经济类硕士研究生入学考试

数学复习指南(含MBA)

中国人民大学　李向科　胡云芳　主编

科学技术文献出版社

硕士研究生入学考试
经济类数学复习指南(含 MBA)

中国人民大学　李向科　胡云芳　主编

科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试经济类数学复习指南(含 MBA)/李向科,胡云芳主编.-北京:科学技术文献出版社,1996

ISBN 7-5023-2783-5

Ⅰ.硕… Ⅱ.①李… ②胡… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 09480 号

责任编辑:王大庆 罗 曼

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)

武清振华印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

1996 年 6 月第 1 版 1996 年 6 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 22 印张 550 千字

印数:1-10000 册

定价:28.00 元

前　　言

在经济类硕士研究生考试科目中，数学是令考生头疼的一门功课。从表面上看内容很多，完全把握很不容易，但是数学有其自身的规律，只要掌握了这些规律，应用起来就会得心应手。掌握规律不能靠背书得到，只有靠加强基本功的练习才能得到。**经济类的数学完全是基本功的较量**，这一点不同于数学专业和工科专业。正是出于这一特点，在编写本书的时候，我们重点考虑的是考生基本功的练习，力图使读者在阅读完本书之后，使自己的基本功有所提高。我们在近年阅卷过程中，发现有一大批考生，并不是不知道解题的方法，却由于计算的错误，导致下面解题的走样。计算错误，有时就是一个符号的弄反或者一个系数的算错，其危害都是很大的。这类失分只有通过多练才能克服。平时多练些难度较大和步骤较多的题，考试时就会有轻车熟路的感觉。

本书从最基本的概念题开始，逐步加深难度。解题所使用的方法，包括了正式考题的解题方法的全部。另一个要说明的是，例题的大部分都比正式考题要难，解题的步骤也是一步一步地进行。

只有在加强基本练习之后，才能正式涉及考题的领域。我们提供了 1995 至 1996 年的考试题，不仅有标准答案，而且有评分批准。最后，我们对 1996 年的试题进行了分析，指出它的特点和规律，以便考生知道自己该在什么地方下大力气。应该说明的是，这里提供的标准答案只是众多解法中的一种。一题多解也是数学的特点。读者可以根据评分标准的设定，推断用别的方法的得分情况。

本书的内容严格按照考试大纲的要求编排。但由于经济类数学的等级不一样，每一年的考试大纲也不尽相同，所以，在阅读此书时，应该注意，目录中带 * 的部分有可能不在你所选择的数学等级的考试大纲之中。

最后，给考生朋友以下几点建议：

1. 避免犯初级的错误，减少自己的盲点。例如，不定积分的结果最后要加上 C，但阅卷中发现有相当大的一部分人都忘记这一点，白白损失几分。

2. 牢记应该记住的最基本的公式和定理。让自己踏踏实实地应用这些东西。我们在书中罗列了绝大部分的应记住的内容，阅读时，不使用教材也可以。

3. 加强基本功练习，一定要保证基本运算的准确。为此，必须做大量的枯躁的练习。在每一章我们都安排了数量众多的练习题。这也是经济类数学考题不同于别的数学考题的地方。

我们虽参加过多年研究生考试的复习辅导教学和阅卷工作，但终因时间紧迫，错误疏漏之处难免，望读者朋友提出宝贵的意见和建议，以把我们的工作做得更好。

作　者

中国人民大学

1996 年 5 月

目　　录

第一篇　微积分

第一章　函　　数

函数是微积分研究的对象.这本书涉及的都是实单值函数,即一个自变量只对应一个因变量及定义域和值域都是实数的函数. 清楚地理解函数的概念以及相应的性质是学好微积分的基础.

一、函数的定义

在一个变化过程中,有两个变量 x 和 y. 如果对于 x 的变化范围里的每个值,按一定的规律都有变量 y 的确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数. x 称为自变量,y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域,它是数轴上的一个集合. 因变量相应的取值范围称为函数的值域,它也是数轴上的一个集合.

二、函数的运算

函数之间可以进行四则运算和复合. 四则运算就是普通的加减乘除. 应该注意的是函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 相加后得到的 $f(x)+g(x)$ 是一个新函数,既不数 $f(x)$ 也不是 $g(x)$.

复合运算是指两个函数之间的复合. 两函数复合是有条件的,不是任意两个函数都能复合,必须要求中间变量 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域里. 应该很熟练地进行两个给定函数的复合,同时也应能够快速准确地将一个从外表上看很复杂的函数分解成若干个基本初等函数.

三、初等函数

这本书里的绝大部分函数都是由下列基本初等函数通过有限次的四则运算和复合运算而构成的初等函数.

1. 常数函数

形如　$y=f(x)\equiv c$ 的函数称为常数函数,定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $Z_f=\{C\}$,其图形是一条平行于 x 轴的直线.

2. 幂函数

形如　$y=f(x)=x^\alpha$,$(\alpha\neq 0)$ 的函数称为幂函数,其中 α 是常数,可以是任何一个实数. 它的定义域比较复杂,不同的 α,D_f 也不同. 是基本初等函数中最为复杂的一种.

3. 指数函数

形如　$y=f(x)=a^x$,$(a>0,a\neq 1)$ 的函数称为指数函数. 定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $Z_f=(0,+\infty)$.

4. 对数函数

形如 $y=f(x)=\log_a x,(a>0,a\neq1)$的函数称为对数函数.定义域$D_f=(0,+\infty)$,值域$Z_f=(-\infty,+\infty)$.

5. 三角函数

一共有六个,最常用的是

$$y=f(x)=\sin x \qquad y=f(x)=\cos x \qquad y=f(x)=\mathrm{tg}x$$

其余三个是

$$y=f(x)=\mathrm{ctg}x \qquad y=f(x)=\sec x \qquad y=f(x)=\csc x.$$

$\sin x,\cos x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,1]$. $\mathrm{tg}x$ 的定义域是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$\mathrm{ctg}x$ 的定义域是 $x\neq k\pi$,它们俩的值域都是$(-\infty,+\infty)$.

6. 反三角函数

相应于上面六个三角函数就相应地有六个反三角函数,但通常只用到前面四个,即

$$y=\arcsin x \qquad y=\arccos x$$

$$y=\mathrm{arc\,tg}x \qquad y=\mathrm{arc\,ctg}x$$

反三角函数的另外的记号是

$$\sin^{-1}x,\cos^{-1}x,\mathrm{tg}^{-1}x,\mathrm{ctg}^{-1}x.$$

四、函数的性质

有些函数具有某些方面的特征. 下面所列是最常见的几种.

1. 有界性

包括有上界、有下界和有界三种情况. 分别定义为:存在常数 M,使

$f(x)\leqslant M$ 上有界

$f(x)\geqslant M$ 下有界

$|f(x)|\leqslant M$ 有界

2. 周期性

表示函数周而复始的特征. 最典型的函数是三角函数. 周期性定义如下:
对任意的 x 都有 $f(x)=f(x+T)$,
其中 T 是一常数. 若 T 是满足上式的最小正数.则称 T 是周期.

3. 奇偶性

表示的是函数在互为相反数的两点取值之间的关系的特征.

若 $f(x)=f(-x)$,则称 f 是偶函数.

若 $f(x)=-f(-x)$,则称 f 是奇函数.

这两种函数的图形分别是关于 y 轴轴对称和关于原点中心对称.

4. 单调性

分上升和下降两种.

若 $x_1>x_2$ 总有 $f(x_1)>f(x_2)$则称 $f(x)$是单调上升的,或单调增加的.

若 $x_1>x_2$ 总有 $f(x_1)<f(x_2)$则称 $f(x)$是单调下降的,或单调减少的.

函数具有以上的某种性质是相对于一个自变量的取值范围而言. $f(x)$在这个区间有这种

性质，在另一个区间可能就不再拥有这种性质了.

五、反函数

在 $y=f(x)$ 中将 x 和 y 的地位相互交换，y 成为自变量，x 成为因变量，由 y 的取值确定 x 的取值. 这样确定的 y 和 x 之间的函数关系就是 $y=f(x)$ 的反函数，$x=f^{-1}(y)$.

应当注意的是并非每个函数都可以有相应的反函数. $y=f(x)$ 有反函数的条件是对任意的 y. 只有唯一的 x. 使 $f(x)=y$.

六、应特别注意的几点

1. 概念的掌握. 前面所述的各个定义的概念都应理解其实质，而不仅仅是停留在能背下这些概念. 脑袋里应该有几个具体的实例，这样便于思考和想象.

2. 定义域问题. 说起来很简单，但一用起来只要一不小心就会出错. 平时练习时应养成一个习惯，一看到一个函数首先就想一想它的定义域是什么. 当一个函数中还含有参数(用别的字母表示的常数)时，还应想想这些字母应满足什么条件. 有时考虑了很长一段时间函数在某点的性质，而最后发现这个点根本不在这个函数的定义域里面. 类似这样的初等错误应避免发生.

3. 自变量问题. 在含有多个字母的函数表达式中，应弄清哪个是自变量，哪些是参变量，那些是中间变量，这对今后进一步求函数的导数、极限和积分等都有很大的好处.

4. 指数型函数. 形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数称为指数型函数，它可以写成 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 的形式. 一看到 $f(x)^{g(x)}$ 就应想到 $f(x)>0$ 的条件，即 $f(x)^{g(x)}$ 实际上已经隐喻了 $f(x)>0$.

七、应掌握的基本技能

1. 求函数的定义域. 主要是解一些不等式，最后得一数集. 应能够用集合的符号表示这些定义域.

2. 复合函数的分解及两个函数的复合. 这是今后研究初等函数的基础. 将复杂的函数分解成多个基本初等函数是相当重要的.

3. 求反函数. 通常的办法是解方程，在 $y=f(x)$ 中视 y 为已知 x 为未知，解出 x 关于 y 的表达式，这就是 $f^{-1}(y)$.

例 1 求 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ 的定义域.

解： 只要解出下列几个不等式即可.

$$\begin{cases}\sqrt{x(1-x)}\neq 0 & \text{(分母不能为 0)}\\ x(1-x)\geqslant 0 & \text{(负数不能开平方)}\end{cases}$$

联合解得： $x(1-x)>0$,

即： $0<x<1$,

写成集合的形式 $D_f=\{x\,|\,0<x<1\}$

例 2 求 $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{1-x}$ 的定义域

解： 只需注意两点

$$\begin{cases}1-x\neq 0\\ \left|\dfrac{x}{1-x}\right|\leqslant 1\end{cases}$$

联合解得 $x\neq 1$ 且 $-1\leqslant\frac{x}{1-x}\leqslant 1$

即 $x\neq 1, -1\leqslant\frac{x}{1-x}\leqslant 1$

最后得 $x\leqslant\frac{1}{2}$

写成集合形式

$$D_f=\{x|x\leqslant\frac{1}{2}\}$$

例 3 $f(x)=x^2, g(x)=x^2-x$，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 并求出使 $f(g(x))=g(f(x))$ 成立的 x 的值.

解： $f(g(x))=g^2(x)=(x^2-x)^2=x^2(x-1)^2$

$g(f(x))=f^2(x)-f(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$.

为使两者相等只有 $x=0,1$ 两个数值. 若有 $x_0\neq 0, x_0\neq 1$ 使得两者相等，则：

$$x_0^2(x^0-1)^2=x_0^2(x_0^2-1)$$

$\because x_0\neq 0$，且 $x_0\neq 1$，等式两端可以消去 $x_0^2(x^0-1)$，得

$$x_0-1=x_0+1$$

这是不可能的，所以只有 0 和 1 使等式成立.

例 4 $f(x)=3^x, g(x)=x^3$ 求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$

解： $f(g(x))=3^{g(x)}=3^{x^3}$

$g(f(x))=f^3(x)=(3^x)^3=3^{3x}$

另一方面，

$$f(g(x))=f(x^3)=3^{x^3}$$

$$g(f(x))=g(x^3)=(3^x)^3$$

例 5 $f(x)=\sqrt{1+x^2}, g(x)=\operatorname{tg}x$ 求 $f(g(x)), g(f(x))$

解： $f(g(x))=\sqrt{1+g^2(x)}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}$

$g(f(x))=\operatorname{tg}f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}$

另一方面，

$$f(g(x))=f(\operatorname{tg}x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}$$

$$g(f(x))=g(\sqrt{1+x^2})=\operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}$$

例 4，例 5 给出了两函数复合的两个不同的方式，其结果是相同的.

例 6 已知 $f(x)=ax+b$ 且 $f(3)=1, f(4)=2$ 求 a,b

解： f 的表达式中有两个未知数，a,b. 一般说来需要两个独立的条件才能得到 a 和 b 的确切的值. $f(3)=1, f(4)=2$ 就是这两个独立条件，由它得到两个方程：

$$\begin{cases}1=a\cdot 3+b\\2=a\cdot 4+b\end{cases}$$

解得 $a=1, b=-2$

例 7 $y=f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in[-\frac{\pi}{2},0) \\ ex & x\in[0,1) \\ e^x & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ 求 $f^{-1}(y)$

解： 显然 $f(x)=$ 的定义域是 $[-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 值域为 $[-1,+\infty)$. 显然 $f(x)=$ 是个单调上升函数，是有反函数的. 将值域分成三段

$[-1,0),[0,e),[e,+\infty)$ 对应于每个区间反函数 $f^{-1}(y)$ 分别为 $\arcsin y$，$\frac{1}{e}y$，和 lny 所以

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}\arcsin y &, \quad y\in[-1,0) \\ \frac{1}{e}y &, \quad y\in[0,e) \\ \ln y &, \quad y\in[e,+\infty).\end{cases}$$

例 8 分解 $\ln(1+e^{2\sin x^2})$

解： $y=\mathrm{Ln}U$

$U=1+e^V$

$V=2\cdot W$

$W=\sin Z$

$Z=x^2$

这里面一共出现了，对数函数，指数函数，三角函数，幂函数以及常数函数.

例 9 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 讨论它的奇偶性，并求 $f^{-1}(y)$.

解： 考察 $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\ &=\ln\left[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})\right] \\ &=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} && \text{(有理化分子)} \\ &=-f(x) && \text{(对数性质)}\end{aligned}$$

所以可知 $f(x)$ 是奇函数.

至于 $f^{-1}(y)$，我们在 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 中视 y 为已知数，x 是未知数. 解这个方程. 解的过程如下：

$$\begin{aligned} e^y &= x+\sqrt{1+x^2} \\ e^y-x &= \sqrt{1+x^2} \\ (e^y-x)^2 &= 1+x^2 \\ -2e^yx+e^{2y} &= 1 \\ x &= \frac{1}{2}(e^y-e^{-y})\end{aligned}$$

这就是 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

习题一

一、求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　(2) $f(x)=\arcsin(2+3^x)$

(3) $f(x)=\ln\sin x$　　(4) $f(x)=\ln(\cos\ln x)$

(5) $f(x)=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$　　(6) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$　　(8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(x^2-1)-1}$

二、$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ 3 & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ x^2-1, & x\geqslant 2 \end{cases}$　求 $f(-2),f(1),f(4),f(0),f(2)$

三、已知 $f(x)$、$g(x)$，求复合函数 $f(g(x))$

(1) $f(x)=e^x$，　$g(x)=-x^2$

(2) $f(x)=\sin x$，　$g(x)=\arccos x$

(3) $f(x)=2x^2+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x}+5x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$

(4) $f(x)=xe^{-x}$，　$g(x)=\ln x$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{e^{x^2}+e^{-x^2}}$，　$g(x)=\sqrt{1+x^2}$

(6) $f(x)=\sin x^2$　$g(x)=\ln(1+x)$

(7) $f(x)=x^3+1$　$g(x)=x^3+1$

四、求下列函数的反函数

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^x}+1$

(3) $f(x)=(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$　　(4) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$

五、$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调上升函数，讨论 $f(f(x))$，$f(-x)$，$-f(x)$，$f(|x|)$ 和 $f(x^2)$ 的单调性.

六、$f(x)$ 是偶函数，$g(x)=$ 是奇函数，讨论，$f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 的奇偶性.

七、在 $[-1,1]$ 上单调下降的函数是(　　).

A：x^2　　B：$\arccos x$

C：$\operatorname{arctg} x$　　D：$(\dfrac{1}{3})^x$

八、下列函数中，既是有界函数，又是周期函数的是(　　).

A　$\sqrt[3]{\sin x}$　　B　$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sin x}{\pi}$

C　$\dfrac{x^2}{1+x^2}$　　D　$\operatorname{tg} x$

九、西瓜的价格为 2500 克以上者 0.4 元/500g，不足 2500 克者 0.3 元/500g，试写出西瓜重量 x 与买这个西瓜所需的款额 y 之间的函数关系．x 的单位是克，y 的单位是元．

十、一圆柱体，高是底半径的两倍，试写出圆柱体体积 V 与底面半径 R 的函数关系．

第二章 极　限

极限的概念是微积分中最基本的概念，是整个微积分的支柱．微积分的很多重要概念如连续、可导、可微、可积等等，它们的核心都是某个式子的极限是否存在的问题．很多高级的数学方法也要涉及到极限．可以这么说极限没有弄清楚的人是学不好微积分的．本章所指的极限包括数列的和函数的．

一、极限的定义

极限由两部分组成，极限过程和函数．极限过程一共有 7 种：$n\to+\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$．对这 7 种过程极限的定义是不相同的，但模式是相似的，都是任意接近的问题．

模式是这样的：事先任意给一个正数 ε，总能找到一个自变量的集合，这个集合中的每个点的函数值与极限值的距离小于 ε．各个极限过程的区别仅仅在于所找的集合不同，它们分别是：$n>N$，$0<|x-x_0|<\delta$，$0<x-x_0<\delta$，$0>x-x_0>-\delta$，$|x|>\delta$，$x>\delta$，$x<-\delta$．

值得一提的是，对 $x\to x_0$ 而言 $f(x)$ 在 x_0 可以没有定义．另外 $\lim f(x)=A$，有可能 $f(x)$ 永远不等于 A．

二、极限的运算

1．四则运算．有下列几个定理，

$$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$
$$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\times\lim g(x)$$
$$\lim(f(x)/g(x))=\lim f(x)/\lim g(x)$$

应该特别注意几个等号成立的前提，它们都要求 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 分别存在，并且对于相除的情况，由于分母不能为 0，所以还附加要求 $\lim g(x)\neq0$．上述极限符号下面没有指明极限过程，这说明对上述 7 种极限过程等号都成立．

2．复合运算．

不严格地可以简略地叙述如下：

若　$\lim\limits_{u\to B}f(u)=A$，且 $\lim\limits_{x\to C}\varphi(x)=B$　　则：

$$\lim_{x\to C}f(\varphi(x))=A$$

其中，A、B、C 都可以是有限数，也可以是无限数．利用这个结论可以作变量替换，从而化简一些复杂的极限式．

三、两个重要极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1\quad 和\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

是两个极为重要的极限，它们有下面两个推广的应用：

若 $f(x)\to 0$ 则 $\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}\to 1$

若 $f(x)\to\infty$ 则 $(1+\dfrac{1}{f(x)})^{f(x)}\to e$

应用这两个推广式时应注意式中两处的 $f(x)$ 必须一模一样，一点也不能差. 有差别的必须变成一样，才能使用上述结论.

四、无穷小量

极限是 0 的变量就是无穷小量. 由于涉及极限，所以无穷小量是相对于一个极限过程而言的. 另外无穷小量是变量而不是数，它可以不等于 0.

1. 无穷小量的性质.

①有限个无穷小量的和、差与积是无穷小量.

②无穷小量与有界变量的积仍是无穷小量.

2. 无穷小量的阶的比较.

所谓的 α 的阶比 β 高指的是，α 趋于 0 的速度比 β 快. 由于速度的不同，两个无穷小之间就有 α 比 β 高，α 与 β 同阶，α 比 β 低这几种关系.

当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时是一种特殊的关系，我们称之为等价，实际上它是同阶的一种特例. 在极限式中两个等价无穷小量可以相互代换而不改变极限值. 但应注意被代换者必须是式子中的因子，否则就会出问题. 下面几个等价无穷小量是常用的.

$$\sin x\sim x,\operatorname{tg}x\sim x,\arcsin x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

极限过程都是 $x\to 0$. 实际上以上式中的 x 可以由 $f(x)$ 代替，只需 $f(x)\to 0$ 就行了.

五、有关极限的几个定理

1. 夹逼定理

若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则：

$$\lim f(x)=A.$$

从直观上看，比 $f(x)$ 大的和小的函数都向同一点 A 会合，而 $f(x)$ 夹在中间，它最终的归宿也应是 A. 上面的极限过程可以是任意的.

2. 单调有界数列必有极限.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

六、求极限的主要方法

1. 用定义

这种方法主要应用于一眼就能看出结果的极限式.

2. 利用四则运算性质.

将相对复杂的极限分化成几个简单的一看就能看出结果的极限的四则运算式.

3. 利用恒等变形

主要对付不能直接应用四则运算法则的式子，将其变形成为一新的能计算的式子.

4. 利用代换

利用变量代换和等价无穷小量的代换可以将很复杂的极限式转化成简单的式子. 从而降低求极限的难度.

5. *利用洛必大法则等高级的数学方法*

这是极为重要的求极限方法，将在以后各章中提到，这里暂不涉及.

上述各方法尤其是后 3 种应该在求极限时交替使用，不应只限于一种方法. 平时作练习时应多记些极限的实例，这样有利于指导对极限式的变形的选择，同时加快求极限的速度.

学完本章后应能够熟悉各种基本的求极限的方法并能应用之. 应明了极限和无穷小的概念及两者的关系. 应明确各个结论成立的条件以免误用.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cos\dfrac{1}{x}$

解：如下做法是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0.$$

尽管表面上是利用极限四则运算法则，但忽略了等号成立的条件，即被分开的两部分必须同时同时存在极限，而这里 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

正确的做法是：

$\because\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$ 且 $|\cos\dfrac{1}{x}|\leqslant 1$ 是有界变量，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{\ln x}+e^x+\dfrac{\sin x}{x^2})$

解：原式$=\sqrt[3]{\ln 1}+e^1+\dfrac{\sin x}{x^2}=e+\sin 1$

这种是极限中最容易求的，直接代入即可. 一般说来只要将这点代入函数中没有遇到麻烦就可以用代入法. 所谓遇到麻烦是指代入后产生一些不良的情况，如，分母出现 0，某项成为∞. 一句话，出现今后我们称之为未定式的情况都不能用代入法.

例 3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^{n+3}-4^n}{5^{n-1}+3^{n+2}}$

解：不能直接使用 $\lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{\lim f}{\lim g}$，因为分子分母的极限都是$\infty$. 分子分母同除 5^{n-1}之后可以消去这个不利因素.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+3}-4^n}{5^{n-1}+3^{n+2}}\cdot\frac{1/5^{n-1}}{1/5^{n-1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^4-(\frac{4}{5})^{n-1}\cdot 4}{1+(\frac{3}{5})^{n-1}\cdot 27}\\
&=\lim_{n\to+\infty}5^4-(\frac{4}{5})^{n-1}\cdot 4/\lim_{n\to+\infty}(1+(\frac{3}{5})^{n-1}\cdot 27)\\
&=5^4
\end{aligned}$$

例 4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(1+\sqrt{3})^n-(1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}$

解：首先分子分母同除$(1+\sqrt{3})^n$，消去影响使用极限四则运算法则的因素.

$$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\sqrt{3})^n-(1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n\right]\cdot\left[1-\frac{(1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n\right]\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{(1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n}\right]$$

$\because$ $\left|\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right|<1$ $\therefore$ $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n\to0$,

又 $|1-\sqrt{3}|<1$ $\therefore$ $(1-\sqrt{3})^n\to0$，显然$(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n\to+\infty$

故 原式$=1.1=1$

例 5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

解：分子分母同除$\sqrt{x}$，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})/\sqrt{2+\frac{1}{x}}$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例 6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3^x+2^x)}{\ln(3^x+4^x)}$

解：首先作适当的变形

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[3^x\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\right]/\ln\left[4^x\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln3+\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\right]/\left[x\ln4+\ln\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)\right]$$

分子分母同除x，就可直接使用极限相除的性质了. 显然：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{x}=0\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)}{x}=0$$

所以 原式$=\ln3/\ln4$

例 7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

解：有理化分子，得

$$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n+1}{n^2}}}\quad\text{（上下同除以 }n\text{）}$$

显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n^2-n+1}{n^2}}=1$

$\therefore$ 原式$=\frac{2}{1+1}=1$

例 8 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x)$

解： 有理化分子(把 1 看成分母).

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)(x+2)-x^2)/(\sqrt{(x+1)(x+2)}+x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)/(\sqrt{(x+1)(x+2)}+x)$

分子分母同除以 x，显然有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1\right]=2$$

故 原式$=3/2$

例 9 $\lim\limits_{x\to2}(1-\sqrt{x-1})/(2-\sqrt[3]{3x+2})$

解:分子分母同时有理化. 对分子有理化只需上下同乘 $1-\sqrt{x-1}$，对分母应上下同时乘以 $2^2+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}$，

原式$=\lim\limits_{x\to2}\frac{1^2-(\sqrt{x-1}^2)}{2^3-(\sqrt[3]{3x+2})^3}\cdot\frac{2^2+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{1+\sqrt{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{2-x}{6-3x}\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{2^2+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{1+\sqrt{x-1}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2+2\sqrt[3]{3\cdot2+2}+\sqrt[3]{(3\cdot2+2)^2}}{1+\sqrt{2-1}}$

$=2$

例 10 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-1)/(1-\sqrt{1+x+x^2})$

解： 将分母有理化.

原式$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{1-(1+x+x^2)}\cdot(1+\sqrt{1+x+x^2})$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{-x(x+1)}\cdot(1+\sqrt{1+x+x^2})$

$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-1}{-x}\cdot\lim\limits_{x\to-1}\cdot(1+\sqrt{1+x+x^2})$

$=-4$

例 11 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^k}$，$k$ 是某个常数，对 k 的不同取值讨论极限的结果.

解： 先将原式变形，分子有理化，

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{x^k}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot x^{1-k}$

显然： $\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$ 所以

当 $k<1$ 时

原式$=\lim\limits_{x\to 0}x^{1-k}=0$

当 $k=1$ 时

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

当 $k>1$ 时 原式没有极限

例 12 $\lim\limits_{x\to -2}(x^5+2x^4+x^2-3x-10)/(x^4+2x^3+3x^2+5x-2)$

解： $x^5+2x^4+x^2-3x-10=(x+2)(x^4+x-5)$

$x^4+2x^3+3x^2+5x-2=(x+2)(x^3+3x-1)$

所以 原式$=\lim\limits_{x\to -2}(x^4+x-5)/(x^3+3x-1)$

$=\lim\limits_{x\to -2}(x^4+x-5)/\lim\limits_{x\to -2}(x^3+3x-1)$

$=(16-2-5)/(8-6-1)$

$=9$

例 13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$，其中 m，n 是两个自然数.

解： $x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)$

$x^n-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)$

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 1}(x^{m-1}+\cdots+x+1)/\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+\cdots+x+1)$

$=m/n$

直接代入会遇到麻烦的极限，通常都是会出现未定式的情况. 从理论上说出现了未定式都可以使用洛必大法则求其极限，但对有些极限式使用洛必大法则会相当的繁琐. 上面各例介绍的有理化分子分母及因式分解的方法都是对原式进行恒等变形，进而消除不利的因素.

例 14 $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{x^2}{3n\operatorname{tg}\dfrac{x}{3n}}$

解： 这是个数列的极限，式中的 x 是个参数，不是变量.

原式$=\lim\limits_{n\to +\infty}x\cdot\dfrac{x}{3n}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{3n}}$

因为 $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{x}{3n}=0$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}t\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}t}=1$

所以 原式$=x$

这里实际上作了个变量替换 $t=\dfrac{x}{3n}$.

例 15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 4x}\cdot\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}}$ （分子有理化）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{1}{4(1+\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{1}{8}$

例 16 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)/\operatorname{arctg}(x-2)$