高等数学讲义

秦曾复　余跃年　编著

复旦大学出版社

高等数学讲义

秦曾复　余跃年　编著

复旦大学出版社

高等数学讲义

秦曾复　余跃年　编著

出　版　复旦大学出版社
（上海国权路 579 号　邮政编码 200433）
发　行　新华书店上海发行所
印　刷　同济大学印刷厂
开　本　850×1168　1/32
印　张　24.25
字　数　630 000
版　次　1996 年 8 月第 1 版　1996 年 8 月第 1 次印刷
印　数　1-3 000
书　号　ISBN 7-309-01710-2/O・167
定　价　25.00 元

内容提要

全书共分九章，内容包括：连续函数、微分演算、积分演算、解析几何、线性代数、多变量分析、数量场与向量场、无穷级数、常微分方程．该书在介绍传统教材基本内容的基础上，在有关章节中穿插和充实进数学模型和数值计算的内容，反映计算机时代的特征，体现现代数学的精神．

该书可作为理工科大学高等数学课程的教材，也可供有关科研人员和工程技术人员阅读参考．

序　言

读这本《高等数学讲义》的大学生将是21世纪的人才，因此可以说，写于世纪之交的这本讲义是面向新世纪的.

20世纪中叶，斯米尔诺夫院士的五卷本《高等数学教程》是一部具有历史意义的著作.50年代和60年代我们中国成千上万的大学生读过这套教科书.由于它成书的时候现代计算机尚未问世更未普及，因而以它为模式编写的教材不可能反映计算机时代的特征.

教材需要不断更新.现代高等数学的教学内容应当具有这样的特点：一、高等数学课程的目标是打下掌握和运用现代数学的基础.如果说解析几何开创了数和形统一的新局面的话，那么现代数学则更进一步地将分析、几何、代数高度统一.教材要反映现代数学的这个特征.早期的高等数学课程只讲微积分不包括线性代数；后来虽然讲线性代数，不过把它放在微积分后面单列一章.按照现代数学的精神，线性代数应与多元函数的微分和积分，与解析几何中二次曲线和曲面的分类紧密地结合起来.二、计算机对于数学及自然科学和工程技术的作用越来越大，现代高等数学课程必须反映这个时代特征.以 N 个未知量的线性代数方程组为例，传统的讲法是克拉默规则，即每一个未知量的解表达成两个 N 阶行列式的商，需要 N^N 量级的乘除工作量.对于大规模计算，这个工作量是难以承受的.采用高斯消去法求解，只需 N^3 量级的乘除工作量.因此现在讲线性代数方程组就应强调计算机上可行的高斯消去法，淡化克拉默规则.三、各门科学和工程技术应用现代数学的广度和深度突出地反映在数学模型上.没有数学模型，根本用不上

计算机；数学模型不精确，计算机也就发挥不了关键性作用，所以，高等数学课程应充实数学模型和数值计算的内容．譬如在一元函数微积分之后，讲一讲从开普勒行星运动定律到牛顿万有引力定律的演算，这是科学史上最杰出的数学模型之一；再者，从椭圆的周长和摆的周期问题归结出两类椭圆积分，进而指出数值计算的必要性．我们在编写这本讲义的时候，努力体现这些特点．

本书分成九章．第一章为连续函数，第二章为微分演算，第三章为积分演算，第二章和第三章大体上就是一元函数微积分．在多元分析之前，先讲第四章的解析几何和第五章的线性代数．只要有需要又有可能，各章内容相互穿插．例如在第一章讲数列之后就顺势引出无穷级数．再如在第三章积分的最后一节将可以分离变量的微分方程结合进来讨论．又如在第四章解析几何的空间曲线一节里运用向量值函数的导数写出切线方程．第六章的多变量分析以及第七章的数量场与向量场是多元函数微积分的基本内容．雅可比阵在表达导数、复合函数求导的链式规则和重积分的变量代换诸方面起着重要作用．第八章的无穷级数中专辟一节讲快速傅里叶变换，意在加强数学应用和数值计算、理论联系实际的观念．第九章为常微分方程，这可以说是数学通向自然科学和工程技术的主要途径之一．这是因为大量的数学模型可归结为微分方程，大量的微分方程需要数值计算．

这份讲义作为两个学期高等数学课程的教材已在复旦大学理科和技术学院几个专业使用过三遍．定稿时又修改了一回．敬请专家和广大读者提出意见，以进一步改善这本高等数学讲义．

秦曾复　余跃年

1995 年 9 月

目　　录

第一章 连续函数

这本高等数学教材的主要讨论对象是连续函数.它反映了自然界和工程技术中最广泛的一类连续变化现象.

§1 实数连续统

连续是怎么一回事?从人的认识来讲,连续与间断是对立的统一.数学是从数量关系和空间形式上展开这个论题的.

一、集合

现代数学中最基础的一个概念是集合.大家或多或少地已经接触过集合这个概念.集合理论的奠基人康托尔[①]认为:集合是我们的直觉或者我们的思维确定的各别对象成为总体的联合.这一个一个有区别的对象称为该集合的元素.

通常,用大写的英文字母标记集合,小写的英文字母指称元素.一个集合 S 与它的某个元素 x 之间的根本关系是"x 属于 S",记成 $x\in S$.如果 y 不是集合 S 的元素,则写成 $y\notin S$.

数集有几个约定俗成的符号:

1. 自然数集

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

2. 整数集

① 康托尔(George Cantor,1845—1918),德国数学家.

$$Z=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}.$$

3. 有理数集

$$Q=\{x\mid x=\frac{p}{q},\text{其中 } p\in Z \text{ 且 } q\in N\}.$$

4. 实数集

$$R.$$

在大家熟悉的十进制下,已知任何一个有理数必为有限位小数(例如$\frac{-9}{8}=-1.125$)或为无限位循环小数(例如$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$).循此,我们可以把无限不循环小数理解为无理数.然后,所谓的实数集 R 就是有理数和无理数的全体.

我们将要指出,实数集与上面的自然数集、整数集不同,特别与有理数集不同,它具有连续的特性.由此得名:实数连续统 R.

此外,还有一个特别的集合:

5. 空集

$$\varnothing.$$

它不包含任何元素.譬如,

$$\{x\mid x^2+1=0 \text{ 且 } x\in R\}=\varnothing.$$

两个集合 S 和 T 称为相等,如果它们拥有相同的元素,记成

$$S=T.$$

例如,

$$S=\{a,b,c\}\text{和 } T=\{b,c,a\}.$$

于是 $S=T$,此时元素出现的先后次序无关紧要.

又如:

$$S=\{x\mid x^2-1=0\}\text{和 } T=\{x\mid x=\cos n\pi,\text{其中 } n\in N\}.$$

这时成立 $S=T$,即使它们在表达方式上不一样也无所谓.

两个集合 A 和 B,称 A 是 B 的一个子集,如果 A 中的元素必属于 B:

$$x\in A\Rightarrow x\in B.$$

记成

$$A\subset B.$$

这里我们引进一个符号“$\Rightarrow$”，它意味着由左边的命题推出右边的命题，亦即左边的命题“隐含”右边的命题.

例如，

$$N\subset Z\subset Q\subset R.$$

显然，对于任何集合 S 平凡地有：

$$S\subset S \text{ 以及 } \varnothing\subset S.$$

事实上，成立

$$S=T\Leftrightarrow S\subset T \text{ 且 } T\subset S.$$

此地我们引进符号“$\Leftrightarrow$”，念做“当且仅当”，也可以说：左边命题的充分必要条件是右边的命题. 所谓左边命题 P 的必要条件是右边的命题 H，即指 $P\Rightarrow H$，而左边命题 P 的充分条件为右边命题 H，此乃 $H\Rightarrow P$（亦写成 $P\Leftarrow H$）. 因此，符号$\Leftrightarrow$可看作两个符号$\Rightarrow$和$\Leftarrow$的缩写.

二、集合运算

常用的集合运算有三个：并、交、补.

两个集合 S 和 T 的并是一个集合，记为 $S\cup T$，它的元素或者来自 S 或者来自 T：

$$S\cup T=\{x\mid x\in S \text{ 或 } x\in T\}.$$

例如，

$$S=\{a, b, c\}, T=\{a, d, e\},$$

于是

$$S\cup T=\{a, b, c, d, e\}.$$

平凡地，对于任何集合 S 有

$$S\cup\varnothing=S, S\cup S=S.$$

两个集合 S 和 T 的交是一个集合，记为 $S \cap T$，它由 S 与 T 共同拥有的元素组成：

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \in T\}.$$

对于上面的例子，有

$$S \cap T = \{a\}.$$

注意，a 与 $\{a\}$ 不同：前者 a 仅是一个元素而已；后者则是由单个元素 a 构成的集合 $\{a\}$.

当两个集合没有共同元素的时候，它们的交是空集. 例如设 E 是偶数集，F 是奇数集，于是

$$E \cup F = N,\ \text{以及}\ E \cap F = \varnothing.$$

这时，我们也称集合 E 和 F 不相交.

平凡地，对于任何集合 S 有

$$S \cap \varnothing = \varnothing,\ S \cap S = S.$$

在集合 A 是集合 B 的一个子集，即 $A \subset B$ 的前提下，所谓集合 A 关于集合 B 的补是这样的一个集合：它的元素属于 B 但不属于 A，记为 A_B^C：

$$A_B^C = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}.$$

当集合 B 不必言明的时候，可以将 A_B^C 简写成 A^C.

例如，无理数集是有理数集 Q 关于实数集 R 的补. 通常，无理数集就写成 Q^C.

有时，为了表述的方便还引进一个辅助性运算“差”. 集合 S 和集合 T 的差是一个集合，它由集合 S 中去掉了属于集合 T 的那些元素而剩下的元素组成，记成 $S-T$：

$$S - T = \{x \mid x \in S \text{ 且 } x \notin T\}.$$

应当指出，任何两个集合总可以形成差；但并不是任何两个集合可以构造补的.

如果记集合 S 与集合 T 的并为集合 G：

$$G = S \cup T,$$

则成立

$$S-T=S\cap T_G^C.$$

请读者验证上述等式.

关于集合的并交补运算，有以下几个规则：

1. 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A.$$

2. 结合律

$$A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D,$$
$$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D.$$

3. 分配律

$$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D),$$
$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

4. 对偶律

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,$$
$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C.$$

我们建议读者，第一要逐个验证这些运算规则，第二要尽可能地熟悉它们，这不仅对于集合运算是重要的，而且还有助于提高思维的逻辑推理能力.

三、坐标

在一条水平直线上，先指定一个“原点”O，再在它的右方取一个点 U，以线段 OU 为单位长度，这样就设置了一个坐标框架.

显而易见，有了单位长度 1，就可以在这条直线上标出所有的整数点 $0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots$. 整数系 Z 的几何形象是“离散”的，它们彼此之间以单位长度为最小间隔.

然后，可以进一步地在这条直线上标出所有的有理点 $\frac{p}{q}$，其中 $p\in Z,q\in N$. 有理数系 Q 的几何形象是“稠密”的，容易验证任何

两个有理数点之间的中点也是一个有理点. 由此可见任何两个有理点之间存在无限多个有理点.

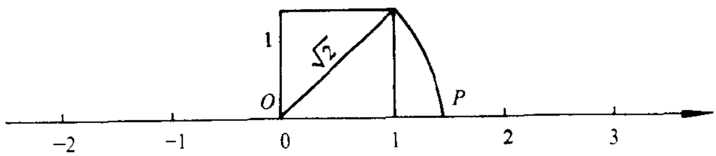

图 1-1

一个重要的事实是:尽管有理点在直线上密密麻麻地分布着,但并没有填满整个直线,或者说直线上的空隙还多得不得了. 例如单位正方形的对角线长度(即现在大家熟知的 $\sqrt{2}$)在直线上对应的点 P 就不是一个有理点(图 1-1). 实际上,所有无限不循环的十进制小数在直线上的对应点皆非有理点.

集有理点和无理点之大成,整个直线终于被布满了. 由于实数系 R 这种连绵不断的几何形象,遂称实数系 R 为实数连续统,相应地那条标着有理点和无理点的直线称为实直线(图 1-1).

直线上的每一个点对应有一个实数;反之,每一个实数对应着直线上的一个点. 数和形的这种统一是数学上极其重要的一个观念. 笛卡儿[①]等人正是通过坐标将空间形式(图形)和数量关系(方程)沟通起来,创立了解析几何.

在实直线 R 上,两点 x 和 y 的距离 $\rho(x,y)$ 由相应两个实数之差的绝对值表示:

$$\rho(x, y)=|x-y|.$$

特别地,直线上任何一点 x 和原点 O 的距离为

$$\rho(x, 0)=|x|.$$

① 笛卡儿(Rene Descartes, 1596—1650),法国哲学家、数学家.

不难验证关于距离成立以下几点基本性质.

(1) 对于任何 x 和 $y\in R$：

$$\rho(x, y)\geqslant 0，并且\ \rho(x, y)=0\Leftrightarrow x=y.$$

(2) 对于任何 x 和 $y\in R$：

$$\rho(x, y)=\rho(y, x).$$

(3) 对于任何三点 $x, y, z\in R$：

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)（三点不等式）.$$

作为三点不等式的特例，有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|\ 以及\ |x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

四、区间

实直线 R 上两点之间的一段叫做区间.共有九种区间:四种有限区间和五种无限区间(图 1-2).

1. 开区间

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}（注意：它不包括两个端点）.$$

2. 闭区间

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}（注意：它包括两个端点）.$$

3. 左开右闭区间

$$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

4. 左闭右开区间

$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

5. 右半无限开区间

$$(a, +\infty)=\{x|x>a\}.$$

6. 右半无限闭区间

$$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}.$$

7. 左半无限开区间

$$(-\infty, b)=\{x|x<b\}.$$

8. 左半无限闭区间