经济数学基础（三）

Probaility Statistics

刘书田 主编

概率统计

北京工业大学出版社

高等学校财经类专业核心课程教材

经济数学基础（三）

概　率　统　计

主　编　刘书田
副主编　何蕴理
编写者　何蕴理　徐国元　李贵彬

北京工业大学出版社

（京）登 95 第 212 号

内容简介

本系列教材是根据国家教委高教司 1989 年 10 月审定的《经济数学基础》教学大纲的要求编写的。本书共分七章，内容包括：随机事件及其概率、随机变量的分布和数字特征、随机向量、大数定律和中心极限定理、抽样分布、统计推断、回归分析等，书中每章都附有习题，书后附有参考答案。

本书适合于高等院校财经类专业本科生、大专生使用。

经济数学基础（三）

概率统计

主编 刘书田 副主编 何蕴理

编写者 何蕴理 徐国元 李贵彬

北京工业大学出版社出版发行 社址：北京朝阳区平乐园 100 号

徐水宏远印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本：1/32 787×1092mm 印张：10.625 字数：238 千字

印数：1～2500 册 1995 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-5639-0463-8/O·23 定价：7.50 元

前　言

《经济数学基础》系列教材由三个分册组成：第一分册是《微积分》，第二分册是《线性代数》，第三分册是《概率统计》．该门课是高等院校财经类专业的核心课程．

这套系列教材是根据国家教委高等教育司 1989 年 10 月审定的《经济数学基础》教学大纲的要求编写的．在编写教材时，既考虑到数学学科本身的科学性，注意教材内容选择，注意深度和广度，系统地介绍了基本理论和基本方法；又考虑到培养学生的逻辑思维能力，注意问题的引入和分析，注意行文严谨和逻辑严密；还特别注意数学在经济学中的应用，例举了经济应用方面的问题，使学生能初步掌握经济分析中的定量方法．教材中每节后配有练习，每章后配有习题，习题中还选编了适量的选择题（每题至少有一项备选答案是正确的）．书后附有习题答案和提示，以供教师和学生参考．

教材中凡是超出《经济数学基础》教学大纲要求的内容，均标有“*”号，这可作为选学内容．

这套教材由北京工业大学应用数学系经济数学教研室集体讨论，分头编写，其中第一分册由刘书田、李剑平、丁津执笔；第二分册由刘国忠、谢贤衍、赵慧斌执笔；第三分册由何蕴理、徐国元、李贵彬执笔．付梓前，承蒙中国人民大

学胡富昌教授、胡显佑教授和北京大学范培华教授进行了认真审阅，并提出了宝贵意见. 这套教材的编写和出版，得到了北京工业大学教材建设委员会、应用数学系领导、校出版社和校教材科的支持和帮助，在此一并致谢.

限于编写者水平和时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请读者指正.

编　者

1994 年 12 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

本章主要研究随机事件以及随机事件的概率这两个基本概念，它们是学习概率论的基础.

§1.1　随机事件

一、随机现象

在现实世界中，我们经常遇到两类不同的现象：确定性现象和随机现象.

在一定条件下，必然会发生某一种结果，或必然不发生某一种结果的现象，称为确定性现象. 比如，抛一枚均匀硬币，必往下落；在标准大气压下，将水加热到100℃必然沸腾等，都是确定性现象.

在一定条件下，可能发生多种不确定结果的现象，称为随机现象. 比如，一枚均匀硬币，规定有国徽的一面为正面，那么抛掷这枚硬币，落下后，可能正面向上，也可能反面向上；某篮球运动员投篮，其结果可能命中，也可能不中；从某厂的一批产品中，随机抽出3件，抽到的废品数可能是0、1、2、3. 以上这些现象，都是随机现象.

对于随机现象，由于人们事先不能断定它将发生哪种结果，表面上看来似乎无规律可循. 但其实不然，实践证明，研究大量的随机现象后，通常总会显露出一定的规律性来. 比如，一次抛掷均匀硬币，可能正面向上，也可能反面向上，事

先不能预言会出现哪种结果，但多次重复抛掷，将会发现正面向上和反面向上的次数大约各占一半；又如，对某一目标进行射击，当射击次数不多时，从几个零星的弹着点，看不出什么规律，但当多次射击时，就会看到弹着点的分布呈现出某种规律性——弹着点差不多关于目标中心对称，越靠近中心弹着点越密等．总之，一切随机现象都具有两重性，即一次试验的不确定性和多次重复的规律性．概率统计就是一门研究随机现象统计规律性的数学分支．它从表面上看起来是错综复杂的偶然现象中，揭露出潜在的必然性来．

二、随机事件

在一定条件下，对随机现象的观测或实验，称为随机试验，简称试验，它有以下特点：

（1）在相同条件下可以重复进行；

（2）每次试验的可能结果不只一个，但事先能够明确所有可能的结果；

（3）进行某一次试验之前不能预言哪一个结果会出现．

前面的例子中，抛硬币、投篮、抽检产品、射击等，都是随机试验．

随机试验的每一个可能的结果，称为一个样本点；全体样本点的集合，称为样本空间．我们在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间，对于一个具体的随机试验来说，样本空间可以根据试验的内容来决定．比如，抛硬币这个随机试验的结果有两个："正面向上"和"反面向上"，即有两个样本点，而样本空间为

$$\Omega = \{\text{正面向上,反面向上}\}$$

样本空间的某个子集，称为随机事件，简称为事件；样本空间的单元素子集（即一个样本点），称为基本事件．比如，

在 1，2，3，…，9 这九个数字中任意选取一个，“取到的数是 1”，“取到的数是 2”，…，“取到的数是 9”，共有 9 个基本事件，这九个基本事件，构成了一个样本空间. 而“取到的数是 3 的倍数”这个随机事件，是样本空间的一个子集，由“取到的数是 3”，“取到的数是 6”，“取到的数是 9”三个基本事件组成.

样本空间 Ω 作为一个事件，因为在每次试验中必有 Ω 的样本点出现，所以 Ω 在一次试验中必然发生，称之为必然事件；空集 Φ 作为一个事件，它在每一次试验中都不会发生，称之为不可能事件. 比如，“抛一枚均匀硬币，落下后，正面向上或反面向上至少有一个发生”，是必然事件；“抛一枚均匀硬币，落下后，正面向上和反面向上同时发生”，是不可能事件. 为了研究上的方便，我们通常把必然事件和不可能事件当作特殊的随机事件来处理.

三、事件的关系和运算

1. 事件的包含关系

定义 1.1　如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 被事件 B 所包含，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

我们经常用图示法直观地表示事件间的关系：用一个矩形表示必然事件 Ω，矩形内的一些封闭图形表示一些随机事件. 图 1.1 表示了事件 A、B 的包含关系：$A \subset B$.

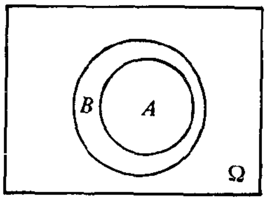

图　1.1

包含关系显然具有以下性质：

$A \subset A$.

若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$.

$\phi \subset A \subset \Omega$.

如果 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

2. 事件的和

定义 1.2　事件 A 与事件 B 至少有一个发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 之和，记作 $A+B$.（见图 1.2）

事件和的概念，可以推广到 n 个事件的情况. 事件 A_1，…，A_n 至少有一个发生，是一个事件，称为 n 个事件 A_1，…，A_n 之和，记作 $A_1+\cdots+A_n$.

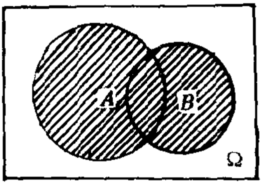

图　1.2

3. 事件的积

定义 1.3　事件 A 与事件 B 同时发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 之积，记作 AB.（见图 1.3）

事件积的概念，可以推广到 n 个事件的情况. 事件 A_1，…，A_n 同时发生，是一个事件，称为 n 个事件 A_1，…，A_n 之积，记作 $A_1\cdots A_n$.

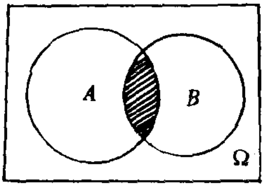

图　1.3

4. 事件的互不相容关系

定义 1.4　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称 A 与 B 是互不相容的.（见图 1.4）

5. 对立事件

定义 1.5　如果两个事件 A 与 B 满足

$$A+B=\Omega,\quad AB=\phi$$

则称 A、B 互为对立事件，记作 $B=\overline{A}$.（见图 1.5）

显然，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件，

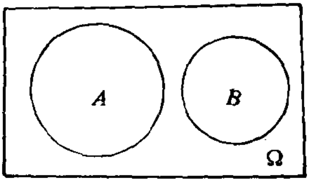

图 1.4

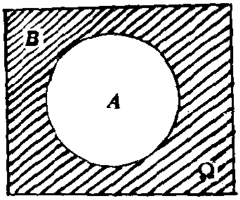

图 1.5

未必是对立事件.

6. 事件的差

定义 1.6　事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$.（见图 1.6）

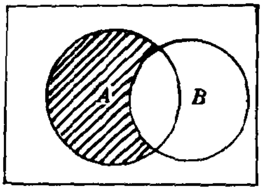

图 1.6

易知，$A-B=A\overline{B}$.

例 1　设 A、B、C 为三个事件，试用事件 A、B、C 的运算表示下列事件：

(1) A 发生，B、C 不发生；

(2) B、C 发生，A 不发生；

(3) A 发生，B 与 C 中任意一个发生，但不同时发生；

(4) A、B、C 至少有一个发生；

(5) A、B、C 恰有一个发生；

(6) A、B、C 恰有两个发生；

(7) A、B、C 都发生；

(8) A、B、C 一个也不发生.

解

(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) $\overline{A}BC$；

(3) $AB\overline{C}+A\overline{B}C$；

(4) $A+B+C$;

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(6) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$;

(7) ABC;

(8) $\overline{A+B+C}$，亦可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 2 统计每天下午 3 时至 4 时某电话局所接到的呼唤次数.

A 表示“呼唤次数为 1000 至 2000”;

B 表示“呼唤次数为 500 至 1500”.

试用文字描述事件 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$A+B$、AB.

解 $\overline{A}$ 表示“呼唤次数小于 1000 次或者大于 2000 次”;

$\overline{B}$ 表示“呼唤次数小于 500 次或者大于 1500 次”;

$A+B$ 表示“呼唤次数为 500 至 2000 次”;

AB 表示“呼唤次数为 1000 至 1500 次”.

例 3 在书架上任取一本书，设 A 表示“取到的是数学书”，B 表示“取到的是中文版的书”，C 表示“取到的是解放后出版的书”. 问:

(1) $AB\overline{C}$表示什么事件?

(2) $\overline{C}\subset B$ 表示什么意思?

(3) “所有的数学书都不是中文版的”，应如何表示?

解

(1) “取到的是解放前出版的中文版数学书”.

(2) 书架上解放前出版的书都是中文的.

(3) $A\subset\overline{B}$.

四、事件的运算律

关于事件的运算，有下列基本关系式:

交换律: $A+B=B+A$

$$AB = BA$$

结合律： $(A+B)+C = A+(B+C)$

$$(AB)C = A(BC)$$

分配律： $(A+B)C = AC+BC$

$$AB+C = (A+C)(B+C)$$

摩根律： $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$

$$\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$$

下面仅就摩根律的第一个式子加以证明：若$\overline{A+B}$发生，即 $A+B$ 不发生，则 A、B 每一个都不发生，即 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 都发生，亦即 $\overline{A}\,\overline{B}$ 发生，由此$\overline{A+B}\subset\overline{A}\,\overline{B}$；若 $\overline{A}\,\overline{B}$ 发生，即 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 都发生，则 A、B 都不发生，即 $A+B$ 不发生，亦即$\overline{A+B}$发生，由此 $\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A+B}$. 综上所述，可得到$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

练习 1.1

1. 指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

(1) 北京明年 5 月 1 日最高气温不低于 24℃；

(2) 没有水分，种籽仍发芽；

(3) 某公共汽车站有 8 人在候车；

(4) 上抛一物体，经过一段时间，这物体落在地面上；

(5) 从一副扑克牌中任抽一张是红桃 3；

(6) 无外力作用时，物体作等速直线运动；

(7) 明年亚洲无里氏震级七级以上地震；

(8) 下个月某电冰箱厂的产品全是合格品；

(9) 实系数方程 $x^2+px+q=0$，若 $p^2-4q>0$，则方程有两个相等的实根；

(10) 等腰三角形二底角相等.

2. 随机抽检三件产品，设 A 表示“三件中至少有一件是废品”，B 表示“三件中至少有两件是废品”，C 表示“三件都是正品”，问 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$、$A+B$、AC 各表示什么事件？

3. 对飞机进行两次射击，每次射一弹. 设 A_i 表示“第 i 次射击击中飞机”$(i=1, 2)$，试用 A_1、A_2 及它们的对立事件，表示下列各事件：

B：两弹都击中飞机；

C：两弹都未击中飞机；

D：两弹未都击中飞机；

E：至少有一弹击中飞机；

F：至多有一弹击中飞机；

G：恰有一弹击中飞机.

并指出 B、C、D、E、F、G 中，哪些是互不相容的，哪些是对立的？

4. A_i 表示“电话交换台在一分钟内接到 i 次呼唤”$(i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$，A 表示“在一分钟内接到不多于 5 次呼唤”，B 表示“在一分钟内接到多于 5 次呼唤”. 以上 8 个事件哪些事件有包含关系？哪些事件有对立关系？哪些事件互不相容？

5. 从 1 至 100 这 100 个自然数中随机地取出一个数. A 表示取出的数能被 5 整除的事件，B 表示取出的数小于 50 的事件，C 表示取出的数大于 30 的事件. 问以下事件各表示什么意思？

(1) AB；　(2) AC；　(3) ABC；

(4) $B+C$；　(5) $(A+C)B$.

6. 从 0、1、2 三个数码中任取一个，取后放回，现连续取两次：

(1) 求该随机试验中基本事件的个数，并列出所有基本事件；

(2)“第一次取出的数码是 0”这一事件是由哪些基本事件复合而成的？

(3)“第二次取出的数码是 1”这一事件是由哪些基本事件复合而成的？

(4)“至少有一个是数码 2”这一事件是由哪些基本事件复合而成的？

7. 在一批产品中有若干正品和次品，设事件 A_i 表示第 i 次取到次品 ($i=1, 2, 3$). 试用文字叙述下列事件的意义：

(1) A_1+A_2；　　(2) $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2A_3$；　　(4) $\overline{A_2}$；

(4) A_3-A_2；　　(6) $A_3\overline{A_2}$；

(7) $\overline{A_1+A_2}$；　　(8) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$；

(9) $\overline{A_2}+\overline{A_3}$；　　(10) $\overline{A_2A_3}$；

(11) $A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$.

8. 在空战中，要打落敌机，需要同时击毁敌机的两个发动机，或者击毁敌机的司机舱. 若用 A 表示“击毁第一个发动机”，用 B 表示“击毁第二个发动机”，用 C 表示“击毁司机舱”，用 D 表示“敌机被击落”，试用 A、B、C 表示 D.

§1.2 随机事件的概率

一、概率的统计定义

一个随机事件，在每次试验中，可能发生也可能不发生. 然而，对同一事件，在相同条件下进行大量试验，又会呈现

出一种确定的规律来．它告诉我们：随机事件发生的可能性的大小是可以度量的，概率论的基本出发点就是用数量来揭示大量随机现象中蕴含的规律性．

1．频率

在一系列重复试验中，某事件 A 发生的次数 m 与试验总次数 n 的比值，称为事件 A 的频率，记作 $W(A)$．

显见，频率具有如下性质：

$$0 \leqslant W(A) \leqslant 1$$

$$W(\Omega) = 1$$

$$W(\phi) = 0$$

历史上，学者蒲丰等人分别做了大量重复的抛掷硬币的试验，试验结果如下：

试验者	试验总次数 n	"正面向上"次数 m	"正面向上"频率 $\frac{m}{n}$
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

以上试验告诉我们：虽然在个别试验中，"正面向上"与否，事前是不可知的，带有偶然性，但是随着试验次数 n 的增加，"正面向上"的频率越来越明显的稳定在固定值 0.5 的附近．这种频率的稳定性是客观存在的，不管谁进行试验，只要试验条件相同，结果就基本一致．这说明随机事件在大量试验中存在着一种客观规律性，而频率的稳定性就是这种规律性的表现，频率的稳定值就是度量随机事件发生可能性大小的一个数量指标．

2．概率