

图论及其应用
(第二版)

图论及其应用(第二版)

卢开澄 卢华明 著



清华大学出版社



清华大学出版社
57.1
33
(2)

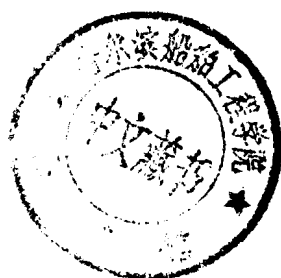
0157
L88

390765

图论及其应用

第二版

卢开澄 卢华明



清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

图论研究的问题有的源远流长,可追溯到欧拉。它成为数学一活跃分支则是近 30 年的事。60 年代以来发现它在许多领域有着广泛的应用,特别是计算机科学、电路网络等,图论的引进改变了它们的面貌。

本书以讲述图论的应用为主,介绍它解决问题的思想和算法。全书分基本理论篇和应用篇两大部分,其中有些是很新很热门的课题。

本书可作为大学数学专业、计算系理论专业的教材。相关学科的科技工作者也可从中找到他们所需要的材料。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/卢开澄,卢华明著. —2 版. —北京:清华大学出版社,1995
ISBN 7-302-01817-0

I. 图… II. ①卢… ②卢… III. 图论 IV. 0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 03770 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

责任编辑:杨靖

印刷者:清华大学印刷厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:334 千字

版 次:1995 年 8 月第 2 版 1995 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-01817-0/TP·813

印 数:0001—4000

定 价:10.00 元

第二版序

图论是一门既古老而又年轻的学科。说它古老,因为它可以追溯到 17 世纪的 Euler。讲图论没有不提到 Königsberg 桥的问题,Euler 解决它用到图的方法确是非常典型的例子。但它成为一门学科,还是近三十年的事。

近若干年来,在计算机科学蓬勃发展的刺激下,图论也获得一个很大的空间。在计算机的许多领域里,它都占有一席之地,有了自己的位置。不仅如此,在物理学、生物学、电力工程、运筹学、以及社会科学等领域都有它的应用。可以这么说,图论之所以成为图论,是因为它显示了很好的应用前景。

本书从第一版出版到现在,已超过十年。作者根据这几年的实践,对它作了比较彻底的改写。全书共七章,分基础理论篇和应用篇两部分。前一部分及第五章由卢华明执笔,增加了许多新内容,比如 Petri 网,它是近若干年新兴起很有前途的分支。对研究并行计算、复杂系统等有帮助。图论作为离散数学的成员没有理由将 Petri 网拒之门外。

本书仍以研究算法为主,以学以致用为目的。当然错误和缺点在所难免,望读者不吝指教。

作者

1994 年 10 月

目 录

第一部分 基础理论篇

第一章 图的基本概念	3
§ 1 引论	3
§ 2 图的概念.....	14
§ 3 道路与回路.....	17
§ 4 图的矩阵表示法.....	23
§ 5 中国邮路问题.....	26
§ 6 平面图.....	29
§ 7 Petri 网	33
第二章 树	41
§ 1 树的概念.....	41
§ 2 基本性质.....	45
§ 3 关联矩阵与基本关联矩阵.....	46
§ 4 回路矩阵与基本回路矩阵.....	48
§ 5 关联矩阵与回路矩阵的关系.....	51
§ 6 割集矩阵与基本割集矩阵.....	53
§ 7 树的数目.....	56
§ 8 内向树与外向树.....	61
§ 9 二元树.....	64
§ 10 Huffman 树	66
§ 11 搜索树	69
§ 12 流动商人问题与分支定界法	70
§ 13 最佳匹配问题	77
第三章 图的算法	81
§ 1 最佳路径问题及其算法.....	81
§ 2 最短树问题及其算法.....	85
§ 3 任意两点间最短距离及其算法.....	90
§ 4 图的连通性判断.....	94
§ 5 树的生成.....	95
§ 6 DFS 算法	102
§ 7 图的块划分	109
§ 8 强连通块的划分	112

• III •

第二部分 应 用 篇

第四章 电路网络问题	119
§ 1 克希荷夫定律	119
§ 2 电路问题	119
§ 3 状态变量法理论基础	121
§ 4 状态变量法	122
§ 5 状态变量法举例	128
§ 6 若干特殊情形	140
第五章 信号流图问题	150
§ 1 矩阵与 Coates 流图	150
§ 2 代数方程组与 Mason 信号流图	151
§ 3 信号流图的运算	152
§ 4 行列式的展开法	158
§ 5 代数方程组的 Coates 图解法	160
§ 6 Mason 公式	162
§ 7 Mason 公式的证明	166
第六章 网络流图问题	174
§ 1 网络流图问题与最大流	174
§ 2 割切	175
§ 3 Ford-Fulkerson 最大流最小割切定理	176
§ 4 标号法	178
§ 5 Edmonds-Karp 修正算法, Dinic 算法及其它	181
§ 6 开关网络简介	185
第七章 匹配理论、色数问题及其它	189
§ 1 最大匹配	189
§ 2 Hall 定理	191
§ 3 匈牙利算法及例	192
§ 4 最佳匹配	194
§ 5 最佳匹配的算法及例	198
§ 6 色数问题	202
§ 7 独立集概念及其应用	206
§ 8 支配集	210
§ 9 色数的一种求法	211
§ 10 色多项式	213
§ 11 色数问题应用举例	214
§ 12 PERT 图法	216
§ 13 强连通化问题	219

第一部分

基础理论篇

第一章 图的基本概念

§ 1 引 论

图论是一新的数学分支,也是一门很有实用价值的学科,它在自然科学、社会科学等各领域均有很多应用。近年来它受计算机科学蓬勃发展的刺激,发展极其迅速。应用范围不断拓广,已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中。特别在计算机科学中,如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色。

首先我们来看几个实际的问题。

一、Königsberg 七桥问题(或 Euler 回路问题)

图论所研究的问题源远流长。远在 18 世纪,著名的 Königsberg 七桥问题就是当时很有趣的问题。Königsberg 城在 18 世纪属于东普鲁士,它位于 Pregel 河畔,河中有两个小岛,河两岸和河中两岛,通过七座桥彼此相连(见图 1-1-1)。

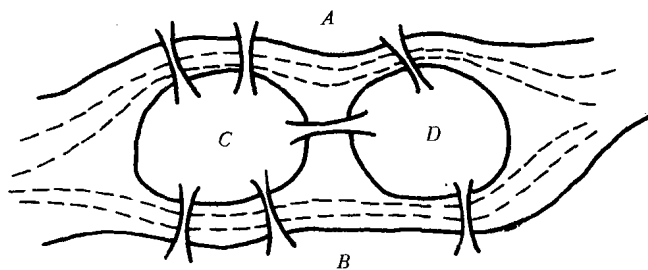


图 1-1-1

有一趣味问题:游人从两岸 A, B 或两个小岛 C, D 中任一个地方出发,要找到一条路线做到每座桥恰通过一次而最后返回原地。问题看来不复杂,但谁也解决不了,也说不出其所以然来。1736 年,当时著名的数学家 Euler 仔细研究了这个问题,他将上述四块陆地与七座桥间的关系用一个抽象图形来描述(见图 1-1-2),其中 A, B, C, D 分别用四个点来表示,而陆地之间有桥相连者则用连接两个点的连线来表示,这样上述的 Königsberg 七桥问题就变成为由点和边所组成的图 1-1-2 的

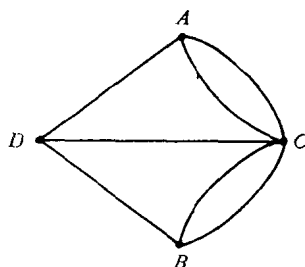


图 1-1-2

如下问题:

试求从图中的任一点出发,通过每条边一次,最后返回到该点,这样的路径是否存在?于是问题就变得简洁明了多了,同时也更一般、更深刻。这就是图论中的 Euler 问题。

关于 Königsberg 七桥问题的回答是否定的。直观上不难发现,为了要回到原来的地方,要求与每一个顶点相关联的边的数目,均应为偶数,从而可得从一条边进入,而从另一条边出去,一进一出才行。在此基础上,Euler 找到了一般的图存在这样一条回路的充分而且必要条件,详细讨论见本章第三节。

二、路径问题

如图 1-1-3 所示。顶点 $v_1, v_2, \dots, v_7$ 代表七座城市,有方向的边 $\vec{v_i v_j}$ 表示从 v_i 城到 v_j 城的单行车道,问从 v_1 城到 v_7 城有无道路相通?

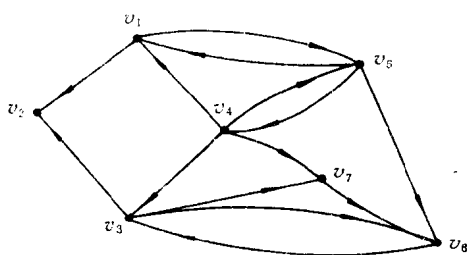


图 1-1-3

这个例子很简单,观察图 1-1-3 就不难给出解答。如果我们进一步问:若 v_1 城到 v_7 城有道路相通,共有几条不同的道路? 每条道路中间经过哪几个城市? 一般的这类问题就不能简单地通过观察法来解决。下面讨论的是路径问题的一般算法。

为此引进矩阵

$$A = (a_{ij})_{7 \times 7},$$

其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边 } (v_i, v_j) \text{ 相连;} \\ 0, & \text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相连。} \end{cases}$$

这样我们得到

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

而且得

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(2)}),$$

其中

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^7 a_{ik} a_{kj}.$$

同样可得到

$$A^3 = A^2 \cdot A = A : A^2 = (a_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^7 a_{ik}^{(2)} a_{kj} = \sum_{k=1}^7 a_{ik} a_{kj}^{(2)}.$$

一般有:

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{7 \times 7},$$

其中

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h=1}^7 a_{ih}^{(k-1)} a_{hj}.$$

现在来看看 $a_{ij}^{(k)}$ 的值具有什么实际意义。以 $a_{ij}^{(2)}$ 为例:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^7 a_{ik} a_{kj} = a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \cdots + a_{i7} a_{7j}.$$

$a_{il} \cdot a_{lj} \neq 0$ 当且仅当 $a_{il} = a_{lj} = 1$, 换句话说, 就是从 v_i 到 v_l 和从 v_l 到 v_j 都有直接道路相通, 所以 $a_{ij}^{(2)}$ 的值表示从 v_i 点出发经过某一个中间点 v_l , 然后到 v_j 的路径数目, 或形象地说 $a_{ij}^{(2)}$ 是从 v_i 出发两步到达 v_j 的路径数目。例如, $a_{42}^{(2)} = 2$ 表示从 v_4 出发两步到达 v_2 的路径有两条, 从图 1-1-3 中不难看出有 $v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ 和 $v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$, 而且仅有这两条。

明白了上述道理, 要求从 v_i 点出发经 k 步所能到达的点, 只需求矩阵 A^k 的第一行元素即可。 A^k 的第一行行向量用 $A_1^{(k)}$ 表示。求 $A_1^{(k)}$ 只需 $A_1^{(k-1)}$, 故若只计算 $A_1^{(k)}$, 可大大减少计算量, $k=2, 3, \cdots, n$ 。

同理可知 $a_{ij}^{(k)}$ 的值表示从 v_i 出发, k 步到达 v_j 的路径数目 ($a_{ij}^{(k)} = 0$ 表示不存在这样的路径) 若要追问这一路径是什么? 它沿途经过哪几个点? 只要回溯 $a_{ij}^{(k)}$ 这个数是怎么形成

的即可。

例如 $a_{17}^{(3)}=1$, 我们来看看 $a_{17}^{(3)}$ 的形成过程:

图 1-1-4 中元素下标记录所经过的路径, 如下标 15 即从 $v_1 \rightarrow v_5$ 的道路, 其它类似。

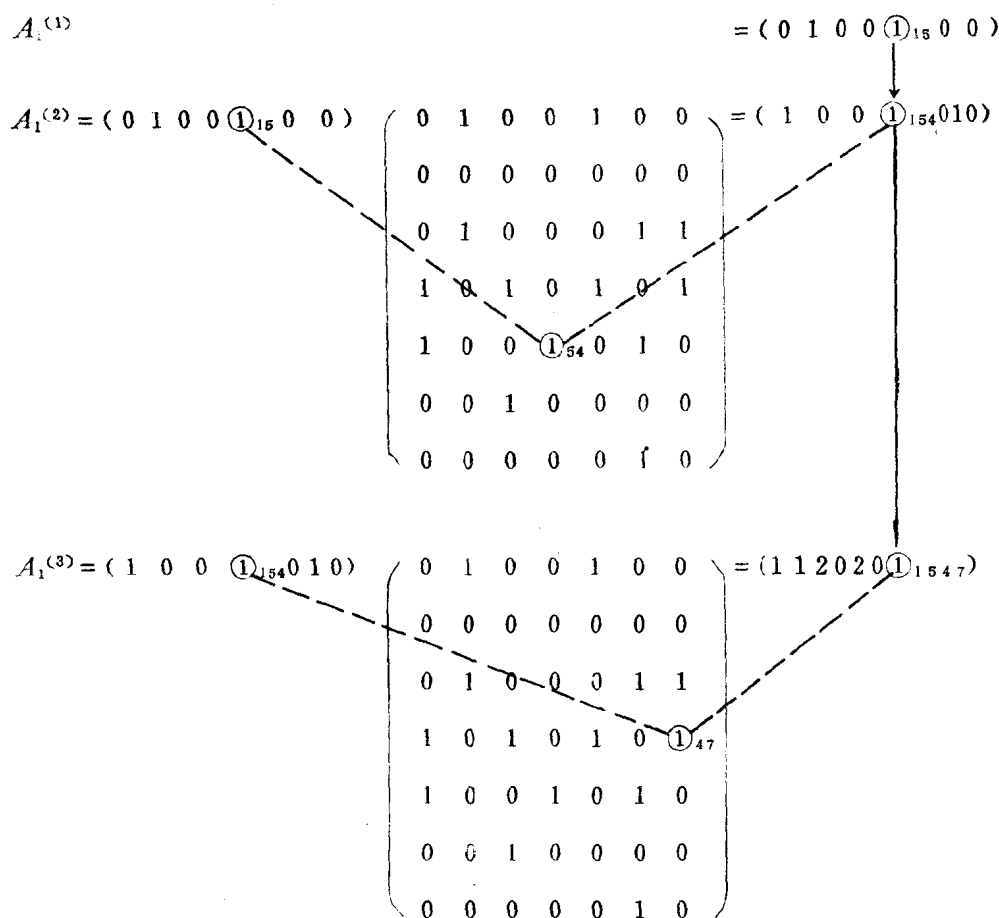


图 1-1-4

从图 1-1-4 可见, $A_1^{(3)}$ 中的 $a_{17}^{(3)}$ 由 $A_1^{(2)}$ 中的 $a_{14}^{(2)}$ 与 $a_{47}^{(1)}$ 相乘而得的, 即从 v_1 出发两步到达 v_4 (即 $a_{14}^{(2)}=1$), 再走一步可到 v_7 。而 $a_{14}^{(2)}$ 是由 $A_1^{(1)}$ 中 $a_{15}^{(1)}$ 与 $a_{54}^{(1)}$ 相乘而得的, 即从 v_1 出发第一步到 v_5 , 第二步才到 v_4 。故由 $a_{15}^{(1)} \rightarrow a_{14}^{(2)} \rightarrow a_{17}^{(3)}$ 可知, 这条路径是 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7$ 。

假若要问从 v_7 到 v_1 是否有路相通? 如上法所示, 继续求 A^4, A^5, A^6 , 观察 $a_{71}^{(k)}$ 什么时候出现非零元素, 即 k 为何值时, $a_{71}^{(k)} \neq 0$, 而且 k 的值不能超过 6, 即 $k \leq 6$ 。七个顶点, 若从其中一点出发 (设为 v_1), 走了六步还到不了 v_7 , 则再走下去也到不了。这个道理留给大家思考。

对于要证明 v_7 没有道路走到 v_1 , 还可以采用如此证法。若把点的次序重新排列为: $v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1$, 可得

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_7 & v_6 & v_3 & v_2 & v_5 & v_4 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_7 \\ v_6 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_5 \\ v_4 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & O \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} & O \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

而且不难证明,对于任何整数 k 恒有

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & O \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots.$$

这就证明 $a_{71}^{(k)} = 0$, 即从 v_7 出发不论走多少步都到不了 v_1 。实际上它们之间由于 $A_{12}^{(k)} = O$, 说明 v_7, v_6, v_3, v_2 点与 v_5, v_4, v_1 点不通, 即没有这样的道路。

这个例子只是讨论从一点到另一点有没有道路相通? 有几条道路相通? 若存在几条道路相通, 再进一步便是寻找其中一点到另一点的最短路径问题, 这是一个很有实际意义的运筹学问题。后面将讨论它。

三、路径问题应用举例

若我方两名军事人员和敌方两名军事人员同到某一现场视察, 途中要经过一条河。现只有一只小船, 每次最多只能乘两个人。为了安全起见, 当敌我双方人员同时在场时应避免出现我方人员少于敌方人员的情况, 问渡河的方案应如何?

为方便起见, 设用 (m, n, l) 表示河的左岸有我方人员 m 人, 敌方人员 n 人的状态; (m, n, r) 表示在河的右岸我方人员 m 人, 敌方人员 n 人的状态。显然可见, 若左岸为 (m, n, l) 的状态, 则右岸的状态为 $(2-m, 2-n, r)$ 。

现将全部可能的状态列举如下:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (2, 2, l), & v_7 &= (2, 2, r), \\
v_2 &= (2, 1, l), & v_8 &= (2, 1, r), \\
v_3 &= (1, 1, l), & v_9 &= (1, 1, r), \\
v_4 &= (2, 0, l), & v_{10} &= (2, 0, r), \\
v_5 &= (0, 2, l), & v_{11} &= (0, 2, r), \\
v_6 &= (0, 1, l), & v_{12} &= (0, 1, r).
\end{aligned}$$

请注意,这里不出现 $(1, 0, l), (1, 0, r)$ 状态。因表面上看我方人员多于敌方的情况。然而它的对岸则是 $(1, 2, r), (1, 2, l)$,这是不允许的。

渡船的全过程可以看作是状态的转移,则状态之间的关系,可用图 1-1-5 表示。其中点表示状态,状态间的转移用连线表示,比如从 $v_1(2, 2, l)$ 可以迁移到 $v_{12}(0, 1, r)$,只要从左岸运一敌方人员到右岸即可。 (v_1, v_{12}) 联线上的 $(0, 1)$ 符号说明这关系。显然状态之间的关系是可逆的、对称的。也就是说 v_1 可以转化到 v_{12} , v_{12} 也可以转化为 v_1 。相互转化的两状态之间用一无向边相连。如连接 v_1 和 v_{12} 等等。

原问题归结为从图 1-1-5 找一条从 v_1 到 v_7 的路径。且每条路径表达一种渡船的方案。

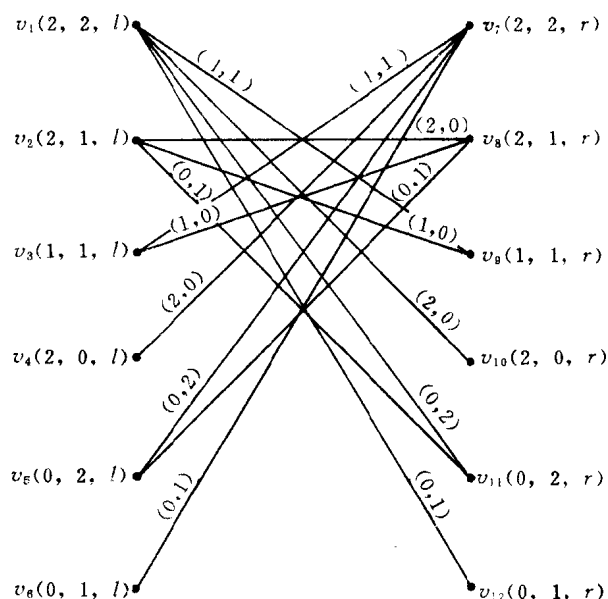


图 1-1-5

如前面例子一样可得形式如下的对称矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1 & O \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

由于两岸状态的对称性,所以矩阵 A 也是对称矩阵。点的排列次序是按下标的自然次序,即 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{12}$,其中 $A_{11} = A_{22} = O$, (转第 10 页)

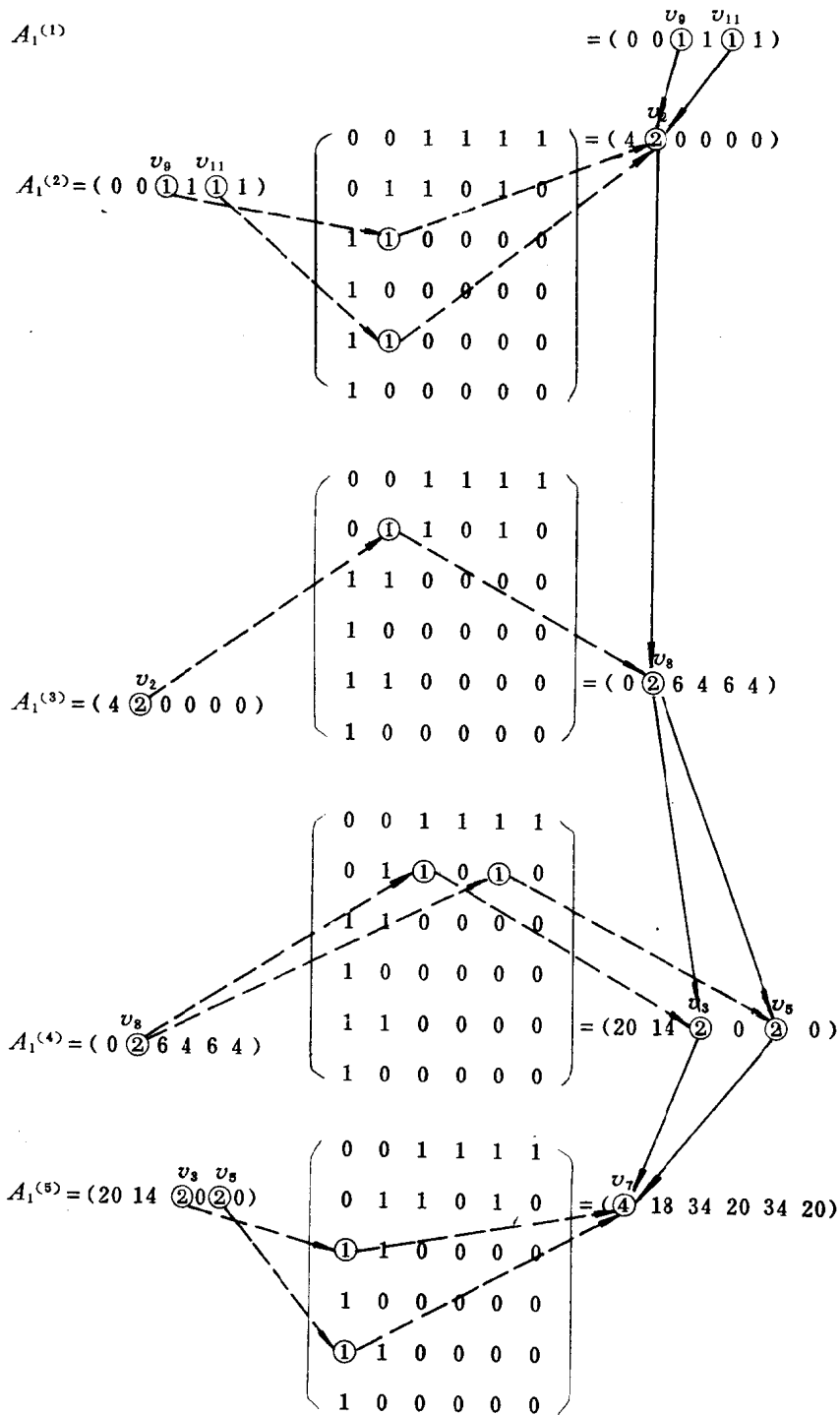


图 1-1-6

$$A_{12} = A_{21} = \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} O & \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^2 & O \\ O & \bar{A}_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^2 & O \\ O & \bar{A}_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \bar{A}_1^3 \\ \bar{A}_1^3 & O \end{pmatrix}, \dots$$

请读者说明上述规律的实际意义。

现在问题归结为求 $\bar{A}, \bar{A}^3, \bar{A}^5, \dots$, 设 $\bar{A}^k = (\bar{a}_{ij}^{(k)})$, 并注意什么时候出现 $\bar{a}_{11}^{(k)} \neq 0$ 。但 k 为奇数时使 $\bar{a}_{11}^{(k)} \neq 0$ 才是所求的。

令 $A_1^{(k)}$ 表由矩阵 $\bar{A}^k$ 中第一行元素组成的行向量。运算过程见第 9 页图 1-1-6。从运算结果分析, 可得从 v_1 到 v_7 的四条路径如下:

1. $v_1 \rightarrow v_9 \rightarrow v_2 \rightarrow v_8 \rightarrow v_3 \rightarrow v_7$,
2. $v_1 \rightarrow v_9 \rightarrow v_2 \rightarrow v_8 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7$,
3. $v_1 \rightarrow v_{11} \rightarrow v_2 \rightarrow v_8 \rightarrow v_3 \rightarrow v_7$,
4. $v_1 \rightarrow v_{11} \rightarrow v_2 \rightarrow v_8 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7$ 。

或用图 1-1-7 表示。

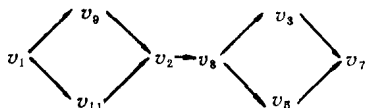


图 1-1-7

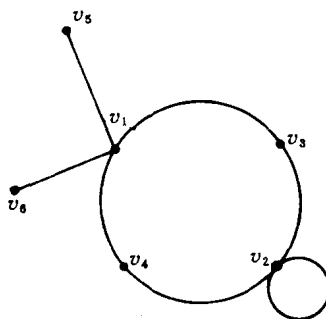


图 1-1-8

上面讨论的方法还可进一步简化。比如用一个顶点表示 (h, k) 状态, 即我方 h 人, 敌方 k 人的一种状态, 不区分它究竟是左岸还是右岸, 这是可行的。因为河的左岸和右岸是交替出现的, 状态迁移图可用图(1-1-8)来表示。

其中 $v_1 = (2, 2), v_2 = (2, 1), v_3 = (1, 1), v_4 = (0, 2), v_5 = (2, 0), v_6 = (0, 1)$ 。

特别要指出的是, v_2 点有一从 v_2 点到 v_2 的自环, 它表示从 $(2, 1)$ 状态回到 $(2, 1)$ 状态, 但已从河的一岸的 $(2, 1)$ 状态迁移到河的另一岸的 $(2, 1)$ 状态。这样的圆环我们称为自环, 或简称为环。图 1-1-8 是无向图, 实际上每条边都是双向的。

同样的道理, 从 $v_1 (2, 2)$ 点出发走一步到 $v_6 (0, 1)$, 便是从河岸 $(2, 2)$ 状态转移到对岸的 $(0, 1)$ 状态。于是问题导致求从 v_1 出发, 经过奇数步返回 v_1 的路径。

另外, 由图 1-1-8 可见, 从 v_1 到 v_4, v_4 只能有一种可能返回 v_1 , 故 v_4 可省略不考虑。 v_6 也是一样。所以问题就大大地简化了, 导致求图 1-1-9 中从 v_1 出发, 经奇数步重返 v_1 的

路径。

只要通过观察图 1-1-9 就可以很快给出问题的解答。它应该是：

1. $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$,
2. $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$,
3. $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$,
4. $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$ 。

或如图 1-1-10 所示。

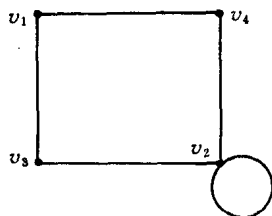


图 1-1-9

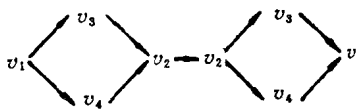


图 1-1-10

通过计算也可得出相同结果。为此令：

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

计算 $A^k, k=3, 5, \dots$, 直到出现 $a_{ii}^{(k)}$ 不为零为止。按照前面的方法计算如图 1-1-11 所示。

四、Hamilton 回路问题

Hamilton 回路是以 1856 年 Hamilton 首先提出的所谓环球航行问题而得名。如图 1-1-13 所示, 20 个顶点分别表示世界 20 个名城, 两个顶点间的连线表示这两个城市间的航线。要求旅行者从某一城市出发, 遍历各城市一次且仅一次, 最后返回出发点。

Hamilton 回路问题, 不同于 Euler 回路问题, 它是求对顶点的遍历, 在运筹学中有着实际意义。特别是求 Hamilton 回路中总距离最短的问题, 是有名的旅行商人问题, 后面将讨论它。

图 1-1-12 也可以看作是十二面体(见图 1-1-13), 每一个面都是五边形。沿着十二面体的棱, 到达每一个顶点时, 都面临着两种道路的选择: 一是向左, 另一是向右。向左的道路用 L 表示, 向右的道路用 R 表示。 LR 表示第一步向左转, 第二步向右转, 其它同理类推。

这一个 Hamilton 问题的解决颇有趣味, 顺序介绍如下。由于有:

$$(a) (LL)R = L(LR);$$