

工程流体力学

潘文全



清华大学出版社

FB126

TP126
120

307616

工 程 流 体 力 学

潘文全 编著



清华大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了流体力学的基本概念和基本原理。在阐述过程中,力求从物理意义上使读者认识和理解流体运动所遵循的基本规律。为了真正掌握和应用这些规律,书中对于若干典型的流体工程问题进行了示范性分析。

本书可作为高等工科院校热能、机械、透平、工物、汽车、化工、液压、环保等专业本科生“工程流体力学”课程的教材。也可供从事流体力学和工程流体力学教学的教师以及工程技术人员和科学工作者参考。

1988/12

工 程 流 体 力 学

潘文全 编著

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

★

开本: 787×1092 1/16 印张: 22.5 字数: 600 千字

1988 年 7 月第 1 版 1988 年 7 月第 1 次印刷

印数: 00001—10000 定价: 3.75 元

ISBN 7-302-00166-9/O·38 (课)

前 言

流体力学是研究流体运动所遵循的基本规律以及流体与固体相互作用的一门学科。

流体力学作为宏观力学的一个重要分支,与固体力学一样同属于连续介质力学的范畴,它利用物理学的基本原理研究流体运动的规律。流体力学既具有基础学科的性质,又具有鲜明的技术学科的特点。

流体工程过去、现在和将来都是推动流体力学发展的强大动力。早期的水利工程是推动水力学形成和发展的主要动力,近代的航空工程、航天工程是推动空气动力学发展的主要动力。目前推动流体力学发展的主要动力已不限于水利工程和航空 航 天 工 程,在能源工程、海洋工程、生物工程、化工工程、输运工程乃至各类机械工程中,均提出了大量的运动形态更复杂的急待解决的流体力学问题,它们是推动流体力学向前发展的强大动力。

解决流体力学问题的最基本手段是实物试验和模拟试验,特别是对于那些数学模型尚不清楚的复杂问题,试验研究已经成为唯一可靠的手段。对于数学模型业已建立起来的问题,在某些情况下采取数值计算的手段,可能更加方便。流体力学理论工作的主要内容是建立与客观实际相符合的数学模型。

学习和描述一门学科规律不同于这门学科本身的形成与发展规律。本书将以流体力学学科本身的系统为系统,阐述流体的运动规律。为了更深刻地理解和掌握这些规律,必须结合各种具体条件加以灵活运用。从更深刻的意义上看,掌握一门学科的研究方法比掌握一门学科的内容更加重要。

本书的结构如下:第一篇为流场基本概念;第二篇为流体动力学基本原理及流体工程;第三篇为流场的一般性质;附篇为量纲理论与场论。

流场基本概念和流体动力学基本原理是本门课程的基础,在阐述这些基本概念和原理的过程中,力求从物理意义上使初学者认识和理解流体运动所必须遵循的基本规律。作者以为,基本概念和基本原理的阐述并不一定要使用精细的数学方法,其实,若数学方法使用不当,反而可能造成不必要的障碍。因此在第一篇和第二篇中力求避免应用复杂的数学方法。

为了真正掌握和运用流动的基本规律,还必须对若干工程中提出的典型问题加以示范性分析。

在正确理解基本概念、熟练掌握基本原理的基础上,进而运用更精细的数学手段对流场进行微分分析,从而进一步深化理解流体的运动规律,并为读者涉足于流体力学其它领域提供必要的准备。这就是为什么在工程流体力学课程中要增设第三篇内容的原因。

附篇中的量纲理论和场论方法是为了给未曾学习过这些内容的读者提供必要的补充知识而增设的。量纲理论作为一种分析问题的手段,具有相对独立性。对于工程师来说,掌握这个简单的有效手段将是有益的。场论方法是进行微分分析的基本手段。

本书可作为高等工科院校的能源、流体工程、动力、机械、化工、水利、航运、汽车、自动化等专业本科学生的教材,亦可供从事与流体工程有关的工程技术人员参考。本书在结构上考虑到适应不同类型专业的要求。对于中等学时课程,可以取第一、第二篇;对于多学

时课程可以取全部篇章。

本书在编写过程中得到了我的同事和朋友们的热心支持和关心。在此应向蔡敏学、张兆顺、汤荣铭以及王旭光表示谢意。还应对我的学生严幼幼、吕则陈，金建华等表示谢意，他们参加了本书的部分制图和校对手稿的工作。

欢迎来自读者和同行专家们的批评指教。

潘文全

1987 年 2 月于清华大学

主要符号表

符号	名称	符号	名称
A	积面	p	单位面积上的压力
a	拉格朗日自变量	$\mathbf{p}$	应力向量
$\mathbf{a}$	加速度向量	p_{ij}	应力张量的分量 ($i, j=1, 2, 3$)
B	任意物理量	Q	体积流量、热流量
$\mathbf{B}$	速度向量势, 任意有向量的物理量	Q_m	质量流量
b	拉格朗日自变量	q	散度函数
c	积分常数	q_R	单位质量所接受的辐射热
c_p	定压比热	q_λ	单位面积所接受的传导热
c_v	定容比热	q_i	正交曲线坐标轴 ($i=1, 2, 3$)
D	直径、变换耶可比行列式	$\mathcal{R}$	关于 R 的函数
d	直径	R	球坐标系中坐标轴之一
E	动能、弹性模数	Re	雷诺数
e	单位质量的内能	r	柱坐标系中坐标轴之一
$\mathbf{e}_i$	单位向量 ($i=1, 2, 3$)	$\mathbf{r}$	向径
F	力	S	距离, 熵
$\mathbf{F}$	力向量	s	单位质量的熵, 沿流线的自变量
f	单位质量力, 函数	T	绝对温度
$\mathbf{f}$	单位质量力向量	t	时间
G	重量流量, 引力常数	U	势、速度
g	重力加速度值	u	速度在 x 轴方向上的分量
$\mathbf{g}$	重力加速度向量	$\mathbf{V}$	速度向量
H	高度	v	速度在 y 轴方向上的分量, 比容
h_i	拉梅系数 ($i=1, 2, 3$)	V	速度、体积
I_m	复数的虚部	W	功
i	单位质量的焓	w	速度在 z 轴方向上的分量
$\mathbf{i}$	x 轴方向的单位向量	x	直角坐标系的坐标轴之一
J	涡通量	y	直角坐标系的坐标轴之一
$\mathbf{j}$	y 轴方向的单位向量	z	直角坐标系的坐标轴之一、复数
$\mathbf{k}$	z 轴方向的单位向量	α	夹角
L	任意曲线长度	β	夹角
l	长度、沿流线的自变量	Γ	环量
M	质量、力矩、动量矩、马赫数	γ	比热比
m	质量	γ_{ij}	角变形分量 ($i, j=1, 2, 3$)
$\mathbf{M}$	力矩向量、动量矩向量	δ	夹角、距离
$\mathbf{n}$	法线单位向量	E	变形速率张量
n_i	单位向量在各坐标轴上的分量 ($i=1, 2, 3$)	ϵ	柱坐标系与球坐标系中坐标轴之一
P	应力张量	ϵ_{ij}	变形速率张量的分量 ($i, j=1, 2, 3$)

符号	名称
ζ	直角坐标系中坐标轴之一
η	直角坐标系中坐标轴之一
Ξ	关于 θ 的函数
θ	球坐标系中坐标轴之一
λ	热传导系数
μ	动力粘性系数
ν	运动粘性系数
ξ	直角坐标系中坐标轴之一
π	冲量
ρ	密度

符号	名称
σ	距离
τ	体积
φ	速度势
χ	复势
ψ	流函数
Ω	涡量
Ω	涡向量
ω	旋转角速度
ω	旋转角速度向量

目 录

主要符号表

第一篇 流场的基本概念

第一章 流场的描述方法	1
§1.1 连续介质概念	1
§1.2 描述流体运动的拉格朗日方法	3
§1.3 描述流体运动的欧拉方法	5
§1.4 两种方法的关系	9
§1.5 质点导数	11
练习题	13
第二章 流体的力学性质	15
§2.1 流体的易变形性与粘性	15
§2.2 流体的可压缩性	20
§2.3 液体的表面张力	22
§2.4 作用在流体上的力	24
练习题	27
第三章 静止流场的性质	29
§3.1 静止流场中的应力性质	29
§3.2 流体静平衡方程	29
§3.3 重力场中的静止液体	31
§3.4 重力场中静液对物面的作用力	32
§3.5 重力场中静止气体中的压力分布	38
§3.6 非惯性坐标系中的静止液体	41
练习题	44

第二篇 流体动力学基本原理及流体工程

第四章 流体动力学基本原理	47
§4.1 质量守恒原理——连续方程	47
§4.2 管流连续方程	50

§4.3 动量守恒原理——动量方程的一般形式	52
§4.4 伯努利方程	56
*§4.5 柯西-拉格朗日方程	67
§4.6 流线法向动量方程	75
§4.7 非惯性坐标系中的动量方程	78
§4.8 动量矩守恒原理——动量矩方程	83
§4.9 能量守恒原理——能量方程	87
练习题	93
第五章 流体机械原理	97
§5.1 透平机械工作原理	97
§5.2 轴流式透平机械气动性能	99
§5.3 径流式透平机械气动性能	103
§5.4 翼型升力原理	107
§5.5 翼型与推进及飞行	112
练习题	114
第六章 管内粘性流动与阻力	116
§6.1 层流与湍流	116
§6.2 管流阻力	119
§6.3 局部阻力	122
§6.4 圆管内定常层流分析	128
§6.5 平行平板间的定常层流分析	134
§6.6 流体动压润滑原理	136
§6.7 湍流模型——混合长度理论及应用	139
§6.8 管内完全发展湍流流场	145
练习题	148
第七章 物体绕流边界层与阻力	152
§7.1 边界层概念	152
§7.2 边界层的特征厚度	156
§7.3 边界层动量方程	158
§7.4 平板层流边界层	160
§7.5 平板湍流边界层	166
§7.6 混合边界层	170
§7.7 边界层分离与锐缘效应	172
§7.8 圆柱绕流现象与阻力	174
§7.9 机翼的升力与阻力	178
练习题	182

第八章 气体高速流动	185
§8.1 小扰动在可压缩流体中的传播特征	185
§8.2 一元管流基本方程	187
§8.3 参考状态	189
§8.4 变截面喷管中等熵流动特征	195
§8.5 渐缩喷管中的等熵流动	197
§8.6 拉瓦尔喷管中的等熵流动	200
§8.7 正激波	205
§8.8 正激波基本关系式	207
§8.9 运动激波	216
§8.10 拉瓦尔喷管中有激波流动	218
§8.11 空间流场中的小扰动传播特征	222
§8.12 超声速气流的偏转流动	224
§8.13 斜激波	228
§8.14 高速气流中的毕托管	232
练习题	233

*第三篇 流场的一般性质

*第九章 流场的运动学性质	237
§9.1 微元流体线的运动	237
§9.2 若干有几何意义的运动	239
§9.3 海姆霍兹速度分解定理	242
§9.4 有旋流场的运动学性质	246
§9.5 无旋流场的运动学性质	248
§9.6 不可压流场的运动学性质	252
§9.7 不可压无旋流场的运动学性质	254
练习题	254
第十章 理想流体动力学一般	255
§10.1 理想流体动力学方程组的封闭性	255
§10.2 全流场的柯西-拉格朗日方程	255
§10.3 开尔文定理——旋涡的保持性	257
§10.4 克罗克定理——旋涡与熵的关系	258
§10.5 不可压平面无旋流动的性质	259
练习题	270
*第十一章 粘性流体动力学性质	272
§11.1 牛顿流体本构方程	272

§11.2	纳维-斯托克斯方程	273
§11.3	能量方程	274
§11.4	粘性流体动力学问题的建立	277
§11.5	粘性流动的基本性质	279
练习题		280

附篇 量纲理论与场论

第十二章	量纲理论	282
§12.1	物理量的量纲	283
§12.2	量纲性质	285
§12.3	π 定理	285
§12.4	π 定理用于简化函数关系	288
§12.5	π 定理用于寻求相似律	290
练习题		296
*第十三章	场论知识	298
§13.1	常见的几种坐标系	298
§13.2	曲线坐标系的一般性质	300
§13.3	标量函数的梯度	304
§13.4	向量函数的散度	308
§13.5	向量函数的旋度	311
§13.6	向量函数的梯度	313
§13.7	哈密顿算子及其运算规则	315
练习题		318
附 录		320
附录 I	常见流体的密度和重度	320
附录 II	不同温度下水、空气和水银的密度	320
附录 III	普通液体的表面张力 (20℃, 与空气交界)	320
附录 IV	常见气体的粘性系数	321
附录 V	水的粘性系数	321
附录 VI	空气的粘性系数	321
附录 VII	常见气体的比热 c_p	322
附录 VIII	等熵流动关系	323
附录 IX	正激波关系	330
附录 X	完全气体的普朗特-迈耶函数 ν	341
附录 XI	标准大气	343
索引		344

第一篇 流场的基本概念

第一章 流场的描述方法

流体所占据的空间称为流场。

流体的运动现象虽然千姿百态，变幻无穷，但它总是遵循着确定的运动规律。

在研究流动现象时，特别是定量分析流场中各种参数之间的关系时，必须选择适当的描述方法。本章将讨论两种常用的描述方法。在讨论这些方法之前，首先应当了解连续介质的概念。

§ 1.1 连续介质概念

首先观察一个有趣的现象，从中可以提出我们所要讨论的问题。

为了测定某个恒温空间（如恒温箱中）气体的温度，可以采用各种尺度的温度计来进行测量。我们将会发现，当温度计的特征尺寸（如温度计探头直径）远远大于气体分子自由程时，各种温度计所测得的温度值相同。但是，若所采用的温度计的特征尺寸接近于或小于气体的分子自由程时，则所测得的温度值不再是稳定的数值，而且温度计的特征尺寸越小，所测得的温度值将越不稳定。试问：产生这个现象的原因何在？

在建立了流体的连续介质概念之后，这个问题可以得到满意的回答。为了建立连续介质概念，首先应当讨论关于流体质点的概念。

一、流体质点的概念

设想进行这样一个试验：用各种不同的取样方式测定空间某确定位置上流体的平均密度。

为了测定空间某点 $P(x, y, z)$ 上的流体的平均密度，可以在 P 点处选取一微元体积 $\Delta\tau$ ，如图 (1.1,a) 所示，并测出 $\Delta\tau$ 中的流体质量。若测得的质量为 Δm ，则微元体积中的平均密度为 $\Delta m / \Delta\tau$ 。当然，绕 P 点的微元体 $\Delta\tau$ 的体积可以任意选取。分别取各种不同体

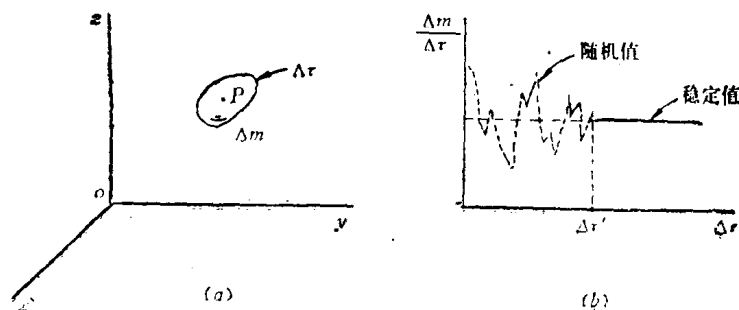


图 1.1 流体质点的概念

积的微元体进行上述量测,从而得到若干个代表该位置上的平均密度的数值,将这些结果绘于图(1.1,b)上。用虚线将试验点连结起来的线并非是稳定的曲线,它表示的是某一随机值,不同时刻可能有不同的值。图中实线表示的是对时间的平均值。由上述结果可以发现,事实上存在一个特征体积 $\Delta\tau'$ 。当所选取的被测微元体 $\Delta\tau$ 满足 $\Delta\tau > \Delta\tau'$ 时,则所得到的平均密度 $\Delta m/\Delta\tau$ 为稳定值,而当 $\Delta\tau < \Delta\tau'$ 时,则所得到的平均密度为随机值,而且 $\Delta\tau$ 取得越小,这种随机性越大。

对于上述现象可以解释如下。由于流体是由大量分子所组成的,在所取的微元体 $\Delta\tau$ 中,包含了大量分子。由于分子的运动,在微元体的边界上总是有大量分子进入或飞出微元体。如果微元体 $\Delta\tau$ 取得足够大,则其中分子数处于随机平衡状态,因此其中质量不会随机波动。我们总可以找到一个合适的微元体积 $\Delta\tau'$,尽管这个体积很小,但在此体积中仍包含了足够数量的分子,以致尚能在分子统计平均意义上(即宏观意义上)存在平均密度值。

由此可以得出结论: $\Delta\tau'$ 是使流体具有宏观特性的允许的最小体积。我们把 $\Delta\tau'$ 中的分子的总和视为流体的最小单元,并称它为流体质点。

流体质点的任何一个物理参数(如密度、温度等),都是宏观意义上的物理参数,即足够多的分子的统计平均的宏观表现。

例如,空间某点的流体质点的密度,其物理含义是

$$\rho_{\text{质点}} = \rho_{\text{平均}} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau'} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau'}$$

如果在所研究的流体力学问题中(例如,在空气中飞行的飞行器),问题的特征尺寸(如机翼的宽度) L 能够满足 $L \gg \Delta\tau'^{1/3}$,则可视 $\Delta\tau' \rightarrow 0$,于是流体密度的定义可写成

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \quad (1.1)$$

在明确了流体质点的概念之后,连续介质的概念就不难建立了。

二、流体的连续介质概念

流体的连续介质概念包含两个内容:

(1) 流体是由连续排列的流体质点所组成,即空间每一点都被确定的流体质点所占据,其中并无间隙。于是流体的任一物理参数 B (密度、温度等)可以表达成空间坐标 (x, y, z) 及时间 t 的连续函数 $B = B(x, y, z, t)$ 。

(2) 在充满连续介质的空间,物理参数 B 不单是 x, y, z, t 的连续函数,而且是连续可微函数(在某些特殊情况下,允许在某些点、线、面上存在不连续)。严格说来,这是一种假定,但这是被实践证明了的正确的假定。

综上所述,连续介质概念是建立在流体质点概念的基础之上的,而流体质点的概念存在的条件是:被研究的具体问题的特征尺寸 L 必须满足 $L \gg \Delta\tau'^{1/3}$ 。在一般的流体力学问题中,这个条件是能够满足的。因而在一般情况下,确实可以把流体作为连续介质来处理。

例如,对于许多空气动力学问题(如在空气中飞行的飞机),它们的特征尺寸往往具有1m, 1cm乃至1mm的数量级。在这类问题中,能了解到 10^{-8}cm 距离上的物理参数的平均值在工程中已足够精确。而在 $(10^{-8})^3\text{cm}^3$ 的微元体积中,(在标准大气条件下),包含的分子数约为 $N = 2.69 \times 10^{10}$ 。如此巨大数目的分子足可以表现出与分子数无关的宏观

特性。显然,在这样的工程问题中,流体可以作为连续介质处理。

当问题的特征尺寸小于流体质点的特征尺寸时,流体连续介质概念不再有效,例如,当航天器在地球外层空间飞行时,由于当地气体异常稀薄,乃至分子的自由程与飞行器的特征尺寸具有相同量级。显然,在这种情况下,要得到飞行器表面上的气体宏观物理参数是不可能的,因为连续介质概念已失去意义,这类问题已不属于普通流体力学研究的范畴,而属于稀薄气体动力学或分子动力学研究的范畴。

在建立了流体质点和连续介质概念之后,可以分别讨论描述流体运动的两种方法。

对于任何一个物理现象的描述,都存在采用什么方法的问题,同一个现象可以用不同的方法来描述。显然,这不是原则问题,但对于某些特定的问题,总希望采用最简单而又方便的方法。

在流体力学中通常采用下列两类方法:

(1) 拉格朗日法, (2) 欧拉法,

§ 1.2 描述流体运动的拉格朗日方法

拉格朗日方法是以流场中每一流体质点作为描述对象,描述它们的位置、速度及其它物理量对于时间的分布规律。这种方法是沿袭了理论力学中的质点系方法。既然以质点系作为描述对象,而流体是由连续排列的流体质点所组成,于是面临的首要问题是如何标志或识别每一个流体质点。

一、拉格朗日自变量——质点的标志

最简单的方法是以某一时刻 t_0 质点所处的位置 (x_0, y_0, z_0) 作为该质点的标志。为清楚起见,以 (a, b, c) 表示 (x_0, y_0, z_0) 。每一个质点都对应一组 (a, b, c) 值,而不论此质点在其它时刻已运动到什么位置以及其物理参数经历了什么变化。

例如,质点“1”的标志是 $x_0 = a_1, y_0 = b_1, z_0 = c_1$, 该质点的任一物理参数 B 对于时间的变化规律可写成 $B = B(a_1, b_1, c_1, t)$ 。同理,质点“2”的标志是 $x_0 = a_2, y_0 = b_2, z_0 = c_2$, 该质点的任一物理参数 B 对于时间的变化规律可写成 $B = B(a_2, b_2, c_2, t)$, 如此等等。若将 a, b, c 视为变量,则质点的某一物理参数 B 可用一个公式表示为 $B = B(a, b, c, t)$ 。由于 a, b, c 是变量,故 B 可视为 a, b, c, t 的函数,其中 a, b, c 被称为拉格朗日自变量。这个函数表示了全部流体质点的某物理量 B 对于时间的分布规律。

二、迹线——质点的位置

质点运动的轨迹线称为迹线。如图(1.2)所示,它的数学表达式为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ 或写成

$$x = x(a, b, c, t), y = y(a, b, c, t), z = z(a, b, c, t) \quad (1.2)$$

由于 a, b, c 是变量,因此上式为全部流体质点的迹线方程,也就是质点的位置方程。

例如,下式就是质点位置方程

$$x = a \cos k_1 t - b \sin k_1 t, y = a \sin k_1 t + b \cos k_1 t, z = k_2 t + c$$

式中 k_1, k_2 为常数, a, b, c 为 $t = t_0 = 0$ 时刻各质点所处的位置。在 $t = t_0$ 时刻,上式

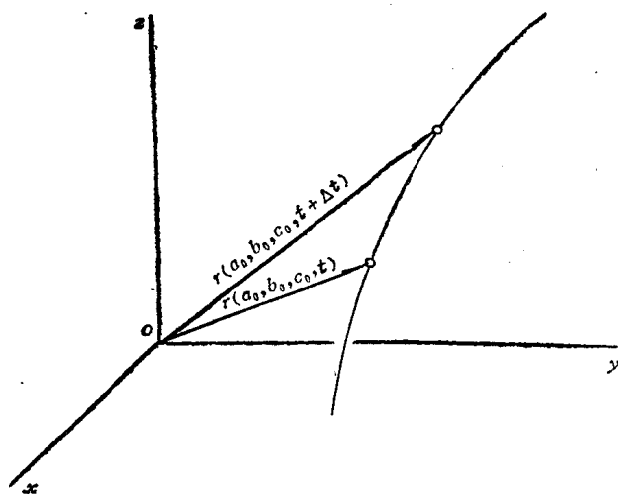


图 1.2 迹线

表示了每一质点每一时刻的位置。

三、串线

相继通过空间一固定点的流体质点依次串联而成的线称为串线。为观察串线，可以在空间固定点给通过此点的流体质点染上某种可见颜色，这条带颜色的线就是串线，故串线又称色线。烟筒冒出的烟就属于串线，如图（1.3）所示。

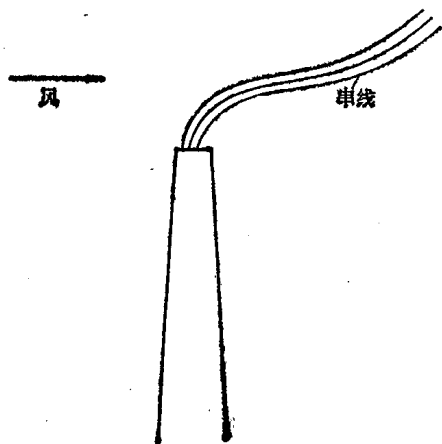


图 1.3 串线

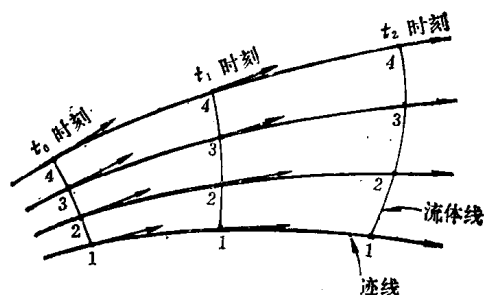


图 1.4 流体线

四、流体线

由确定的一组流体质点所组成的连续线称为流体线。在运动过程中，流体线总是在空间不断改变自己的位置。如图（1.4）所示。

五、质点速度

质点的位置对于时间的变化率称为质点速度。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_{a,b,c}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{i \Delta x_{a,b,c} + j \Delta y_{a,b,c} + k \Delta z_{a,b,c}}{\Delta t} \\ &= i \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} + j \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} + k \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

即
$$u = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

式中 $\partial/\partial t$ 是视 a, b, c 为常数的偏微分。 u, v, w 分别为速度 $\mathbf{V}$ 在 x, y, z 轴方向的分量。

例 1.1 已知质点的迹线方程为

$$x = a \cos k_1 t - b \sin k_1 t; \quad y = a \sin k_1 t + b \cos k_1 t; \quad z = k_2 t + c$$

试求质点速度 $\mathbf{V}$ 。

解
$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -ak_1 \sin k_1 t - bk_1 \cos k_1 t$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = ak_1 \cos k_1 t - bk_1 \sin k_1 t$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = k_2$$

六、质点加速度

质点的速度对于时间的变化率称为质点的加速度。

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = i \frac{\partial u(a,b,c,t)}{\partial t} + j \frac{\partial v(a,b,c,t)}{\partial t} + k \frac{\partial w(a,b,c,t)}{\partial t}$$

即
$$a_x = \frac{\partial u(a,b,c,t)}{\partial t} \quad a_y = \frac{\partial v(a,b,c,t)}{\partial t} \quad a_z = \frac{\partial w(a,b,c,t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

例 1.2 已知质点速度对于 a, b, c, t 的分布函数如上例所示, 试求质点的加速度 $\mathbf{a}$ 。

解
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = -ak_1^2 \cos k_1 t + bk_1^2 \sin k_1 t$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = -ak_1^2 \sin k_1 t + bk_1^2 \cos k_1 t$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

§ 1.3 描述流体运动的欧拉方法

欧拉法是以流场中每一空间位置作为描述对象, 描述在这些位置上流体物理参数对于时间的分布规律。这种方法类似于电场、磁场的描述方法。

一、欧拉自变量——空间位置的标志

既然以空间位置作为描述对象, 则首先面临的问题是如何标志或识别空间位置。识别空

间位置的最简单方法是采用空间坐标系。其实任何坐标系都是为标志空间位置而建立的。最简单和基本的空间坐标系是直角坐标系。

在直角坐标系中，任一点 (x, y, z) 上的某一物理参数 B 可以表示成 t 的函数。

$$B = B(x, y, z, t) \quad (1.5)$$

若视 x, y, z 为自变量（通常称 x, y, z 为欧拉自变量），则上述函数表示了任意时刻物理量 B 对于空间位置的分布规律，或者说，上述函数表示了任一位置上的物理量 B 对于时间的分布规律。

例如，在流场中每一点，每一时刻都被确定的流体质点所占据，它们具有确定的密度、压力、温度，因此密度、压力、温度是坐标点 (x, y, z) 及时间 t 的函数 $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $T = T(x, y, z, t)$, $p = p(x, y, z, t)$ 。根据流体的连续介质假定，这些函数在一般情况下是空间位置 and 时间的连续可微函数。

二、速度

对于运动的流场，可以用流体运动速度来描述流动状态。在流场中每一确定点，每一确定时刻都被确定的流体质点所占据，而质点具有确定的速度。因此，该时刻、该空间点的速度就是该时刻处于该点的流体质点的速度。

如图(1.5)所示，符号 V 表示某时刻 t ，某位置 (x, y, z) 上的流体质点的速度。速度 V 是向量，它在直角坐标轴上的投影为 u, v, w ，即 $V = iu + jv + kw$ ，式中 i, j, k 为沿 x, y, z 轴的单位向量。

运动流场中每一点每一时刻都有确定流体质点占据，因而每一时刻、每一点都具有确定的速度，速度场可表示为 $V = V(x, y, z, t)$ ，它又可表示为

$$V = iu(x, y, z, t) + jv(x, y, z, t) + kw(x, y, z, t)。$$

当然，也可以在其它坐标中表示各分量。例如，在柱坐标系中

$$V = e_r V_r + e_\theta V_\theta + e_z V_z$$

式中 e_r, e_θ, e_z 分别为柱坐标轴上的单位向量， V_r, V_θ, V_z 为速度 V 在柱坐标轴上的分量。如图(1.6)所示。

图(1.7)所示的是圆管内一个截面上的速度剖面图。由于处处沿管轴流动，故速度只

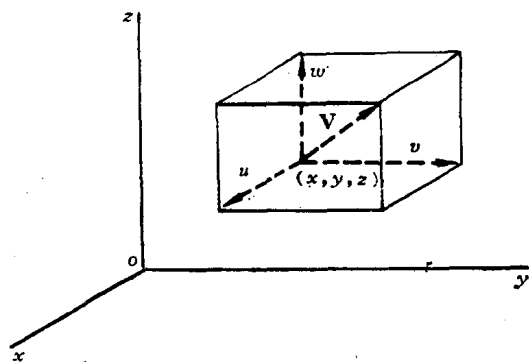


图 1.5 流场中一点的速度

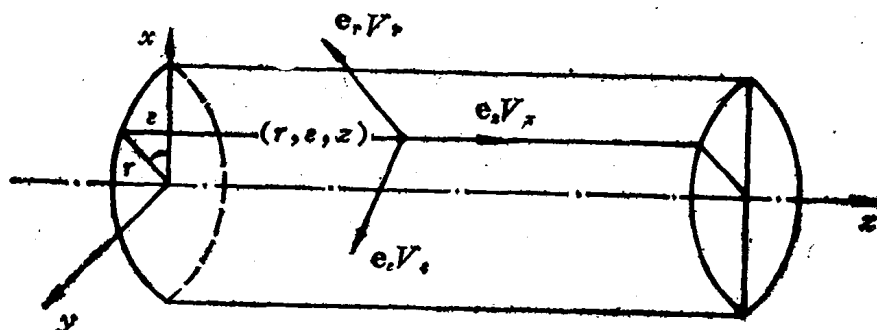


图 1.6 柱坐标系中速度