# 福里哀級数·場論
# 解析函数和特殊函数
# 拉普拉斯变换

П. И. 罗曼諾夫斯基著

机械工业出版社

# 福里哀級数·場論·解析函数和特殊函数·拉普拉斯变换

П. И. 罗曼諾夫斯基著

丘玉圃、袁博淳、罗炳海、熊振翔譯

机械工业出版社

1958

苏联П.И.Романовский著 'Ряды фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа' (Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва 1957年出版)

*　　　　*　　　　*

NO. 2001

1958年10月第一版　　1958年10月第一版第一次印刷

850×1168 1/32　字数208千字　印張8 3/16　0,001— 3,100册

机械工业出版社(北京东交民巷27号)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号　定价(10) 1.70元

# 序　　言

近代技术的發展对工程师的数学知識水平提出了更高的要求，因此，在培养專业工程师时，通常用的工业学校数学教程，显然是不能滿足需要了。在許多高等工业学校的某些系理，目前已将数学教程中的特別（补充）章节列入必修的教学大綱当中。但是为高等工业学校学生所必需的有关上述問題的教材目前仍是很少。如果仅仅利用某些篇幅較大的教程和專題文章，則对于学生来說是比較困难的。

实踐証明，非常需要編写一些篇幅較小，書写簡要的教材，它以学生容易接受的形式和一定的邏輯順序叙述目前在高等工业学校所講授的数学教程补充章节的主要內容。

本書以簡明綱要形式叙述了其中某些章节，它是根据作者在謝·奥尔忠尼啓則莫斯科航空学院无綫电系講授的講义“无綫电系数学教程补充章节”（苏联国防工业出版社）一書編写的。

本書可以做为高等工业学校学生学習下列章节的簡明教材：

福里哀級数和福里哀积分；

場論；

解析函数理論；

某些特殊函数；

运算微积。

在本書中沒有对所叙述的理論在物理和技术方面加以說明，这些說明可以在更詳細的書中查到，例如拉夫倫捷夫（М. А. Лаврентьев）和沙巴特（Б. В. Шабат）合著的“复变函数論方法”（Методы теории функций комплексного переменного）（解析函数，特殊函数和运算微积部分）和托尔斯托夫（Г. П. Толстов）著的“福里哀級数”（Ряды фурье）（福里哀級数和福里哀积分部分）[1]。

为了完整起見，在本書个别的（不多的）地方叙述了一些学生不一定必修的材料，因为这些材料与所叙述的理論关系是比較密切的。

作　　者

---

[1] 这两本書都有中譯本。——譯者

# 目　录


序言 …… 6

第一章　福里哀級数及福里哀积分 …… 7

§1　周期函数 …… 7

§2　周期是 $2\pi$ 的函数的福里哀級数 …… 8

§3　周期是 $2\pi$ 的函数的福里哀級数的复数形式 …… 17

§4　偶函数与奇函数 …… 19

§5　周期是 $2\pi$ 的偶函数和奇函数的福里哀級数 …… 20

§6　任意周期的函数的福里哀級数 …… 23

§7　弦的微小自由振动方程及其福里哀方法解 …… 29

§8　福里哀积分 …… 33

§9　福里哀积分的复数形式 …… 39

§10　关于偶函数和奇函数的福里哀积分 …… 41

§11　函数的正交系 …… 44

§12　福里哀系数的極小性質 …… 47

第二章　場論的基础 …… 52

§1　向量代数的基本知識 …… 52

§2　变标量的向量函数 …… 54

§3　空間曲綫的流动三面形 …… 56

§4　标量場。标量場的梯度 …… 58

§5　曲綫积分 …… 60

§6　向量場 …… 67

§7　曲面积分 …… 71

§8　奧斯特洛格拉斯基公式 …… 76

§9　奧氏公式的向量式。向量場的散度 …… 78

§10　斯托克斯公式 …… 82

§11　斯托克斯公式的向量式。向量場的旋度 …… 84

§12　二阶微分运算 …… 87

§13　哈密尔頓符号 …… 88

§14 曲綫坐标中的向量运算……………………………………………………9?
第三章 解析函数的初步知識……………………………………………………99
§1 复数……………………………………………………………………99
§2 复数項級数……………………………………………………………102
§3 幂級数…………………………………………………………………104
§4 复变数的指数函数，双曲綫函数与三角函数…………………………109
§5 某些多値的复变函数…………………………………………………114
§6 复变函数的导数………………………………………………………118
§7 解析函数与調和函数…………………………………………………123
§8 复变函数的积分………………………………………………………125
§9 柯西基本定理…………………………………………………………130
§10 柯西积分公式…………………………………………………………134
§11 柯西型积分……………………………………………………………136
§12 解析函数的高阶导数…………………………………………………138
§13 解析函数的序列与級数………………………………………………139
§14 台劳級数………………………………………………………………141
§15 罗朗級数………………………………………………………………146
§16 解析函数的孤立奇点…………………………………………………149
§17 留数……………………………………………………………………152
§18 輻角原理………………………………………………………………161
§19 可微映射………………………………………………………………164
§20 域的共形映射…………………………………………………………173
第四章 某些特殊函数……………………………………………………185
§1 Γ（敢瑪）-函数……………………………………………………185
§2 任意指标的貝塞尔函数………………………………………………192
§3 貝塞尔函数的遞推公式………………………………………………198
§4 半整数指标的貝塞尔函数……………………………………………200
§5 整数指标的貝塞尔函数的积分表达式………………………………202
§6 当自变量很大时，整数指标的貝塞尔函数的漸近表达式……………206
§7 积分对数。积分正弦。积分余弦……………………………………211
第五章 拉普拉斯变换……………………………………………………217
§1 依賴于参量的积分的輔助知識………………………………………217
§2 拉普拉斯变换…………………………………………………………222

§3 拉普拉斯变换的简單性質……………………………………………… 225
§4 函数的褶积……………………………………………………………… 229
§5 像为有理函数的像原函数………………………………………………… 232
§6 解常系数綫性微分方程与常系数綫性微分方程組的附加說明… 236
§7 在无穷远处具有正則像的像原函数………………………………… 239
§8 某些特殊函数的像……………………………………………………… 248
§9 反演公式………………………………………………………………… 252
§10 使解析函数成为像的充分条件………………………………………… 256

# 福里哀級数·場論·解析函数和特殊函数·拉普拉斯变換

П. И. 罗曼諾夫斯基著

丘玉圃、袁博淳、罗炳海、熊振翔譯

机械工业出版社

1958

苏联П.И.Романовский著 'Ряды фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа' (Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва 1957年出版)

*　　　　*　　　　*

NO. 2001

1958年10月第一版　　1958年10月第一版第一次印刷

850×1168 1/32　字数208千字　印張8 3/16　0,001— 3,100册

机械工业出版社(北京东交民巷27号)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号　定价(10) 1.70元

# 目　录


序言……………………………………………………………………6
第一章　福里哀級数及福里哀积分……………………………………7
§1　周期函数……………………………………………………………7
§2　周期是 2 $\pi$ 的函数的福里哀級数………………………………8
§3　周期是 2 $\pi$ 的函数的福里哀級数的复数形式……………………17
§4　偶函数与奇函数……………………………………………………19
§5　周期是 2 $\pi$ 的偶函数和奇函数的福里哀級数……………………20
§6　任意周期的函数的福里哀級数……………………………………23
§7　弦的微小自由振动方程及其福里哀方法解………………………29
§8　福里哀积分…………………………………………………………33
§9　福里哀积分的复数形式……………………………………………39
§10　关于偶函数和奇函数的福里哀积分………………………………41
§11　函数的正交系………………………………………………………44
§12　福里哀系数的極小性質……………………………………………47
第二章　場論的基础……………………………………………………52
§1　向量代数的基本知識………………………………………………52
§2　变标量的向量函数…………………………………………………54
§3　空間曲綫的流动三面形……………………………………………56
§4　标量場。标量場的梯度……………………………………………58
§5　曲綫积分……………………………………………………………60
§6　向量場………………………………………………………………67
§7　曲面积分……………………………………………………………71
§8　奥斯特洛格拉斯基公式……………………………………………76
§9　奥氏公式的向量式。向量場的散度………………………………78
§10　斯托克斯公式………………………………………………………82
§11　斯托克斯公式的向量式。向量場的旋度…………………………84
§12　二阶微分运算………………………………………………………87
§13　哈密尔頓符号………………………………………………………88

§14 曲綫坐标中的向量运算……………………………………………………9?

第三章 解析函数的初步知識……………………………………………………99

§1 复数……………………………………………………………………………99

§2 复数項級数……………………………………………………………………102

§3 幂級数…………………………………………………………………………104

§4 复变数的指数函数，双曲綫函数与三角函数……………………………109

§5 某些多值的复变函数…………………………………………………………114

§6 复变函数的导数………………………………………………………………118

§7 解析函数与調和函数…………………………………………………………123

§8 复变函数的积分………………………………………………………………125

§9 柯西基本定理…………………………………………………………………130

§10 柯西积分公式…………………………………………………………………134

§11 柯西型积分……………………………………………………………………136

§12 解析函数的高阶导数…………………………………………………………138

§13 解析函数的序列与級数………………………………………………………139

§14 台劳級数………………………………………………………………………141

§15 罗朗級数………………………………………………………………………146

§16 解析函数的孤立奇点…………………………………………………………149

§17 留数……………………………………………………………………………152

§18 輻角原理………………………………………………………………………161

§19 可微映射………………………………………………………………………164

§20 域的共形映射…………………………………………………………………173

第四章 某些特殊函数……………………………………………………………185

§1 Γ（敢瑪）-函数………………………………………………………………185

§2 任意指标的貝塞尔函数………………………………………………………192

§3 貝塞尔函数的遞推公式………………………………………………………198

§4 半整数指标的貝塞尔函数……………………………………………………200

§5 整数指标的貝塞尔函数的积分表达式………………………………………202

§6 当自变量很大时，整数指标的貝塞尔函数的漸近表达式…………………206

§7 积分对数。积分正弦。积分余弦……………………………………………211

第五章 拉普拉斯变换……………………………………………………………217

§1 依賴于参量的积分的輔助知識………………………………………………217

§2 拉普拉斯变换…………………………………………………………………222

§3 拉普拉斯变换的簡單性質…………………………………… 225
§4 函数的褶积…………………………………………………… 229
§5 像为有理函数的像原函数…………………………………… 232
§6 解常系数綫性微分方程与常系数綫性微分方程組的附加說明… 236
§7 在无穷远处具有正則像的像原函数………………………… 239
§8 某些特殊函数的像…………………………………………… 248
§9 反演公式……………………………………………………… 252
§10 使解析函数成为像的充分条件……………………………… 256

# 序言

近代技术的發展对工程师的数学知識水平提出了更高的要求，因此，在培养專业工程师时，通常用的工业学校数学教程，显然是不能滿足需要了。在許多高等工业学校的某些系理，目前已将数学教程中的特别（补充）章节列入必修的教学大綱当中。但是为高等工业学校学生所必需的有关上述問題的教材目前仍是很少。如果仅仅利用某些篇幅較大的教程和專題文章，則对于学生来說是比較困难的。

实踐証明，非常需要編写一些篇幅較小，書写簡要的教材，它以学生容易接受的形式和一定的邏輯順序叙述目前在高等工业学校所講授的数学教程补充章节的主要內容。

本書以簡明綱要形式叙述了其中某些章节，它是根据作者在謝·奥尔忠尼啓則莫斯科航空学院无綫电系講授的講义“无綫电系数学教程补充章节”（苏联国防工业出版社）一書編写的。

本書可以做为高等工业学校学生学習下列章节的簡明教材：

福里哀級数和福里哀积分；

場論；

解析函数理論；

某些特殊函数；

运算微积。

在本書中沒有对所叙述的理論在物理和技术方面加以說明，这些說明可以在更詳細的書中查到，例如拉夫倫捷夫（М. А. Лаврентьев）和沙巴特（Б. В. Шабат）合著的“复变函数論方法”（Методы теории функций комплексного переменного）（解析函数，特殊函数和运算微积部分）和托尔斯托夫（Г. П. Толстов）著的“福里哀級数”（Ряды фурье）（福里哀級数和福里哀积分部分）[1]。

为了完整起見，在本書个别的（不多的）地方叙述了一些学生不一定必修的材料，因为这些材料与所叙述的理論关系是比較密切的。

作者

---

[1] 这两本書都有中譯本。——譯者

# 第一章　福里哀級数与福里哀积分

## §1　周期函数

設 $f(x)$ 为定义在全部数軸上的函数。若自变量增加某一数值 $T$ 后其函数值不变，即对于所有的 $x$ 有

$$f(x+T)=f(x),$$

则数値 $T$ 称为这函数的**周期**。

若 $T$ 是函数的周期，則 $nT$（$n$ 是任意整数）亦是該函数的周期。这样一来，周期的任意倍数是周期。具有异于零的周期的函数称为**周期函数**。

容易看出，任何非常数的、甚至只有一个連續点的周期函数，其正周期中都有最小的一个；那么所有其它周期就是它的倍数。一般說到关于函数的周期时，这里"周期"一詞即指所有正周期中的最小者而言。

若函数 $f(x)$ 具有周期 $T$，則 $\varphi(x)=f(ax)$ 具有周期 $\frac{T}{a}$。事实上，有

$$\varphi\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)=f(ax)=\varphi(x)。$$

若 $f(x)$ 具有周期 $T$，則函数在長度为 $T$ 的区間上的积分与下限的选擇无关，即对于任意的 $c$ 有

$$\int_c^{c+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx。$$

其实，如設 $0<c<T$。則有

$$\int_c^{c+T}=\int_c^T+\int_T^{c+T}=\int_c^T+\int_0^c=\int_0^T,$$

其中 $\int_T^{c+T}=\int_0^c$ 是由于函数的周期性。

## §2 周期是2π的函数的福里衰級数

提出問題：展开复杂的周期函数为簡單的周期函数。所謂"簡單的周期函数"自然是指簡諧函数，就是形如

$$A\sin(\omega x+\alpha)$$

的函数，或形如

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x$$

的函数。这些簡諧函数具有周期$\frac{2\pi}{\omega}$。

若我們要展开周期是$2\pi$的函数为簡諧函数，則它的頻率就要这样来选擇，使得这些簡諧函数都以$2\pi$作为周期。那么頻率$\omega$則应这样来选擇，使$n\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$（$n$为整数）或$\omega=n$，就是取具有整数頻率的簡諧函数作为項。

假定作为項的还有周期是任意数的常数，我們应考慮这样的問題：展开周期是$2\pi$的函数$f(x)$为形如

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)$$
$$+\cdots\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots\cdots$$

的級数。或者簡單一点，展开为形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的級数。这里$a_0$，$a_1$，$b_1$，$a_2$，$b_2$，……，$a_n$，$b_n$，……是某些常数（为了方便起見，自由項写成$\frac{a_0}{2}$的形式，其原因以后会明白）。

### 輔助积分的計算

我們求下面的积分

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx,\\[2ex]\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx,\end{array}\right\}\ n\text{ 是整数；}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx,\end{aligned}\right\} m，n\text{ 是正整数。}$$

有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\begin{cases}\dfrac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0(n\neq0),\\ x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi(n=0);\end{cases}\tag{1.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=\begin{cases}-\dfrac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0(n\neq0),\\ 0\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\quad(n=0);\end{cases}\tag{1.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)xdx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)xdx=\begin{cases}0\ (m\neq n),\\ \pi\ (m=n);\end{cases}\tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)xdx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)xdx=\begin{cases}0\ (m\neq n),\\ \pi\ (m=n);\end{cases}\tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)xdx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)xdx=0,\tag{1.5}$$

其中在导出（1.3）和（1.4）时应用了（1.1），导出（1.5)时应用了（1.2)。