给水管网的计算理论与电算应用

许仕荣 邱振华 编著

湖南大学出版社

给水管网的计算理论与电算应用

许仕荣　邱振华　　编著

湖南大学出版社
1997年·长沙

内 容 简 介

全书共分七章，系统地介绍了给水管网设计计算的基本理论，并结合实际提出了管网优化设计的思想和方法，给出了部分电算程序。本书旨在提高相关专业人士的管网设计计算的理论水平以及应用电算技术解决实际问题的能力。

本书可作为给水排水工程专业、环境工程专业本科生选修课及硕士生课程的教材，亦可供给水工程技术人员及有关教师参考。

给水管网的计算理论与电算应用
Jishui Guanwang de Jisuan Lilun yu Diansuan Yingyong
许仕荣 邱振华 编著

□责任编辑 卢 宇
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731－8821691 0731－8821315
□经 销 湖南省新华书店
□排 版 长沙市瑞丰排版社
□印 装 长沙市碧云印刷厂

□开本 787×1092 16开 □印张 10.5□字数 242千
□版次 1997年9月第1版 1997年9月第1次印刷
□印数 1－1 000册
□书号 ISBN 7－81053－097－6/TU·9
□定价 13.00元

前　言

给水工程在工业建设和人民生活中占有极为重要的地位。在整个给水工程投资中，管网部分的造价比重约占 60％～80％，而且每年还有大量的能量消耗。因此，合理地进行管网设计，无疑具有重要的社会意义和经济意义。

给水管网的设计具有变量多、约束条件复杂的特点。其设计计算从手算到电算，从凭经验设计到优化设计有一个过程。以前，由于计算方法和计算工具的限制，管网的设计以经验为主，水力计算主要以哈代·克罗斯法来完成，很少从数学角度涉及其它计算方法。最近 20 年来，随着计算方法及计算工具的飞速发展，管网设计计算理论也有了相当的进展，计算机已广泛地应用于管网的设计与管理，使过去人工难以处理的问题现在有可能解决了，人们逐步摆脱了经验设计的状态。

编著者一直工作在给水管网的教学与科研、设计与管理的第一线，对给水管网的设计计算理论有一定的研究。为了总结研究成果，我们在参阅大量文献的基础上，编著了这本书，旨在系统地介绍给水管网设计计算的理论，结合实际提出管网优化设计的方法，并力求使电算技术应用于实际工程中。

本书正式出版前曾作为给水排水工程专业本科生及研究生的教材使用，并取得很好的效果。

全书共分 7 章，由许仕荣编写第 2，3，4，5 章及附录，邱振华编写第 1，6，7 章。此外，李建国、邢湘峰、余健分别参加第 3、第 5、第 6 章部分内容的编写。

第 1 章　简单介绍了国内外在给水管网设计计算理论及电算应用方面的情况。

第 2 章　介绍了有关数值计算方法。

第 3 章　主要为管网设计提供相应的最优化技术。

第 4 章　简单介绍了图论的基本知识。

第 5 章　着重介绍管网水力计算的各种方法。

第 6，7 章　阐述了新建管网及扩建管网的优化设计方法。

本书在编写过程中，得到姜乃昌教授的悉心指导，并承蒙韩德宏博士的大力支持，谨此致谢。此外，在编写时，我们参阅了大量的文献资料，并引用了部分文献的结论，在此，也向这些文献的作者表示感谢。

由于我们水平有限，书中的缺点和错误在所难免，敬希读者批评指正。

编著者　1997.3 于长沙

目　　次

1 绪 论

1.1 国内外给水管网的计算理论及电算应用的发展概况

给水管网的设计计算从手算到电算，从凭经验设计到优化设计是与计算方法及计算工具的发展过程相适应的。

最早使用的管网水力分析方法是众所熟知的哈代·克罗斯(Hardy Cross)法。它是以能量方程——回路(环)的水头损失平衡为准则，并引进校正流量的概念而导出非线性方程组，然后将其线性化来求解。方程的欲求变量是环的校正流量，方程的个数就是管网的基环数。由于这一方法采用的是迭代方法，且迭代公式简单，便于手工计算，所以在无计算机的年代里，这一方法占有绝对的"统治"地位。80 年代初，我国给水管网水力计算的计算机程序大多基于哈代法。但是，由于在线性化的过程中，简化过多(从物理意义上讲是忽略了环与环之间的相互影响)而导致收敛速度慢，且初始值(初始流量分配)对收敛的影响较大，因此为了加快收敛速度，不少学者对原迭代公式进行了修正，如考虑校正流量 $\triangle q$ 的步长因子，而我国同济大学的杨钦教授则提出了所谓的校正流量分配法，考虑了邻环之间相互影响的传布系数，减少了迭代次数。70 年代以后，随着网络(图论)技术的应用发展，便利用图论来构造给水管网的节点方程和环方程，这些方程都是以矩阵来描述的，方程形式简洁明了，使得人们对系统、方程本身的性质及其应用有了更直观、更深刻的了解。而且，求解这些方程的各种方法易于在计算机上实现。应用较多的是利用牛顿迭代法来求解节点方程和环方程，由于应用牛顿法求解时所形成的雅可比(Jacobi)矩阵是一对称正定、带状的稀疏矩阵，即可利用效率极高的平方根法来求解相应的线性方程组，又可采用带宽压缩存贮技术，节约大量内存。这种方法收敛速度快、精度高、存贮量小，目前，即使在微机上也可对任何现实的大型给水管网进行水力分析计算。

管网的水力分析是管网设计的基础，随着系统工程、最优化理论的发展，管网的优化设计也相应地开展起来。早在 50 年代初，苏联学者就把古典拉格朗日条件极值的理论应用到给水管网的技术经济计算中来，并巧妙地引入"虚流量"的概念，使得其计算方法和过程形同管网水力平差一样，最终导出经济管径的解析表达式。而欧美一些学者则把管网优化设计描述成非线性规划问题，进而结合给水管网的特点和实际寻求这一非线性规划问题的解法。非线性规划的数学模型比较真实、完整地反映了管网优化设计问题的实质，但求解起来往往很困难，而且得到的常常是局部最优解。

很多研究成果证明，对环状管网来说，没有最优的流量分配，也就是说，在流量未分配的情况下，流量优化分配问题是一个凹规划问题，它的最优解出现在约束区域的边界上。

如果对管段管径、流量没有下限约束时，则优化的结果是某些管段的流量等于零(因而管径也等于零)，致使环状网变成树状网，从而导致供水的可靠性大大降低。因此，管网的优化设计大多是在流量已分配的情况下进行的。显然，不同的流量分配就会有不同的优化结果，所以，近二十多年来，许多学者对流量优化分配问题做了大量的研究。基于可靠性理论的给水管网优化设计的研究也在蓬勃开展。

此外，管网的改扩建优化设计比新建管网的优化设计显得更复杂，其问题的核心仍然是如何分配新、老管线的流量(负荷)。也就是说，既要充分发挥已有管线的过水能力，又要使得新建管线投资及以后的动力费用最省。关于这方面的研究，我国的学者也取得了较好的成果，但在实际应用方面尚需进一步的工作。

总之，无论是国内国外，目前有关给水管网的水力分析的算法及应用程序均已相当成熟，而关于管网优化设计的研究也已进入“收获”期。随着系统工程理论、最优化技术及控制、计算机技术等学科的不断发展，以及它们之间的相互交叉、渗透，给水管网的水力计算及优化设计技术，必将全面应用到实际工程之中。

1.2 配水管网模型

无论是管网的设计还是运行管理，首先必须建立起配水管网的模型，这里的模型是指结构上的模型，目前提得较多的是：微观模型、宏观模型、集结模型。

配水管网的微观模型也就是管网的拓扑结构模型，它是管网设计、分析计算的基础。应用微观模型的前提是，已知管网各个节点的流量及各管道的阻耗系数。

微观模型的缺点是求解的变量元太多，因而占用较长的计算时间和存贮容量。在管网的规划设计阶段，由于对计算速度没有过高的要求，因而应用微观模型是适宜的。然而对于实时要求很高的调度管理来说，尤其是大中城市复杂的配水管网，微观模型往往在时间上满足不了要求。于是就出现了所谓的“宏观模型”、“集结模型”等。

Robert Demoyer 等首先提出的基于“比例负荷”假定的“宏观模型”，无须了解管网的结构及参数，只需要以往的运行数据就能借助统计回归分析进行离线建模。我国同济大学的杨钦教授课题组根据我国城市的实际用水情况，提出了相类似的“时段比例负荷”的“时段宏观模型”。建立“宏观模型”的主要目的是简化调度计算的计算过程。但是由于是根据管网中所设的测流、测压点来建模的，因而其输出量也只能是相应节点的压力及管段流量，无法了解非测压点的压力及非测流段流量。尤其是用水的实际情况并不一定符合“比例负荷”这一假定，所以这种模型似乎不是一个能完全取代微观模型的控制模型。

日本学者提得较多的是“管网集结模型”，所谓“管网集结”其实就是一种简化网络结构的近似方法。它把整个配水管网划分成 P 个区域，使管网中每个节点必须且仅属于一个区域。划分区域的原则是：同区域内的各节点压力大致相等，用水规律相仿。将每个区域内的所有节点“集结”在一起而形成一个“虚拟”节点。区域(此时已是虚拟节点)之间的关联用一条“虚拟”管道表示。这样，原来的管网模型(微观模型)就简化成一个新的管网模型，称之为“集结模型”。

“集结模型”是建立在“微观模型”基础之上的，因此，它比上述的“宏观模型”更能代表

“微观模型”，也就更适用。

这里需要指出的是，本书描述的对象都是“微观模型”。

1.3 给水管网设计计算的课题

管网的设计计算课题可分为两类：

(1)管网技术经济计算。

也就是管网的优化设计，它包括新建管网的优化设计和改建管网的优化设计。

管网优化设计的目的是，在各种约束条件（如水力约束、可靠性约束等）下，如何选择出经济管径，以满足管网年费用的折算值最小。

(2)管径已定时的水力计算课题。

其目的是在已知节点流量及管长、管材、管径的情况下求得管网各管段的实际流量分配，各节点的水压，以及配水源的工作情况（水量和水压）。

2 计算方法简介

2.1 矩阵基础知识

2.1.1 矩阵的定义

实际工程当中，常需求解下面的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_m = b_m \end{array}\right\}, \tag{2.1}$$

如果把(2.1)中的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$抽取出来，按原顺序排列，并加上方(圆)括号

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

则称该形式(2.2)为(2.1)的系数矩阵。(2.1)的系数唯一确定了表(2.2)；反之有了表(2.2)也唯一确定了式(2.1)。象这样的表称之为矩阵。

矩阵的定义：由 $m \times n$ 个数按一定次序排成的 m 行 n 列的表：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做矩阵，可记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 称之为矩阵的元素。

当 $m=n$ 时，称矩阵 A 为 n 阶方阵；

当 $m=1$ 时，矩阵 A 仅有一行，称之为行矩阵(或行向量)；

当 $n=1$ 时，矩阵 A 仅有一列，称之为列矩阵(或列向量)。

2.1.2 矩阵的运算法则

(1)矩阵的加法和减法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，$C=A\pm B=(c_{ij})_{m\times n}$，则 $c_{ij}=(a_{ij}\pm b_{ij})$。

加法运算满足：

① $A+B=B+A$;(交换律)

② $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$;(结合律)

减法运算满足:

$A-(B+C)=(A-B)-C=A-B-C$。(结合律)

(2)矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times p}$, $B=(b_{ij})_{p\times n}$, $C=A\times B=(c_{ij})_{m\times n}$,则 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。$C$ 称为矩阵A 与B 的乘积,记为 $C=AB$。

需要注意的是,矩阵 A 的列数等于矩阵B 的行数时,才有矩阵 C 的存在。

矩阵的乘法运算满足:

① $A(B+C)=AB+AC$;

② $(B+C)A=BA+CA$;

③ $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$;(k 为一常数)

④ $(kA)B=k(AB)=A(kB)$。

在乘法运算中,一般来说,两个同型矩阵 $AB\neq BA$,所以在说用 A 乘B 时,应说明是左乘还是右乘。

(3)矩阵的逆

定义:对于 n 阶矩阵A,如果有一个 n 阶矩阵B,满足:

$$AB = BA = E, \tag{2.3}$$

则 B 叫做A 的逆矩阵(A 也叫做B 的逆矩阵),A 的逆矩阵记为A^{-1}。上式中 E 为单位矩阵:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\cdots0\\ 0 & 1 & 0\cdots0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots1\end{pmatrix}。$$

线性代数已经证明:

① 方阵 A 有逆矩阵存在,则必唯一;

② 方阵 A 存在逆矩阵的充要条件是矩阵A 为非奇异阵(即 A 的行列式$|A|\neq 0$)。

这样,如果线性方程组(2.1)中 $m=n$,且系数矩阵 A 存在A^{-1},则可方便地由 A^{-1} 求得(2.1)的解。

(2.1)的矩阵表示形式为:

$$AX = B。\tag{2.4}$$

在(2.4)两边左乘以 A^{-1},则有 $A^{-1}AX=A^{-1}B$,

得

$$X = A^{-1}B。$$

2.1.3 矩阵的转置

已知

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

如果把 A 的行列互换，便得

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}。$$

A'称之为A 的转置矩阵，也可把 A'记为A^T。

2.1.4 矩阵的秩

在一个 m 行n 列的矩阵A 中任取k 行k 列，位于这些行、列相交处的元素所构成的 k 阶行列式，叫做 A 的一个k 阶子式。

定义：设矩阵 A 中不等于零的子式的最大阶数为k，则 k 称之为矩阵A 的秩，记为 $\gamma(A)=k$

关于矩阵的秩，有如下一些结论：

① 当且仅当 A 为零矩阵时，$\gamma(A)=0$；

② 若发现 A 有一个非零k 阶子式，则必有 $\gamma(A)\geqslant k$；而在 $\gamma(A)=k$ 时，说明 A 有非零的k 阶子式，但并不说明 A 的所有k 阶子式均不为零，但可以肯定一切高于 k 阶的子式必为零。

③ 若 A 是$m\times n$ 阶矩阵，则 $\gamma(A)\leqslant\min(m,n)$；

④ $\gamma(A)=\gamma(A')$；

⑤ 设 B 为n 阶方阵，若 $\gamma(B)=n$，则称 B 为满秩矩阵，而

$$\gamma(AB)=\gamma(BA)=\gamma(A)。$$

2.1.5 矩阵的分块

对于阶数比较高的矩阵A，在计算过程中经常采用“矩阵分块法”，它的运算可以简化为较低阶矩阵的运算，将一个矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多块低阶矩阵，每一块低阶矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵。

例如

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix},$$

将 A 分成子块的形式是很多的，下面是两种分块形式：

$$(1)\quad \left(\begin{array}{cc:cc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right);$$

$$(2)\quad \left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)。$$

对于情况(1)的分块法为：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\qquad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\qquad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}。$$

分块矩阵的加法、乘法规则与前述矩阵的加法、乘法规则相同。

2.1.6 几种特殊矩阵

(1)对角矩阵

定义：设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，且 $i=j$ 时至少有一个 $a_{ii}\neq 0$，就称矩阵 A 为对角矩阵。形如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}。$$

(2)三角矩阵

定义：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $i<j$(或 $i>j$)时，$a_{ij}=0$，而 $i=j$ 时，至少有一个 $a_{ii}\neq 0$，$i>j$(或 $i<j$)时至少有一个 $a_{ij}\neq 0$，就称矩阵 A 为下(或上)三角矩阵。

上三角矩阵形如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

下三角矩阵形如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}。$$

(3)对角占优矩阵

定义：设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若存在 $|a_{ij}|\geqslant\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\,(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，且至少有一个 $|a_{ij}|$ 使得不等号成立，则称矩阵 A 为对角占优的；若矩阵中所有的 $|a_{ii}|\,(i=1,2,\cdots,n)$

均使不等号成立，则称矩阵 A 为严格对角占优。

(4)对称正定矩阵

定义：设有方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $a_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$，则称矩阵 A 为对称矩阵；若对称矩阵的任一 k 阶顺序主子式的行列式均大于 0，即：

$$|a_{11}|>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\cdots\cdots,|A|>0。$$

则称对称矩阵 A 为对称正定矩阵。

对称正定矩阵有许多有用的性质，下面仅介绍正定的 Cholesky(乔莱斯基)分解。

设 A 为对称正定矩阵，则 A 可唯一地分解为两个三角矩阵的乘积：

$$A = LL^T$$

其中 L 为下三角矩阵，L^T 为 L 的转置。

$$L=\begin{bmatrix}l_{11}&0&\cdots&0\\l_{21}&l_{21}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{nn}\end{bmatrix},$$

L^T 为 L 的转置。L 的元素 l_{ij} 由下式确定(规定 $\sum\limits_{k=1}^{0}=0$)

$$\left.\begin{aligned}&l_{ii}=(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2)^{1/2} && (i=1,2,\cdots\cdots,n)\\&l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk})/l_{jj} && (i>j;j=1,2,\cdots\cdots,i-1)\\&l_{ij}=0 && (i<j)\end{aligned}\right\}。\qquad(2.5)$$

【例 2.1】 已知

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&5&3\\1&3&4\end{bmatrix},$$

求证 $A=LL^T$ 唯一地存在，并求解出 $L=(l_{ij})_{3\times3}$。

【解】 首先证明 A 为对称正定矩阵。

A 显然为对称矩阵，且

$$|a_{11}|=3>0,\qquad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\2&5\end{vmatrix}=11>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{22}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&5&3\\1&3&4\end{vmatrix}=24>0。$$

故矩阵 A 为对称正定矩阵，必有 $A=LL^T$ 存在。

其次求 $L=(l_{ij})_{3\times3}$。

由(2.5)可求得：

$$l_{11} = (a_{11} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k}^2)^{1/2} = (3-0)^{1/2} = \sqrt{3},$$

$$l_{21} = (a_{21} - \sum_{k=1}^{0} l_{2k}l_{1k})/l_{11} = (2-0)/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3},$$

$$l_{22} = (a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k}^2)^{1/2} = (5-4/3)^{1/2} = \sqrt{33}/3,$$

$$l_{31} = (a_{31} - \sum_{k=1}^{0} l_{3k}l_{1k})/l_{11} = (1-0) = \sqrt{3}/3,$$

$$l_{32} = (a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3k}l_{2k})/l_{22} = [3-(\sqrt{3}/3)(2/\sqrt{3})]/(\sqrt{33}/3) = 7/\sqrt{33},$$

$$l_{33} = (a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}^2)^{1/2} = (24/11)^{1/2}。$$

2.2 线性方程组的解法

线性方程组的数值解法尽管很多，但归纳起来可以分为两类：精确法和迭代法。

所谓精确法，是指这样一种方法：它只包含有限次四则运算，如果在每一步运算过程中都不发生舍入误差的话，计算的结果就是方程组的精确解。下面将要讲述的消元法及平方根法就是精确法。

迭代法是指这样的方法：它把方程组的解看作是某种极限过程的极限，而在实现这极限过程时，每一步的结果是把前一步所得的结果施行相同的演算步骤得到的。

值得注意的是：在使用精确法实际计算时不会没有舍入误差，因此由精确法所得的解并不见得是绝对精确的；采用迭代法时，我们决无可能把极限过程进行到底，而只不过把迭代进行有限多次，使迭代若干次后所得的结果达到一定的精确程度(其误差是实际工程所容许的)。

2.2.1 高斯消元法

高斯消元法是一种常用的求解线性方程组的方法，它由消元和回代两个过程组成。考察一般线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

先将 $a_{11}(a_{11} \neq 0)$ 去除(2.6)中的第一个式子，使第一个方程的 x_1 的系数化为1，得到：

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \tag{2.7}$$

然后将式(2.7)乘上 $-a_{i1}$ 加到第 i 个方程上，消去第 i 个方程的 x_1，直至将其余各个方程中的 x_1 消去，使(2.6)变为下列形式：

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & + a_{12}^{(1)} x_2 & + a_{13}^{(1)} x_3 & + \cdots\cdots & + a_{1n}{}^{(1)} x_n & = b_1{}^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)} x_2 & + a_{23}^{(1)} x_3 & + \cdots\cdots & + a_{2n}^{(1)} x_n & = b_2{}^{(2)} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & a_{n2}^{(1)} x_2 & + a_{n3}^{(1)} x_3 & + \cdots\cdots & + a_{nn}^{(1)} x_n & = b_n{}^{(1)} \end{array}\right\},$$

如果消元过程进行到了$(k-1)$步，则得到与(2.6)等价的方程组：

$$A^{(k-1)}X = B^{(k-1)}, \tag{2.8}$$

且系数矩阵$A^{(k-1)}$具有如下形式：

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1(k-1)}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & 1 & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots\cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & & & & a_{k+1k}^{(k-1)} & \cdots\cdots & a_{k+1n}^{(k-1)} \\ & & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

这样，消去过程的第k步得到的矩阵$A^{(k)}$及右端项$B^{(k)}$的元素由下列公式确定：

$$\left.\begin{aligned} a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} &= b_k{}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \end{aligned}\right\}, \quad (j = k, \cdots, n) \tag{2.9}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \quad (i = k+1, \cdots, n;\ j = k, \cdots, n) \tag{2.10}$$

$$b_i^k = b_i{}^{(k-1)} - a_{ik}{}^{(k-1)} b_k{}^{(k)}。\quad (i = k+1, \cdots, n) \tag{2.11}$$

当消去过程进行到第n步，$k=n$时，矩阵$A^{(n)}$为如下形式的单位上三角矩阵：

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$(B^{(n)})^T = (b_1{}^{(1)}, b_2{}^{(2)}, \cdots\cdots, b_n{}^{(n)})^T。$$

得到与(2.6)等价的上三角形方程组，且

$$A^{(n)}X = B^{(n)}。\tag{2.12}$$

这就是消元过程的最后结果。利用上面的上三角矩阵，可用回代过程求出方程组的解，其求解公式为：

$$\left.\begin{aligned} x_n &= b_n^{(n)} \\ x_i &= b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}{}^{(i)} x_j \quad (i = n-1, \cdots\cdots, 1) \end{aligned}\right\}。\tag{2.13}$$

上述消元过程中，曾要求第k步消元时，$a_{kk}{}^{(k-1)} \neq 0$ （$a_{kk}{}^{(k-1)}$称之为主元）。如果此时$a_{kk}{}^{(k-1)} = 0$，将会导致消元过程中断；再则，即使$a_{kk}{}^{(k-1)}$不等于0，但$|a_{kk}{}^{(k-1)}|$很小，那么用它来作除数也可能导致误差的累积甚而溢出停机。要避免这些缺点，宜选取绝对值最大的元素作为主元素，其方法为：在第k步消元时（消去x_k），就所有$a_{uk}{}^{(k-1)}$（$u \geqslant k$）考虑取其中绝对值最大者作为主元，把所选主元按行对换移到(k,k)位置，再按上述消

元过程计算下一步 $a_{uv}^{(k)}(u \geqslant k+1, v \geqslant k+1)$。自然，在计算机中进行这种运算时，并不真正执行变换的运算，只需在每一步行变换时记录主元所在的行序就行了。

2.2.2 平方根法

当方程组 $AX=B$ 的系数矩阵 A 为对称正定时，A 可唯一地分解为 $A=LL^T$，其中 L 为下三角矩阵，L 的元素由式(1.5)确定。

将 $A=LL^T$ 代入 $AX=B$，得：$LL^TX=B$。令 $Y=L^TX$，则方程组变成下列等价方程组：

$$LY = B, \tag{2.14}$$

$$L^TX = Y, \tag{2.15}$$

其中，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$。由此可得方程组 $AX=B$ 的计算公式如下：

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k)/l_{ii}, \qquad (i = 1,2,\cdots\cdots,n) \tag{2.16}$$

$$x_j = (y_j - \sum_{k=j+1}^{n} l_{kj} x_k)/l_{jj}。 \qquad (j = n, n-1, \cdots\cdots, 1) \tag{2.17}$$

本方法的优点是不需进行行或列的交换来防止舍入误差的增大，其运算量和存储量都是上述消元法的一半左右，所求得的解的精确度也是比较高的。后面章节中将证明管网方程的雅可比矩阵是对称正定的，故将经常应用这种方法进行计算。

2.2.3 雅可比迭代法

设线性方程组为：

$$AX = B, \tag{2.18}$$

即：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}。 \tag{2.19}$$

在上述两式中，设 A 为非奇异，且 $a_{ii} \neq 0$，将 A 分解为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = D + L + U。 \tag{2.20}$$

将(2.19)中的第 i 个方程用 a_{ii} 去除再移项便得等价方程组：

$$x_i = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j), \quad (i = 1,2,\cdots\cdots n) \tag{2.21}$$

写成矩阵形式，则为

$$X = B_0 X + F。 \tag{2.22}$$