集成电光调制理论与技术

陈福深　编著

国防工业出版社

集成电光调制理论与技术

陈福深　编著

国防工业出版社

(京)新登字 106 号

图书在版编目(CIP)数据

集成电光调制理论与技术/陈福深编著.-北京:国防工业出版社,1995.5

ISBN 7-118-01362-5

Ⅰ.集… Ⅱ.陈… Ⅲ.集成电路-电光调制-概论 Ⅳ.TN761

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 11198 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
怀柔新华印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 7⅜ 204 千字
1995 年 5 月第 1 版 1995 年 5 月北京第 1 次印刷
印数 1—2000 册 定价:11.70 元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第二届评审委员会组成人员

前　言

集成光学问世以来，一直得到飞速的发展，无论如何，它毕竟是一门年轻的综合性很强的学科，在理论上和实践上都存在大量的未知领域，有待人们去发现和探索。正因为如此，集成光学仍然是光电子学领域中一门十分活跃的前沿学科。

在以晶体材料为基底制作的各类导波光学器件中，各种调制器的研究成为集成光学从基础转向应用研究最为突出的例子。集成波导调制器具有频带宽，驱动电压低，且能与其它波导器件匹配等优点，在光通信和光信息处理方面有着广阔的应用前景。以铌酸锂为材料的集成电光波导调制器，发展更为迅速，其相位调制器和强度调制器已开始进入实用化阶段。该类器件的市场销售已在一些发达国家中出现。光纤通信近年来的长足进步和广泛应用使得单模光纤本身的巨大传输容量与终端信号处理能力的矛盾更加突出，而铌酸锂电光波导调制器能在大容量传输中担任重要角色。

本书是介绍集成电光波导调制器的一本专著，作者试图从理论和实践两个方面对此调制器进行全面的论述，内容包括有电光晶体特性，集成电光波导调制器，调制器的行波电极，行波电极的反相结构，集成光学器件的制作和测试，其它类型的集成光学器件等。通过这些，期望本书读者能对集成电光调制器的基本理论和基本实践，有一个脉络清晰，全面而深入的认识。

刘树杞教授对全书进行了仔细的审阅，提出了不少修改意见，谨在此表示衷心的感谢。

写作、编辑、出版一本如此飞速发展、极为活跃领域的专著，待到正式出书之日，要想使本书包括当今发展的全部水平，是不可能的。同时，书中难免有失误之处，恳请读者不吝指正。

陈福深

于成都电子科技大学光纤重点实验室

目　　录

第一章　电光晶体特性 …… 1

1.1　麦克斯韦方程和波动方程 …… 1

1.2　晶体的各向异性介质特性 …… 6

1.3　平面波在晶体中的传播特性 …… 11

1.4　单轴晶体中光的传播 …… 15

1.5　电光效应 …… 19

1.6　电光效应举例 …… 23

1.7　电光调制 …… 30

参考文献 …… 39

第二章　集成电光波导调制器 …… 40

2.1　器件的电光效应 …… 40

2.2　相位调制器 …… 42

2.3　器件的插入损耗 …… 49

2.4　减小驱动电压和插入损耗的折衷办法 …… 54

2.5　强度调制器 …… 56

2.6　金属波导激励调制器 …… 61

参考文献 …… 67

第三章　调制器的行波电极 …… 68

3.1　复变函数和保角变换 …… 68

3.2　施瓦兹变换 …… 74

3.3　行波电极的静态分析 …… 80

3.4　行波电极的全波分析 …… 92

参考文献 …… 107

第四章　行波电极的反相结构 …… 109

4.1　行波调制中光波与微波之间的速度失配 …… 110

4.2　行波反相电极的分析和优化 …… 117

4.3 反相电极的时域分析 …… 127
4.4 电极的传输损耗 …… 132
4.5 调制器电极的设计 …… 135
4.6 电极与微波电路的连接 …… 144
参考文献 …… 150
第五章 集成光学器件的制作和测试 …… 152
5.1 介质基片的清洗 …… 152
5.2 光刻过程 …… 155
5.3 金属层的涂覆和去除 …… 161
5.4 光波导的扩散形成 …… 166
5.5 抛光与隔离 …… 171
5.6 金属膜多种厚度的实现 …… 174
5.7 质子交换与电子束曝光简介 …… 177
5.8 器件制作过程的总结 …… 181
5.9 调制器的测试方法 …… 183
5.10 调制器的测试系统 …… 189
参考文献 …… 196
第六章 其它类型的集成光学器件 …… 197
6.1 集成光开关 …… 197
6.2 偏振控制器件 …… 207
6.3 滤光器 …… 215
6.4 无偏振敏感性器件 …… 222
6.5 集成光学器件的应用 …… 227
参考文献 …… 232
附录 …… 233
一、折射率椭球原理的证明 …… 233
二、横向电光调制的矩阵运算 …… 235
三、各向异性介质中波动方程的推导 …… 237
四、式(4-20)的积分过程 …… 240

第一章　电光晶体特性

光频调制的方式是多种多样的，由于本书主要涉及电光波导调制的理论与技术，所以我们首先对电光晶体特性作一个基本的分析。

当把电压加在晶体上的时候，将导致晶体中光波传播特性发生变化，晶体的这种特性称为电光特性。这是因为晶体介电常数张量取决于电荷在晶体中的分布，外加电场导致束缚电荷重新分布，且可能导致离子晶格的微小形变，其最终结果是晶体介电常数张量改变。本章主要讨论因折射率变化产生调制的理论基础，首先阐明光学晶体的各向异性介质特性，平面波在各向异性介质中的传播规律；然后介绍折射率椭球的原理和单轴晶体中光波的传播特性。在此基础上，讨论电光效应并以典型的 KDP 晶体和 $LiNbO_3$ 晶体为例，分析研究加电压后晶体主轴的变化，最后引出电光调制原理。

1.1　麦克斯韦方程和波动方程

光在物质中传播时，主要表现波的特性，所以它必然遵循电磁场的基本规律。电磁波是随时间变化的交变电磁场，空间中的电磁场用电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 表示。为反映物质对电磁场的响应，还要引入电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。麦克斯韦方程微分形式是

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1-6}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1-7}$$

这里，$\boldsymbol{J}$ 为电流密度，ρ 为电荷密度，ε 为介电常数，μ 为磁导率，σ 为电导率。

上述的麦克斯韦方程是一组联立的偏微分方程，这些方程经过处理和变换，就能得出每个场矢量分别必须满足的微分方程。我们感兴趣的是 $\rho=0$ 和 $\boldsymbol{J}=0$，并假定介质是各向同性的，故 ε 和 μ 是标量。此外还须注意方程(1-1)、(1-2)、(1-3)和(1-4)是最基本的麦克斯韦方程。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1-8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1-9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1-11}$$

首先对式(1-8)和式(1-9)作旋度运算，得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu \boldsymbol{H}) \tag{1-12}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{1-13}$$

采用矢量等式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{A}) \tag{1-14a}$$

$$\nabla \times \varphi \boldsymbol{A} = \varphi \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \varphi \times \boldsymbol{A} \tag{1-14b}$$

$$\nabla \cdot \varphi \boldsymbol{A} = \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \varphi \tag{1-14c}$$

式中 $\boldsymbol{A}$、φ 为任意矢量和标量。在直角坐标中，式(1-14a)中的 $\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{A}) = \nabla^2 \boldsymbol{A}$，为了与一般表示法一致，我们将使用 $\nabla^2 \boldsymbol{A}$。这样式(1-12)就成为

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \nabla \times \boldsymbol{H} + \nabla \mu \times \boldsymbol{H}) \tag{1-15}$$

由于 $$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\rho$$

所以 $$\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=\rho$$

所以 $$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\tag{1-16a}$$

对于式(1-15)右边第一项,应用式(1-1),即

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J}$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mu\nabla\times\boldsymbol{H}&=\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}\\&=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1-16b}$$

最后对于式(1-15)右边第二项,应用式(1-2),即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mu\times\boldsymbol{H})&=\nabla\mu\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&=-\nabla\mu\times\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{\mu}\end{aligned}\tag{1-16c}$$

在这里假设 μ 与时间无关,如果有关,问题将会很复杂。

将式(1-16a,b,c)代入式(1-15)得

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)-\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)+\frac{\nabla\mu}{\mu}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})\\=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1-17}$$

这就是 $\boldsymbol{E}$ 矢量的波动方程,显然是相当复杂的。$\boldsymbol{H}$ 矢量的波动方程可用类似的方法求得,并可表示为

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{H}+\nabla\left(\frac{\nabla\mu}{\mu}\cdot\boldsymbol{H}\right)+\frac{\nabla\varepsilon\times(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\varepsilon}\\=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}+\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\times\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{J}\end{aligned}\tag{1-18}$$

在通常情况下,晶体材料的导磁率等于真空的导磁率 μ_0,所以

$\nabla\mu=0$。此外，在所研究的区域里无源 $\rho=0$，且 $\sigma=0$，所以式(1-17)、(1-18)可简化成

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1-19a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \frac{\nabla\varepsilon\times(\nabla\times\boldsymbol{H})}{\varepsilon} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{1-19b}$$

但这两式仍然很复杂，不易求解，当 ε 随坐标变化缓慢情况下，$\nabla\varepsilon=0$，所以得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1-20}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{1-21}$$

其中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

式(1-20)和式(1-21)是熟知的波动方程，表明电磁场以波动形式在空间传播，速度为 v。

在直角坐标系统中，场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的每一个分量都满足下列形式的波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1-22}$$

式中，ψ 代表 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的任一分量，这样就把矢量形式的波动方程变成了较为简单的标量形式的波动方程。

当 ψ 的空间变化仅限于在某一个坐标方向如 z 轴方向时，式(1-22)就成为一维波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

解之，得

$$\psi(z,t)=\psi_0\exp[j(\omega t-kz)] \tag{1-23}$$

这里

$$k=\frac{\omega}{v} \tag{1-24}$$

k 是传播常数或波数。式(1-23)表示的是简谐平面波，同样对三维波动方程用分离变量法可求出这个方程的三维平面谐波函数

$$\psi(x,y,z,t) = \psi_0\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1-25}$$

式中，矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_x x + \boldsymbol{i}_y y + \boldsymbol{i}_z z$$

波矢量 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{i}_x k_x + \boldsymbol{i}_y k_y + \boldsymbol{i}_z k_z \tag{1-26}$$

$$|\boldsymbol{K}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1-27}$$

当 $\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} =$ 常数，即 ψ 取定值时，由此可确定空间中一组称为等相位面的平面，等相位面的法线方向就是 $\boldsymbol{K}$ 矢量的方向，等相位面也是平面波前进时相位始终不变的波阵面。

把复指数形式的平面谐波对时间求导，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]\} = j\omega\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]$$

如对一个空间变量求偏导，则得

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]\} = \frac{\partial}{\partial x}\{\exp[j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]\}$$

$$= -jk_x\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]$$

利用算符 $\nabla = \boldsymbol{i}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{i}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$

的关系，得出

$$\nabla\{\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]\} = -j\boldsymbol{K}\exp[j(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})]$$

于是我们便得到下列的算符关系

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\longrightarrow j\omega \\ \nabla &\longrightarrow -j\boldsymbol{K} \end{aligned}\right\} \tag{1-28}$$

根据这组算符关系，可把平面谐波的麦克斯韦方程表示为

$$\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{E} = \mu\omega\boldsymbol{H} \tag{1-29}$$

$$\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{H} = -\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1-30}$$

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-31}$$

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1-32}$$

我们已经知道，在场强较小能忽略非线性效应的情况下，ε 和 μ 与场强大小无关。这样介质电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和电位移 $\boldsymbol{D}$ 的关系，磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{H}$ 间的关系是

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1-33}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{1-34}$$

在研究光波在晶体中传播时，通常遇到的是不导电和非磁性的物质，因而 $\sigma=0, \boldsymbol{M}=0$。电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 还可用另一种形式表示

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1-35}$$

这里 χ 称为电极化率

$$\chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \tag{1-36}$$

在各向同性介质中，χ 是一个标量，所以介质内任一点上的各个方向，χ 均为常数。各向异性介质除某些特殊方向外，无此规律。所以 χ 需要用张量矩阵来表示，为此我们利用包含矢量 $\boldsymbol{P}$ 的麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1-37a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1-37b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{1-37c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1-37d}$$

对式(1-37a)两边分别求旋度，再代入式(1-37b)，则得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1-38}$$

如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{P}=0$，则波动方程(1-38)可变成

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1-39}$$

这里，式(1-38)表示的是普遍形式的波动方程，其右边项 $\mu_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2}$ 代表在非导电介质中($\sigma=0$)的电磁波的极化波源，由于它的作用，使电磁波产生散射、吸收和色散等现象。

1.2 晶体的各向异性介质特性

因为晶体是由某种对称性的原子或分子有规则、周期性的排

列组成的，晶体内电位移 $\boldsymbol{D}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 间除某些特殊方向外，是不同方向的，所以感应极化 $\boldsymbol{P}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的关系可表作

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z) \end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

这里，系数 χ_{ij} 是一个 3×3 的矩阵。如果我们不用方程(1-40)而用介电常数张量来表述晶体中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系，则是

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z \\ D_y &= \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z \\ D_z &= \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \end{aligned} \tag{1-41}$$

或

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j \tag{1-42}$$

式中遵守对重复的下标进行求和的习惯。式(1-41)如用矩阵表示，可得

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1-43}$$

由于我们假定介质是均匀的、无吸收的和磁性上各向同性的。那么在各向异性电介质中储电场的能量密度为

$$U_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}E_i\varepsilon_{ij}E_j \tag{1-44}$$

所以

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\frac{\partial E_i}{\partial t}E_j + E_i\frac{\partial E_j}{\partial t}\right) \tag{1-45}$$

根据电磁场坡印廷定理，单位体积内散发出的功率等于单位体积内电场和磁场储能的减少率减去单位体积内焦耳热损耗，因为是无损介质，不存在焦耳热损耗，所以可得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-46}$$

把式(1-42)代入，上式可写成

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = E_i\varepsilon_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-47}$$

因为坡印廷矢量相当于介质中的能流，方程(1-47)右边第一项必须等于$\frac{\partial U_e}{\partial t}$，因此有下列方程

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\frac{\partial E_i}{\partial t}E_j + E_i\frac{\partial E_j}{\partial t}\right) = \varepsilon_{ij}E_i\frac{\partial E_j}{\partial t} \tag{1-48}$$

从上式可以得到

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \tag{1-49}$$

这说明介电常数 ε 是一个对称张量矩阵，也就是说晶体的二阶张量矩阵中的全部九个分量只有六个是独立的。

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

这里

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

根据线性代数理论，确定的 ε 矩阵具有确定的特征值 λ，因此有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{1-50}$$

亦即

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx} - \lambda)e_x + \varepsilon_{xy}e_y + \varepsilon_{xz}e_z &= 0 \\ \varepsilon_{xy}e_x + (\varepsilon_{yy} - \lambda)e_y + \varepsilon_{yz}e_z &= 0 \\ \varepsilon_{xz}e_x + \varepsilon_{yz}e_y + (\varepsilon_{zz} - \lambda)e_z &= 0 \end{aligned} \tag{1-51}$$

要保证上式具有非零解，其行列式必须为零

$$\det\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{1-52}$$

一般情况下 ε 矩阵分量为实数，线性代数理论指出，实对称矩阵不同特征值的特征矢量是正交的。所以根据式(1-52)解出的三个特征值 λ_1、λ_2 和 λ_3 代入式(1-51)后，就可得到 ε 矩阵的三个特征矢量 e_1、e_2 和 e_3，可以证明如取三个坐标轴方向分别为这三个特征矢量