数和线性变换、酉空间和二次齐式等。

本书可作为综合大学、高等师范学校物理各专业高等数学课程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

## 高等数学

### 下 册

黄 正 中 编

(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13010·971 开本 850×1168  $1/32$  印张 12  $11/16$

字数 299,000 印数 20,001—35,000 定价(0)¥1.20

1961年8月第1版 1961年11月北京第2次印刷

## 下册目录

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 第七章 空間解析几何, 矢量             | 283 |
| § 76 空間的直角坐标系              | 283 |
| § 77 矢量代数                  | 288 |
| § 78 三級行列式的性质              | 297 |
| § 79 平面的方程                 | 302 |
| § 80 自平面到一点的距离             | 304 |
| § 81 直綫的方程                 | 307 |
| § 82 直綫和平面的关系              | 308 |
| § 83 二次曲面                  | 312 |
| § 84 坐标軸的变换                | 320 |
| § 85 一般二次曲面方程的化簡           | 323 |
| § 86 矢量函数的微商               | 325 |
| § 87 空間曲綫的几何学              | 329 |
| 第八章 多元函数的微分学               | 334 |
| § 88 二元函数的极限和連續性           | 334 |
| § 89 偏微商的定义                | 338 |
| § 90 函数 $f(x, y)$ 的全微分     | 340 |
| § 91 全微分在近似計算中的应用          | 342 |
| § 92 复合函数的微分法              | 344 |
| § 93 曲面 $z = f(x, y)$ 的切平面 | 348 |
| * § 94 齐次函数与欧拉定理           | 350 |
| § 95 函数 $f(x, y)$ 的方向微商    | 355 |
| § 96 隐函数的微分                | 358 |
| § 97 变数的变换                 | 364 |
| § 98 高級偏微商                 | 369 |
| § 99 高級微分                  | 371 |
| § 100 多元函数的泰勒展式            | 372 |
| § 101 二元函数的极大值和极小值         | 374 |
| § 102 二元函数极大值与极小值的充分条件     | 380 |
| § 103 曲面的参数方程              | 381 |
| § 104 包絡綫, 包絡面             | 383 |
| 第九章 重积分                    | 390 |
| § 105 含参变量的定积分             | 390 |

|       |                                                                                     |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 106 | 累次积分的几何意义与物理意义                                                                      | 394 |
| § 107 | 二重积分的解析定义及其简单性质                                                                     | 397 |
| § 108 | 用极坐标来求重积分                                                                           | 405 |
| § 109 | 曲面的面积                                                                               | 408 |
| § 110 | 三重积分                                                                                | 410 |
| § 111 | 利用球面坐标和柱面坐标计算三重积分                                                                   | 414 |
| § 112 | 立体的质量中心                                                                             | 417 |
| § 113 | 转动惯量                                                                                | 419 |
| 第十章   | 曲线积分, 曲面积分                                                                          | 424 |
| § 114 | 曲线积分                                                                                | 424 |
| § 115 | 格林公式                                                                                | 431 |
| § 116 | 二重积分的变换公式                                                                           | 434 |
| § 117 | 平面上曲线积分与路线无关的条件                                                                     | 439 |
| § 118 | 恰当微分方程                                                                              | 443 |
| § 119 | 曲面积分                                                                                | 446 |
| § 120 | 立体角                                                                                 | 454 |
| § 121 | 三维空间的格林公式                                                                           | 456 |
| § 122 | 斯托克斯公式                                                                              | 460 |
| § 123 | 空间曲线积分与路线无关的条件                                                                      | 464 |
| 第十一章  | 矢量分析                                                                                | 467 |
| § 124 | 矢量场                                                                                 | 467 |
| § 125 | 矢量分析的若干公式                                                                           | 469 |
| § 126 | 用矢量分析的符号来表示高斯定理和斯托克斯定理                                                              | 473 |
| § 127 | 在正交曲线坐标系下 $\nabla\varphi$ , $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 和 $\nabla\times\mathbf{A}$ 的表达式 | 476 |
| § 128 | 散度和旋度的物理意义                                                                          | 482 |
| 第十二章  | 反常积分                                                                                | 487 |
| § 129 | 再论含参变量的积分                                                                           | 487 |
| § 130 | 被积函数不是有界的反常积分                                                                       | 492 |
| § 131 | 积分区间不是有界的反常积分                                                                       | 499 |
| § 132 | 函数 $T(x)$ 与 $B(\alpha, \beta)$                                                      | 504 |
|       | 附录: 反常积分的一致收敛性                                                                      | 509 |
| § 133 | 一致收敛性的定义和判别法                                                                        | 509 |
| § 134 | 一致收敛性的应用                                                                            | 511 |
| 第十三章  | 一阶常微分方程                                                                             | 522 |
| § 135 | 引论                                                                                  | 522 |
| § 136 | 微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的解的存在定理                                              | 524 |
| § 137 | 高次一阶方程 $f(x, y, y') = 0$                                                            | 528 |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| § 138 常微分方程組的存在定理                          | 533 |
| § 139 应用問題                                 | 536 |
| § 140 微分方程的級数解法                            | 541 |
| § 141 微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的数值解法 | 543 |
| 第十四章 高阶常微分方程                               | 549 |
| § 142 高阶常微分方程的存在定理                         | 549 |
| § 143 綫性微分方程的一般性質                          | 550 |
| § 144 函数的綫性相关                              | 552 |
| § 145 二阶綫性方程的若干特殊性質                        | 557 |
| § 146 参数变易法                                | 559 |
| § 147 常系数綫性齐次方程                            | 562 |
| § 148 常系数非齐次綫性方程                           | 565 |
| § 149 微分方程組                                | 569 |
| 第十五章 一阶偏微分方程                               | 578 |
| § 150 全微分方程                                | 578 |
| § 151 一阶綫性齐次方程                             | 582 |
| § 152 一阶綫性非齐次方程                            | 585 |
| § 153 一阶非綫性方程                              | 588 |
| § 154 微分方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 的哥犀問題    | 593 |
| 第十六章 行列式和矩陣                                | 596 |
| § 155 行列式的定义                               | 596 |
| § 156 行列式的主要性質                             | 599 |
| § 157 子行列式, 代数余式                           | 604 |
| § 158 行列式的乘法                               | 609 |
| § 159 矩陣和矩陣的秩                              | 612 |
| 第十七章 綫性方程組, 向量空間                           | 617 |
| § 160 克兰姆定理                                | 617 |
| § 161 綫性非齐次方程組                             | 619 |
| § 162 綫性齐次方程組                              | 622 |
| § 163 向量空間的定义                              | 625 |
| § 164 向量空間的維数                              | 626 |
| § 165 向量空間的理論在綫性方程組上的应用                    | 630 |
| 第十八章 矩陣代数, 綫性变换                            | 634 |
| § 166 矩陣运算的基础                              | 634 |
| § 167 方陣乘积的秩                               | 637 |
| § 168 各种相关的和特殊的方陣                          | 638 |
| § 169 厄密特方陣和酉方陣                            | 641 |

|       |                    |     |
|-------|--------------------|-----|
| § 170 | 向量空間的坐标变换          | 643 |
| § 171 | 綫性变换的定义            | 645 |
| § 172 | 綫性变换的性质            | 647 |
| § 173 | 綫性变换的化簡            | 649 |
| § 174 | 特征根和特征矢量的性质        | 653 |
| 第十九章  | 欧几里德空間, 酉空間, 二次齐式  | 657 |
| § 175 | $n$ 維欧几里德空間和酉空間    | 657 |
| § 176 | 酉空間法正交底的变换         | 659 |
| § 177 | 酉空間的酉变换            | 663 |
| § 178 | 厄密特方阵、酉方阵的特征根和特征矢量 | 665 |
| § 179 | 不变子空間              | 667 |
| § 180 | 实二次齐式的化簡           | 672 |
| § 181 | 厄密特式               | 679 |

## 第七章 空間解析几何, 矢量

### §76 空間的直角坐标系

要确定空間一点的位置, 可在空間建立直角坐标系, 其法为先在空間取一定点  $O$ , 称曰原点, 过  $O$  作三条相互正交的有向直綫  $X'OX, Y'OY, Z'OZ$  順次称为  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸<sup>①</sup> 另取一綫段  $U$  作为量长单位; 于是原点  $O$ , 三条坐标軸, 及单位长  $U$  組成空間的一个直角坐标系  $S$ , 为方便起见, 今后称平面  $(X'OX, Y'OY)$  为  $xy$  平面, 平面  $(Y'OY, Z'OZ)$  为  $yz$  平面, 平面  $(Z'OZ, X'OX)$  为  $zx$  平面, 并統称为坐标面, 三个坐标面分整个空間为八个部分, 每一部分称为一个挂限; 在每一条坐标軸上, 以  $O$  为原点,  $U$  为单位长建立坐标系, 設  $M$  为空間任意一点, 过  $M$  作三平面分别

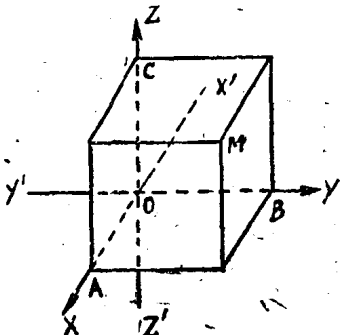


图 7-1

平行于  $yz$  平面,  $zx$  平面,  $xy$  平面, 这三平面各自交  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸于三点  $A, B, C$ , 設  $A$  在  $x$  軸上的坐标为  $x$ ,  $B$  在  $y$  軸上的坐标为  $y$ ,  $C$  在  $z$  一軸上的坐标为  $z$ , 則称  $(x, y, z)$  为点  $M$  在坐标系  $S$  上的坐标, 显然, 当坐标系  $S$  选定后, 每一点有三个有序的实数  $(x, y, z)$  作为它的坐标; 反之, 每三个按一定順序排列的实数  $(x, y, z)$  也在空間唯一地确定一点。这样, 空間的点和有序的三实数  $(x, y, z)$  便建立一一对应了, 为了表示空間一直綫的方向, 还要定义空間两条

<sup>①</sup> 在物理上, 坐标軸的正向常如此确定: 使右手拇指同  $x$  軸同向, 食指同  $y$  軸同向, 则中指和  $z$  軸同向。

有向直綫  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{CD}$  的交角<sup>①</sup>, 在直綫  $AB$  上取一点  $O$ , 自  $O$  作  $OE$  和  $CD$  平行, 假定  $\overrightarrow{OE}$  的指向和  $\overrightarrow{CD}$  相同,  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{OE}$  的交角  $\theta$  便認作是  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{CD}$  的交角。

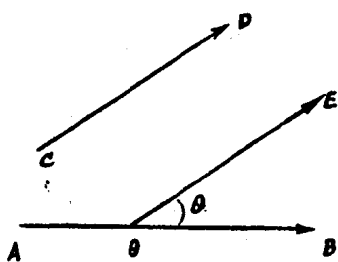


图 7-2

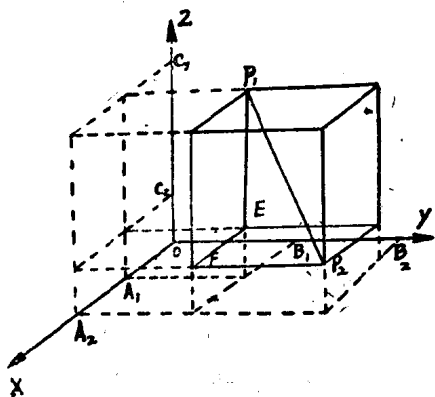


图 7-3

空間一条有向直綫  $AB$  和坐标軸  $\overrightarrow{X'X}$ ,  $\overrightarrow{Y'Y}$ ,  $\overrightarrow{Z'Z}$  的交角称为这直綫的方向角, 順次以  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  表之, 当直綫  $AB$  的指向沒有肯定时, 习惯上作如下的規定:

(i) 当:  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , 則取  $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$ ;

(ii) 当:  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$  时, 則取  $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ ;

(iii) 当:  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  时, 則  $AB \parallel x$  軸, 取  $\alpha = 0$

$\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  称为这直綫的方向余弦, 給定空間两点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , 有向綫段  $\overrightarrow{P_1P_2}$  在三条坐标軸上的射影为

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1,$$

①  $CD$  和  $AB$  可以沒有交点。

因此(見圖 7-3)

$$\left. \begin{aligned} A_1A_2 &= x_2 - x_1 = |P_1P_2| \cos\alpha, \\ B_1B_2 &= y_2 - y_1 = |P_1P_2| \cos\beta, \\ C_1C_2 &= z_2 - z_1 = |P_1P_2| \cos\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

注意  $EF = A_1A_2$ ,  $FP_2 = B_1B_2$ ,  $EP_1 = C_2C_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{和 } |P_1P_2|^2 &= |EP_1|^2 + |EP_2|^2 = |EP_1|^2 + |EF|^2 + |FP_2|^2 \\ &= |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{便得 } |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (3)$$

这就是两点間的距离公式, 將(1)代入(2), 并消去  $|P_1P_2|^2$  得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

这就是方向余弦之間的关系, 注意由(1)有

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2 - z_1}{\cos\gamma}$$

通常若三实数  $a, b, c$  之比等于一直綫的三个方向余弦之比, 便說这三数是此直綫的方向数, 故  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ , 就是直綫  $P_1P_2$  的方向数, 从方向数  $a:b:c$  找方向余弦, 只要注意

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = \frac{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{1}$$

便知

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \cos\beta &= \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

和平面解析几何一样, 当三点  $P_1, P_2, P$  在一直綫上, 我們称

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$$

为点  $P$  分綫段  $P_1P_2$  之比, 若  $P_1, P_2, P$  的坐标順次为  $(x_1, y_1), (x_2,$

$y_2), (x, y),$  則

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

因而

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (5)$$

特别是, 綫段  $P_1P_2$  的中点的坐标为

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad (6)$$

关于直綫段在一直綫上的射影, 下列定理显然成立。

**定理** 折綫  $P_1P_2 \cdots P_n$  的各段  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \cdots, \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$  在一条有向直綫  $U$  上射影之和等于  $\overrightarrow{P_1P_n}$  在  $U$  上的射影。

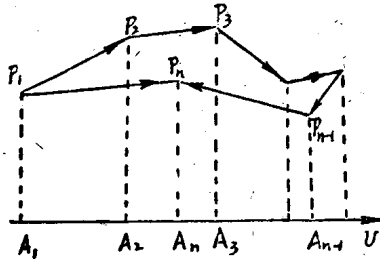


图 7-4

事实上,  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$  在直綫  $U$  上的射影。

利用这定理可以找出計算射影的公式;

設有向直綫  $u$  (见图 7-5) 的方向余弦为

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$$

直綫段  $P_1P_2$  两端的坐标为

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

首先, 自  $P_1$  作  $P_1B \perp xy$  平面于  $B$ , 再自  $B$  作  $BA \perp x$  軸于  $A$ , 于是

$$OA = x_1, \quad AB = y_1.$$

將  $OP_1$  在直線  $u$  上的射影記作

$$\text{Proj}_u OP_1$$

則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{Proj}_u OP_1} &= \overrightarrow{\text{Proj}_u OA} + \\ &+ \overrightarrow{\text{Proj}_u AB} + \overrightarrow{\text{Proj}_u BP_1} = \\ &= x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma,\end{aligned}$$

同理

$$\overrightarrow{\text{Proj}_u OP_2} = x_2 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma,$$

而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{Proj}_u P_1 P_2} &= \overrightarrow{\text{Proj}_u OP_2} - \overrightarrow{\text{Proj}_u OP_1} \\ &= (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \cos \gamma\end{aligned}\quad (7)$$

故得

**定理** 給定兩點  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  和一條有向直線  $u$ , 若  $u$  的方向余弦為  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , 則  $P_1 P_2$  在直線  $u$  上的射影為

$$(x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \cos \gamma$$

若  $P_1 P_2$  的方向余弦為  $\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$ , 它和直線  $u$  的交角為  $\theta$ , 則有

$$x_2 - x_1 = |P_1 P_2| \cos \alpha', \quad y_2 - y_1 = |P_1 P_2| \cos \beta',$$

$$z_2 - z_1 = |P_1 P_2| \cos \gamma'$$

另一面,

$$\overrightarrow{\text{Proj}_u P_1 P_2} = |P_1 P_2| \cos \theta$$

$$\text{代入(7)得} \quad \cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \quad (8)$$

**定理 3** 設兩條有向直線  $l, l'$  的方向余弦為  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma; \cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$  則  $l$  和  $l'$  的交角  $\theta$  的余弦為

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

由此定理容易得到

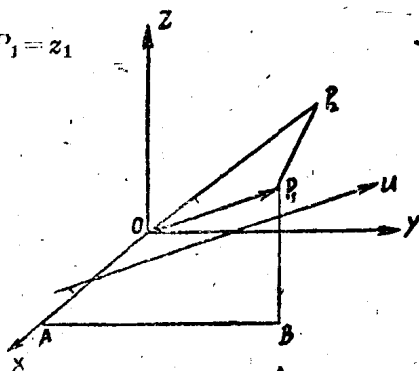


圖 7-5

**推論** 設两条直綫  $l, l'$  的方向数为  $a, b, c; a', b', c'$ , 則  $l$  和  $l'$  平行的条件为<sup>①</sup>  $a:a'=b:b'=c:c'$ ;  $l$  和  $l'$  正交的充要条件为  $aa' + bb' + cc' = 0$ , 在一般情况, 直綫  $l$  和  $l'$  的交角  $\theta$  可用公式

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

确定之。

事实上, 注意  $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\frac{\cos\alpha'}{a'} = \frac{\cos\beta'}{b'} = \frac{\cos\gamma'}{c'} = \frac{1}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

代入定理 3 的公式, 使得所証的結論。

## § 77 矢量代数

物理量有很多种, 其中最常見的有两类; 一类只有大小多寡, 沒有方向; 例如质量, 時間, 长度, 能, 热量等, 我們称它为**数量**, 另一类非但有大小; 而且有方向; 例如位移, 速度, 加速度, 力, 运动量等, 我們称它为**矢量**(也称**向量**)。矢量用图形来表示时, 它是一个带箭头的綫段, 綫段的长短表示矢量的大小, 箭头表示矢量的指向, 綫段所在的直綫表示矢量的方向。通常用一个黑体拉丁字母,

或两个拉丁字母附一箭头来表示一个矢量。例如  $a, b, c, \vec{AB}, \vec{CD}$  等, 根据物理上的要求, 我們把矢量的运算定义如下:

(1) **相等** 当两矢量  $a, b$  的大小相等, 所在的直綫相同或平行, 且指向相同便說

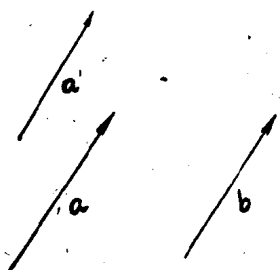


图 7-6

$$a = b.$$

<sup>①</sup> 若  $a, b, c$  中有一个或两个等于 0 时, 为了直綫  $l$  和  $l'$  平行, 相应的  $a', b', c'$  也等于零。

这是因为说明一个物体的速度或加速度,只要指出它的大小、方向、指向便够了。

(2) **零矢量** 当矢量的大小为零时,便说它为零矢量,显然零矢量没有一定的方向和指向(零矢量的引入,仅仅是为了运算的方便,在物理上,矢量为零意味着这矢量根本不存在)。

(3) 当两矢量  $a, b$  的大小相等,所在的直线相同或平行,但指向相反,便说  $a = -b$ , 或  $a + b = 0$ 。

事实上,当一物体同时有速度  $a$  和  $-a$ , 它便静止不动,换句话说,它的实际速度等于零。

(4) 当矢量  $a$  乘正数  $\lambda$ , 便得一矢量  $\lambda a$ , 其大小为  $a$  的  $\lambda$  倍, 其方向和指向与  $a$  相向, 当  $\lambda < 0$  我们定义

$$\lambda a = -(-\lambda)a$$

(5) 给定两矢量  $a, b$  以  $a, b$  为两邻边, 作平行四边形  $ABDC$ , 则对角线  $\overrightarrow{AD}$  表示  $a + b$ , 这是因为物理上一切矢量的加法都符合这样的规定。注意  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = b$ , 故

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = a + b = \overrightarrow{AD}$$

因此得矢量加法的另一法则:

为了求得矢量  $a$  与  $b$  之和  $a + b$ , 只要在矢量  $a$  的终点作一矢量等于  $b$ , 则由  $a$  的起点到  $b$  的终点的有向线段便是  $a + b$ 。

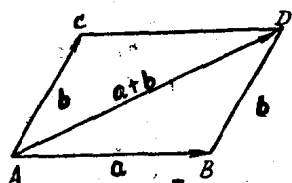


图 7-7

当然, 这法则可推广到任何有限个矢量  $a, a_2 \cdots a_n$  之和, 而且矢量的加法满足代数上的交换律和结合律:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

**推论** 给定矢量  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  作折线  $A_0 A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$  使  $\overrightarrow{A_0 A_1} = a_1, \overrightarrow{A_1 A_2} = a_2, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = a_n$ .

则

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$  的充要条件为点  $A_0$  和  $A_n$  重合。

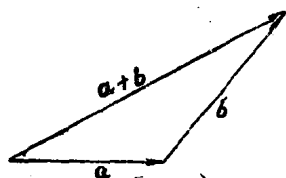


图 7-8

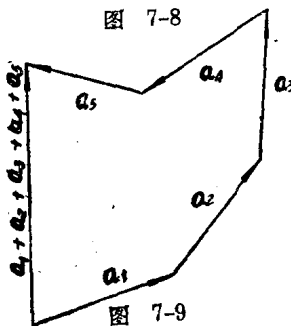


图 7-9

事实上,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_0 A_n$ .

在空間建立直角坐标系后, 在三个坐标軸的正向各取一个单位长矢量, 称为这坐标系的底矢量, 今后以  $i, j, k$ <sup>①</sup> 表之, 事实上, 只要原点  $O$  和底矢量  $i, j, k$  給定后, 坐标系即完全确定。

空間的任何矢量  $a$  可分解为三个矢量  $a_1 i, a_2 j, a_3 k$  之和:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

如图 7-10,

$$a = \vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FB}, \quad \vec{FB} = a_3 k,$$

$$\vec{AF} = \vec{CD} = \vec{CE} + \vec{ED}, \quad \vec{CE} = a_2 j, \quad \vec{ED} = a_1 i$$

故

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k.$$

此处  $a_1, a_2, a_3$  順次表示  $a$  在三个坐标軸上的射影。

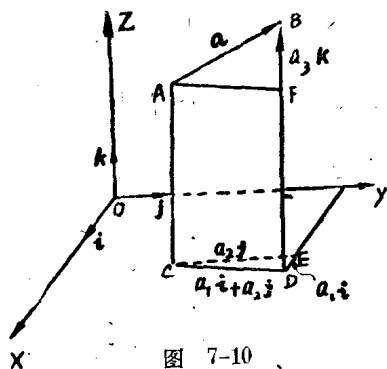


图 7-10

显然,  $a=0$  当且仅当

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

因而任何矢量  $a$  只有一种方式表示为

$$a_1 i + a_2 j + a_3 k.$$

事实上, 若

$$\begin{aligned} a_1 i + a_2 j + a_3 k &= \\ &= b_1 i + b_2 j + b_3 k. \end{aligned}$$

則

$$(a_1 - b_1) i + (a_2 - b_2) j + (a_3 - b_3) k = 0.$$

① 一般的数学书上用符号  $e_1, e_2, e_3$  表示底矢量, 以便推广到高維空間。

因此

$$a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \quad a_3 - b_3 = 0.$$

故当  $a = a_1i + a_2j + a_3k$  时, 我們說  $(a_1, a_2, a_3)$  是向量  $a$  的坐标, 当  $a$  为单位长向量时,  $a_1, a_2, a_3$  便是它的方向余弦。

推論 当  $a = a_1i + a_2j + a_3k, b = b_1i + b_2j + b_3k$  則

$$a + b = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k.$$

事实上, 由加法的交换律和結合律立即推出这結論。

(6) 数量积 两向量  $a, b$  的数量积  $a \cdot b$  是一个实数, 它是等于  $b$  的长度  $|b|$  乘上  $a$  在  $b$  上的射影。

$$a \cdot b = |b| \operatorname{Proj}_b a = |b| |a| \cos \theta$$

此处  $\theta$  表示  $a$  和  $b$  的交角<sup>①</sup>。

所以这样定义两个向量的数量积, 也是为了物理上的方便, 事实上当用力  $F$  曳引物体使发生位移  $d$ , 力  $F$  所做的功

$$W = d \times (F \text{ 在 } d \text{ 上的射影}) = F \cdot d.$$

据数量积定义, 立即得出下列結果

$$(i) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{交换律})$$

$$\text{事实上} \quad a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = b \cdot a$$

$$(ii) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{分配律})$$

因向量  $b + c$  在  $a$  上的射影等于  $b$  在  $a$  上的射影加上  $c$  在  $a$  上的射影。

$$(iii) \text{ 当 } a, b \text{ 的坐标順次为 } (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$$

則

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

① 向量数量积的定义只适用于两个向量, 例如  $a \cdot b \cdot c$  便沒有意义。

事实上,  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

注意

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

和

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1.$$

对  $i, j = 1, 2, 3$  都成立, 再应用分配律和交换律便知

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

特别是  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ , 矢量  $\mathbf{a}$  之长为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

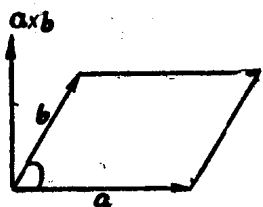
(7) 矢量积 两矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的矢量积  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  为一矢量  $\mathbf{c}$ , 其定义如下:

(i)  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , 此处  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  表示  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角,

(ii)  $\mathbf{c}$  和  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  所确定的平面正交,

(iii) 将右手的拇指, 食指, 中指竖成相互正交的位置, 当  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  分别为拇指和食指的指向, 则中指的指向就是  $\mathbf{c}$  的指向。换句话说, 当自  $\mathbf{a}$  到  $\mathbf{b}$  的转向和右螺旋纹相同时,  $\mathbf{c}$  的指向恰好是螺旋前进的方向。

这样定义  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  后, 讀者不难看出:



$$(a) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

(b)  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  等于以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为两邻边所成平行四边形的面积。

(c)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  时, 有三种可能情况:

$$\mathbf{a} = 0 \text{ 或 } \mathbf{b} = 0 \text{ 或 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 平行}$$

图 7-11

矢量积的定义也来自物理, 因为当力  $F$  作用在一物体上, 自一点  $O$  引一綫段  $OA$  到力  $F$  所在的直綫上, 則力  $F$  对点  $O$  所产生的力矩

$$\mathbf{L} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}$$

事实上, 自  $O$  作  $OB \perp AF$  于  $B$ ,