数学物理偏微分方程

薛兴恒　编著

● 中国科学技术大学出版社

数学物理偏微分方程

薛兴恒 编著

中国科学技术大学出版社

1995・合肥

数学物理偏微分方程

薛兴恒　编著

*

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编 230026）
安徽省金寨县印刷厂印刷
全国新华书店经销

*

开本：850×1168/32　印张：12.75　字数：330 千
1995 年 9 月第 1 版　　1995 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—4000 册
ISBN7-312-00752-X/O・171　定价：9.50 元

内 容 简 介

本书第一章的内容包括：分类和标准形，特征，定解问题适定性，广义解，齐次化原理和叠加原理等，另外广泛介绍了物理和力学中某些偏微分方程的问题. 以后各章的内容包括：通解法和球面平均法，分离变量法，积分变换法，基本解和共轭算子法，位势和积分方程法等，结合课程的中心问题还介绍了广义函数论，积分方程论，位势论，微分方程的解析理论和特殊函数，微分方程的固有值问题理论等. 本书内容充实，结论严谨，条理清晰，着重于分析应用而不涉及冗长精细的数学论证.

本书可作为大学理科应用数学、物理和力学各专业的教材或教学参考书，也可供相应学科的研究生和科技工作者参考.

序　　言

本书是为中国科学技术大学理学院应用数学、力学、物理学、近代物理、地球物理、空间物理、化学物理和生物物理等系和专业而编著的教材，它也可作为对本课程有较高要求的其它专业和其它院校相应系科的教材或教学参考书，也可供上述学科领域的研究生和科技工作者参考.

本课程范围广泛，内容庞杂，综合性强. 它一方面需用到数学分析和高等代数等的基础知识，另一方面它又是许多数学领域问题的生长点，许多基础数学的问题直接是由于数学物理偏微分方程的问题而引入和发展的，这就决定了讲授和学习本课程时还需紧密结合偏微分方程的定解问题这一课程的中心问题来讨论和介绍许多相关的基础数学的理论和方法，主要的有 Fourier 分析、常微分方程的解析理论和某些常微分方程的解所定义的特殊函数，微分方程的固有值问题，广义函数论，位势理论和积分方程等，在经典的教材和专著中充分地体现了这一事实，本教材继承和发展了这一特点. 面对如此庞大的内容，本书力求做到陈述简明，条理清晰，精选例题和习题. 对于许多基本理论采取述而不证的方式，略去了冗长繁杂的证明，有些必要的证明也不追求完备精细，常采用粗线条的直观的分析方法，但又注意结论的科学性，在本书列出的参考文献中可以找到所介绍的基本理论概念更为详细的叙述和较严格的证明. 但是本书的处理方式又不同于只是罗列定理和事实，而是着重于分析和阐明理论概念和方法的意义，这样使得虽然全书篇幅不大，却材料丰富，内容充实且便于掌握和应用.

和某些同类的教材比较，本书更为全面和系统地讲授了最常

用到的经典理论和方法，同时又适当地引入了近代的某些理论概念，注意把古典的理论和近代的理论结合起来，例如本书开始就引入了广义解的概念，而且贯串始终，结合具体问题加深对此概念的理解. 结合广义解和基本解的问题本书较系统简明地介绍了广义函数的理论，尤其是较全面地论述了广义函数的各种运算和变换，为许多形式的演算和变换及直观的分析方法打下了理论基础.

和某些同类教材比较，本书不但广度加宽了，而且理论方面得到了较大的加强，不仅是用几个典型的具体问题来显示出一般的理论和方法，而且注意从一般的数学理论的角度来讨论问题，从而把具体问题的细节和解决问题的过程理解得更清楚. 例如本书开始就一般地论述了适定性、广义解、分类和标准形、特征等内容，不但讲了两个自变量的问题，而且讲了多个自变量的问题. 在本书中不只讲述了一种位势而是讲述了多种位势；不但讨论了最简单方程特殊区域的定解问题，而且也讨论了一般区域和更为一般的方程的定解问题；不但讨论解题的方法，而且也论述方法的理论基础. 本书有些章节的内容是相当一般的，这种处理方法加强了教材的理论性和学术性，而且也更便于应用到更为广阔的问题中.

一方面本课程首先是一门公共的数学课程，另一方面它和物理力学问题有更为特别的紧密联系，课程的名称反应了这一特点，它是数学联系其它自然科学和技术领域最重要的桥梁之一，它要为大学的专业基础物理和力学课程提供必要的数学工具，培养应用数学解决实际问题的能力，而且课程中许多重要的数学理论概念和方法又直接来源于物理问题. 本书希望能较好的处理好这种关系，一方面始终围绕课程的中心数学问题，即偏微分方程的定解问题，另一方面又紧密和广泛地联系物理力学问题的实际. 这种联系要涉及到物理学中某些基本问题，但又不能涉及物理问题的细节和太专门的知识，例如用位势来表示和研究物理场

在物理力学问题中经常出现，本书结合课程的中心问题较系统地论述了多种位势理论．结合固有值问题根据物理学的需要讨论了较多的正交多项式．结合定解问题讨论了 Schrodinger 方程的一些最简单问题，波场的绕射和散射问题，稳定电磁场的极化问题和稳定流场的绕流问题等．

作者认为本课程中还有某些重要和基本的内容本书 没有涉及到，它们是：偏微分方程的变分方法，偏微分方程的近似解和渐近解，偏微分方程的数值解，这些内容具有更大的相对独立性，读者可在所列的文献中找到有关的论述．

编者认为本课程不同于其它的公共基础数学课程，处理起来应该是比较开放和灵活，应该尽可能多地论述各种重要的基本理论和方法，提高综合应用基础数学知识的能力，但对于各种方法不能苛求完美和精细．作为一门课程它是一个整体，有相对完整的理论系统，前后内容有密切的联系，例如本教材中基本解，共轭算子法，位势理论和积分方程法是紧密相关的，但是本书又充分的注意使各部份的内容具有相对独立的单元式的结构，对于每一个单元的内容也可以适当地增减而不影响教材的连续性，编者希望本教材能帮助教师组织自己的课程教学，而不是只能按教材去讲．为了适应不同学时的教学需要，建议可按三种类型组织教学，第一型，40 学时，前五章去掉其中打有 * 和 * * 的部份，而且某些节的内容(如广义函数理论介绍)还可缩减．第二型，60 学时，前五章去掉打有 * * 的部份．第三型，80 学时，全部内容．

由于教材的内容较多，且有些公式又很繁杂但又不可避免，所以不能要求学生对每一部分内容的细节掌握得都很清楚，应该把学生的精力引导到全面和系统地对基本理论概念和方法的理解和应用上面，使从繁杂的公式中解放出来．要求通过适当的习题做到能较熟练地查阅各种公式和正确地应用基本理论和方法独立地解决某些具体问题．所以，实行开卷考试的方式是较为合适的，如果实行传统的闭卷考试则应该严格挑选考试的范围，把需

要记住的公式和方法限制在较小的范围内.

数学知识不断地增加积累，新的课程不断地开设出来，如何用较少的学时更有效地传授更多更新的知识，这是数学教学和教材改革的迫切任务，重要的问题是怎样精简和如何教学，简单地删去重要的基本内容使教材内容贫乏，只讲方法不讲原理是不可取的. 相反，编者认为对于着重于数学理论的应用的非基础数学专业来说，应该是更全面和广泛地了解各种具有较强实际背景的经典的和近代的数学理论和方法，以便选用适当的数学工具解决各种问题，基于这种认识，编著者参阅了许多经典和现行的教材，参阅了某些专著，总结多年从事本课程教学的经验和从事应用数学研究的体会编著了本书.

编著一本很好的教材不是一件容易的事，更何况作者水平有限，力不从心，错误和不妥之处在所难免，诚请读者指正.

薛兴恒

1995 年 3 月于合肥

目　　次

1 绪　　论

本章论述偏微分方程及其定解问题有关的基本概念和物理模型，论述某些一般性的原理、理论和定理，对从总体上了解课程的特点、内容、意义和方法和指导以后各章具体内容的讨论有一般意义.

1.1 基本概念

1.1.1 某些一般性概念

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为自变量，$u(x)$ 为未知函数，则称

$$F\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \cdots\ \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \cdots\ \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0$$

为一个微分方程，其中 F 为所含变元的已知函数，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$F$ 中可以不显含自变数和未知函数，但必含 u 的某个导数. $n=1$ 时为常微分方程，$n\geqslant 2$ 时为偏微分方程，此课程讨论偏微分方程的问题.

出现在方程中的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶，也称之为微分式 F 的阶.

如果方程 $F=0$ 对未知函数和所有偏导数均是线性的，则称之为线性方程，否则称为非线性方程.

在线性方程 $F=0$ 中，如果 F 是 u 和所有偏导数的线性齐次式，则称为线性齐次方程，否则称为线性非齐次方程.

设 $u(x)$ 在区域 $\Omega\subset R^n$ 中具有直到方程阶数的连续偏导数，把之代入方程得恒等式，则称 $u(x)$ 为区域 Ω 内方程的一个解，

这种解又称为古典意义下的古典解，有时需推广解的概念，讨论某些更广意义下的广义解.

一般情况下区域 Ω 内方程的解是很多的，一个自然的问题是要讨论方程解的全体，即通解. 一个 n 阶常微分方程通解是包含有 n 个独立积分常数的解族，而 n 阶线性齐次常微分方程的通解是 n 个线性独立解的线性组合. 但是人们发现，偏微分方程通解的问题很为复杂，线性方程也是如此，对于某些很特殊的方程，它的通解可以表示为包含某些任意函数的解族.

例 1 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0$. 设自变量为 x，y，$u(x,y)$ 为未知函数.

它是一个最简单的偏微分方程，它是两个自变量的一阶线性齐次方程，从方程知 $u(x,y)$ 必然不显含 x，另一方面对于任意的一阶连续可微的函数 f，$u=f(y)$ 给出了方程的解，所以方程的通解是 $u=f(y)$，而 f 是任意一阶连续可微的函数.

例 2 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

式中 a 为常数，此为两个自变量 t，x 的一阶线性齐次方程，又常称为单波方程，作自变量的变数代换

$$\begin{cases}\xi=x\\ \eta=x-at\end{cases}$$

则 u 作为新的自变数 ξ，η 的函数，为简单计仍记作 $u(\xi,\eta)$，则它满足

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$$

所以 $u=f(\eta)$ 为它的通解，回到原来的自变量得

$$u=f(x-at)$$

是原方程的通解，其中 f 为任意的一阶连续可微函数.

例 3 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

这是两个自变量时最简单的二阶方程，是线性齐次的，根据例 1 的分析可得

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=f(y),\ f\text{ 是任意函数}$$

对 y 积分得

$$u(x,y)=\int f(y)\,\mathrm{d}y+g(x),\ g(x)\text{ 是任意函数}$$

$$u(x,y)=h(y)+g(x),\ h(y)\text{ 和 }g(x)\text{ 是任意函数}$$

反之，只要 h 和 g 是任意二阶连续可微的函数，上述函数一定是所给偏微分方程的解，所以上述表达式就是方程的通解.

例 4 $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

上式常称为一维波动方程，其中 a 是正常数，它也是二阶线性齐次方程. 作自变量的代换

$$\begin{cases}\xi=x-at\\ \eta=x+at\end{cases}$$

则作为 ξ, η 的函数 $u(\xi,\eta)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$$

所以

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$$

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$$

这就是一维波动方程的通解，它也是包含有两个任意函数 f 和 g.

例 5 $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

它称之为二维调和方程，此方程也是二阶线性齐次方程，而且也很简单，但是要类似例 4 那样找出方程的通解已不容易，要找到方程的某些特解较为简单. 例如，令 $z=x+yi$ 为复变量，

则任何解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部均满足二维调和方程，特别对于任意的非负整数 n，z^n 的实部和虚部都是满足调和方程的二元 n 次多项式，如果用极坐标 r，φ，即 $r^n\cos n\varphi$，$r^n\sin n\varphi$ 均是二维调和方程的解．另外，当 $r\neq 0$ 时，$\ln\dfrac{1}{r}$ 也是二维调和方程的解，此解在二维调和方程的讨论中将起着基本作用．

例 6 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}+6uu_x+u_{xxx}=0$

这是一著名的三阶非线性偏微分方程，常称为 KDV 方程，要找到它的某些特解已经不易，关于它的解，在非线性方程的理论中已有一些较成熟的理论和方法，例如，对于任意的常数 k 和 δ，$u(x,t)=\dfrac{k^2}{2}\operatorname{sech}^2\dfrac{k}{2}(x-k^2t+\delta)$ 是 KDV 方程的一个特解，称它为一个右行孤波．因为它也是右行单波方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+k^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 和波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 的一个特解．

1.1.2 定解问题及其适定性

在通常情况，在一个区域 Ω 内偏微分方程的解很多，但是除了某些很特殊的方程外，很难找到它的通解较为明确的表达形式，所以偏微分方程的中心问题是讨论方程某些特解，要求特解还要满足附加的特定条件．这种条件称为定解条件，方程和定解条件联立而构成一个定解问题，这时又称方程为泛定方程，即

$$\text{定解问题}\begin{cases}\text{泛定方程} \quad F=0, \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\\ \text{定解条件}\end{cases}$$

定解条件是各式各样的，其一般形式是要求当 x 从 Ω 内趋于 Ω 的某一部分边界点时，某些个包含 u 和 u 的某些导数的微分式有确定的极限函数．简单地讲，定解问题要求把未知函数按一定的光滑性一直延拓到 Ω 的边界上，而定解条件是给定在 Ω 某一部分边界上的一个微分等式．根据数学上的形式不同，有些定解条