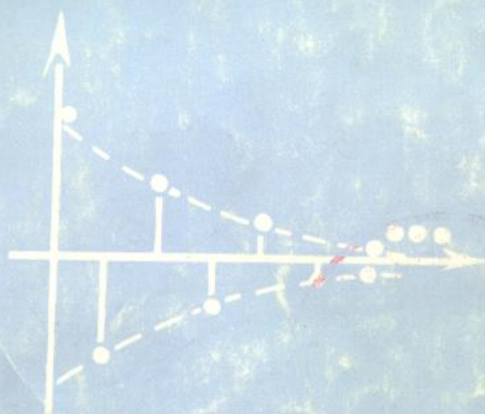
信号与系统

张有正等　编著



四川科学技术出版社

信 号 与 系 统

成都电讯工程学院

张有正 闵大镒
彭 毅 张庆孚
编著

四川科学技术出版社
一九八五年·成都

前　　言

本书是根据1980年6月高等学校工科电工教材编委会审定的《信号与系统》教学大纲编写的。初稿曾被我院三届本科大学生和部分工厂、研究所试用，得到学生和同行们的鼓励和支持。1983年11月，我院与四川科学技术出版社聘请院内外专家对初稿进行了审阅。根据专家们提出的许多宝贵意见，我们对初稿作了部分改写、增删和充实，编成本书。

全书共六章。内容包括连续时间系统的时域分析、付里叶变换、拉普拉斯变换、离散时间系统的时域分析、Z变换、付氏Z变换、离散付氏变换以及状态变量分析的基本理论和分析方法。学时数按100～110学时考虑。

在拉氏变换和Z变换中，我们突破了同类教材中只讨论单边变换的格局，一开始便提出双边变换，单边变换只是作为双边变换的特例。实践证明，这样安排，学生不但不难接受，而且对变换法的内容有了更全面的了解。以前，同类教材中对各种变换的定义、性质及应用分别孤立阐述，篇幅冗长，推导繁复。在近期的一些著作中，虽已开始涉及其间的关系，但也只是点点滴滴，缺乏用一种统一的方法来处理这些变换。本书以连续信号的付氏变换为基础，提出了所谓"双重性原理"这一新的理论并加以运用，从而把各种变换法用统一的方法进行分析和研究，这不仅可以使学生对各种变换法的实质和内在联系有透彻的理解，也使一些复杂问题的求解变得简单。此外，我们在重视基本理论和基本概念阐述的同时，还注重分析和运算的技巧，以提高学生的解题能力。在各章中精选了足够数量的例题和习题，取材广泛并有一定的深度。书末附有习题答案，供参考。

对于标有"*"号的内容，可以舍去不用，这并不影响内容的统一与完整和后续部分的学习。

本书经黄香馥（主审）、张世箕、吴光弼、肖可达、童光裕、杨国雄、洪福明、冯世常、王永德、李相贤等集体审阅，谨向他们致以衷心的感谢。

由于我们水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编著者

1984年7月

目　录

第一章　绪　　论

信号和系统是两个相互联系而又有区别的研究对象。**信号**是运载**信息**（如语言、音乐、图象、数据等）的工具，在数学上表示为一个（或多个）自变量的函数①。通常采用时间t作自变量（虽然t并不一定都代表时间），于是信号表示为$f(t)$、$y(t)$等。**系统**则是产生、传输或处理信号的客观实体，如通信系统、雷达系统、计算机系统等，甚至一个城市、一个社会都可以看作系统。在数学上，常用表征其运动特性的数学模型来表示系统。例如用算符L表示系统。系统和系统之间通过信号来联系，信号则在系统之间及系统内部流通，系统和信号互相依存。有时，还可以将系统的概念推广，把信号也看成某一特定的系统。这样的处理往往是非常有用的。

一个系统常常可分解为若干互相影响（作用）的**子系统**。例如，根据信号的物理属性的不同，可以将信号分解为电的、光的、声的、机械的等等。与之对应，产生、传输和处理这些信号的系统也可以按用途不同，分为通信系统、雷达系统、导航系统、机械减振系统等等。但是，用数学模型来分类更便于从理论上对信号和系统进行探索与研究。譬如有些系统，不论它们是电的、机械的、声的或别的什么，或外观和结构怎样千差万别，只要表达这些系统的数学模型相同，那么从本质上看，它们必然具有相同的运动特性。把这一数学方程送入电子计算机，再在不同的条件下求得其解答。这些解答就必然适合于上述任何一种系统。

1.1　系统的状态

对于一个只有单个输入和单个输出的简单系统，如果只需研究其外部特性，则可以用图1.1—1所示的方框图来表示。其中$f(t)$为输入（也称激励），$y(t)$为输出（也称响应），L是一种算符，也称转移算子，它把输入$f(t)$通过一定方式的运算，变成响应$y(t)$，即

图1.1—1

$$y(t)=\mathrm{L}\{f(t)\}\quad t\geqslant t_0\qquad(1.1\text{—}1a)$$

这样，当已知$f(t)$及L后，便可以由式（1.1—1a），求出从某一感兴趣的时刻t_0开始的系统的响应来。

容易理解，要求给出t以前全部时间里〔即$(-\infty,\ t)$〕作用于系统的输入可能是不现实的。一个可行的方案是给出$t\geqslant t_0$时的$f(t)$（当$t<t_0$时，$f(t)=0$）及t_0稍前一瞬间

① 本书只研究一维信号，即只有一个自变量的信号。

（记为t_0^-）系统的**状态**，即可算出$t \geqslant t_0$时的$y(t)$。系统在t_0^-的状态可以用几个数值来表明，如$x_1(t_0^-)$、$x_2(t_0^-)$、…，$x_n(t_0^-)$，常简写为$\{x_j(t_0^-)\}$，$j=1$、2、…、n。若$t_0=0^-$，则状态为$\{x_j(0^-)\}$。于是式（1.1—1a）可改写为

$$y(t)=\mathrm{L}\left[\{x_j(0^-)\},\ f(t)\right] \qquad t \geqslant 0 \qquad (1.1\text{—}1\text{b})$$

其中$\{x_j(0^-)\}$称为系统的**初始状态**。n是系统的**阶数**。状态的定义及更进一步讨论可参见第六章和第二章的有关内容。下面仅举一个电系统作为例子来说明状态的意义。

如图1.1—2所示的电系统，容易证明，如果$t \geqslant t_0^-$时的输入$f(t)$已知，且某时刻t_0^-电容C上的电压$x_1(t_0^-)=v_C(t_0^-)$及电感L中的电流$x_2(t_0^-)=i_L(t_0^-)$为已知，那么这个系统在时刻t_0^-的全部电压和电流就都可以求出。因为

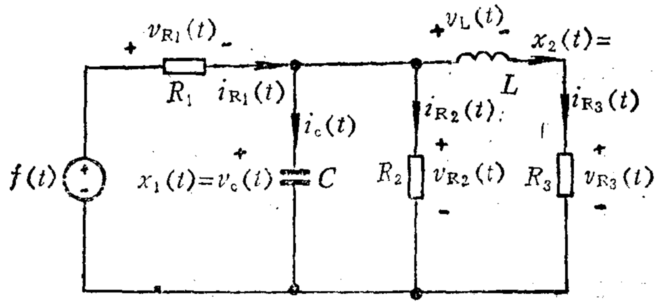


图1.1—2

$$\left.\begin{aligned}
&v_{R1}(t_0^-)=f(t_0^-)-x_1(t_0^-)\\
&i_{R1}(t_0^-)=\frac{1}{R_1}\left[f(t_0^-)-x_1(t_0^-)\right]\\
&i_{R2}(t_0^-)=\frac{1}{R_2}x_1(t_0^-)\\
&v_{R2}(t_0^-)=x_1(t_0^-)\\
&i_C(t_0^-)=i_{R1}(t_0^-)-i_{R2}(t_0^-)-x_2(t_0^-)\\
&=\frac{1}{R_1}\left[f(t_0^-)-x_1(t_0^-)\right]-\frac{1}{R_2}x_1(t_0^-)-x_2(t_0^-)\\
&v_{R3}(t_0^-)=R_3\cdot x_2(t_0^-)\\
&i_{R3}(t_0^-)=x_2(t_0^-)\\
&v_L(t_0^-)=x_1(t_0^-)-v_{R3}(t_0^-)=x_1(t_0^-)\\
&-R_3\cdot x_2(t_0^-)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1\text{—}2)$$

其中$x_1(t_0^-)$、$x_2(t_0^-)$就称为此电系统在t_0^-时刻的状态。

系统在t_0^-时刻的状态的表达方式可以有很多种。如图1.1—2所示系统容易证明，$\{i_L(t_0^-), v_L(t_0^-)\}$、$\{i_C(t_0^-), v_L(t_0^-)\}$，$\{v_{R1}(t_0^-), v_L(t_0^-)\}$、$\{i_C(t_0^-), v_{R3}(t_0^-)\}$、$\{i_C(t_0^-), v_C(t_0^-)\}$等都可以作为系统在$t_0^-$时刻的状态。因为只要知道其中任意一组，其余各组均可由此算出。

系统在t_0时刻的状态说明系统在该时刻的储能，它应该只反映系统储能的情况而与$f(t_0)$无关。在上例中，若用$v_{R1}(t_0)$、$v_L(t_0)$来描述系统的状态就显然不合适，因为$v_{R1}(t_0)=$

$f(t_0)-x_1(t_0)$，它与$f(t_0)$有关。为了避开$f(t_0)$的影响，可以令$t<t_0$时，$f(t)=0$，即$f(t_0^-)=0$。因此，$\{v_{R1}(t_0^-), v_L(t_0^-)\}$与$f(t_0)$无关。这就是用$\{x_j(t_0^-)\}$而不用$\{x_j(t_0)\}$来描述系统状态的原因。由于$t_0$与$t_0^-$只差一个无穷小的时间间隔，系统在$t_0^-$时刻的状态就是在$t_0$时刻的状态。不过，这样一种表示方法必须有一个前提，即系统中不包含开关，或虽有开关，但它在t_0时刻没有动作。因为这种动作可能会引起状态的变化。

1.2 系统的分类

前面已指出，将按系统的数学模型来对之进行分类。为了方便，今后只以电系统作为分析的具体例子，此时信号就是电压或电流。显然，这样的假设，并不丧失研究问题的一般性。

一、动态系统与非动态系统

如果系统在t_0时刻的响应$y(t_0)$不仅与$f(t_0)$有关，而且与t_0以前的输入有关，这种系统称为**动态系统**或**记忆系统**。实际上，若没有其它输入信号存在，$f(t)$在$(-\infty, t_0)$区间对于系统的总贡献，就可归结为系统在t_0^-时的状态$\{x_j(t_0^-)\}$。

若$y(t_0)$只与$f(t_0)$有关而与区间$(-\infty, t_0)$的$f(t)$无关，这种系统称为**非动态系统**或**无记忆系统**。这种系统显然无状态可言，因此$y(t)$与$f(t)$之间只有简单的函数关系，即

$$y(t)=\phi\{f(t)\} \tag{1.2—1}$$

其中ϕ不是一种运算符号而是某函数的符号。一个由纯电阻构成的网络，不论这些电阻是普通的线性电阻或是特殊的非线性电阻，网络都属于非动态系统。若网络中还包含有储能元件电感或电容，则不管这些储能元件是线性的还是非线性的，网络都属于动态系统。

通常，描述动态系统的方程(1.1—1)是一个(或一组)微积分方程，它的阶数就是系统的阶数。可以证明，对电系统来说，独立电感、电容的总个数，就是系统的阶数，在时刻t_0^-，这些电容上的电压$v_c(t_0^-)$和电感中的电流$i_L(t_0^-)$，就可以充当系统在t_0时的状态。

二、线性与非线性系统

在图1.1—1所示的系统中，若已知：

(1) 初始状态$\{x_j(0^-)\}$，$j=1、2、\cdots、n$；

(2) $f(t)=a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$，$t\geq 0$

并设状态值$x_1(0^-)$单独所引起的系统响应为$y_{x1}(t)$，

记为　$x_1(0^-)\longrightarrow y_{x1}(t)$，$t\geq 0$

同样　$x_2(0^-)\longrightarrow y_{x2}(t)$，$t\geq 0$

　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots$

　　　$x_n(0^-)\longrightarrow y_{xn}(t)$，$t\geq 0$

且设输入分量$f_1(t)$单独所引起的响应为$y_{f1}(t)$，

记为　$f_1(t)\longrightarrow y_{f1}(t)$，$t\geq 0$

及　$f_2(t)\longrightarrow y_{f2}(t)$，$t\geq 0$

则对于**线性系统**来说，必然有

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n}y_{xj}(t)+\sum_{j=1}^{2}a_j y_{fj}(t),\ t\geqslant 0$$

$$=y_x(t)+y_f(t) \tag{1.2—2}$$

其中$y_x(t)$称为系统的**零输入响应**，它是响应中完全由状态所引起的那一部分分量；$y_f(t)$称为系统的**零状态响应**，它是响应中完全由输入所引起的那一部分分量。$y(t)$称为系统的全响应。反之，不满足式（1.2—2）的系统，称为**非线性系统**。

式（1.2—2）说明，一个线性系统一定同时具备**分解性**、**零输入线性性**和**零状态线性性**。这是线性性质的合乎逻辑的结果。数学上的所谓线性性意味着**比例性**和**叠加性**这两个性质：

（1）如果$f_1(t)\longrightarrow y_{f1}(t)$，则 $af_1(t)\longrightarrow ay_{f1}(t)$。这种性质叫比例性；

（2）如果$f_1(t)\longrightarrow y_{f1}(t)$，$f_2(t)\longrightarrow y_{f2}(t)$，

则 $f_1(t)+f_2(t)\longrightarrow y_{f1}(t)+y_{f2}(t)$。这种性质叫做叠加性。

由于线性系统中，可以把状态$\{x_j(0^-)\}$也当作一种原因，所以说它一定具有上述三种性质。由于线性系统一定满足式（1.2—2），因此下面四个式子所描述的都不是线性系统。

（1）$y'(t)=\log x(0^-)+f^2(t)+5y(t)$

（2）$y''(t)=y'(t)y(t)+x_1(0^-)+x_2(0^-)+\log f(t)$

（3）$y(t)=x^2(0^-)+\int_0^t f(\tau)\,d\tau$

（4）$y'(t)=f(t)y(t)+3x(0^-)$

一个网络，若只有线性电阻、线性电容、线性电感（一般所用的电阻、电容、电感，都可视为线性的或近似线性的）以及其它线性元件，则该网络就可以看作是一个线性系统。若其中含有一个或几个非线性元件，一般来说，它就属于非线性系统。在自然界中，严格的、绝对的线性系统是不存在的。所谓的线性系统，往往是指在一定条件下，可以近似地看作线性的系统。

三、时变与时不变系统

如果某系统的初始状态为$\{x_j(0^-)\}$，$j=1、2、\cdots、n$，其$t\geqslant 0$的输入为$f(t)$，这时系统的响应已求出为$y(t)$（见图1.2—1a）。如果该系统是时不变系统，那么当改变初始时刻为t_0^-而保持初始状态不变，即$\{x_j(t_0^-)\}$等于原来的$\{x_j(0^-)\}$，且$t\geqslant t_0$的输入等于$f(t-t_0)$时，系统的响应必定为$y(t-t_0)$（见图1.2—1b）。

系统的时不变性说明系统内部的所有参数与时间无关，因此又称它为恒参系统。

若系统内部的参数有一个或几个随时间而变化，它就是时变系统，也称**变参系统**。这时若其数学模型是微积分方程，其系数就不全是常数而有一些是时间t的函数。在一个网络中，若所有的电阻、电容、电感以及其它元件的值均不随时间而改变，则不论它们是线性的还是非线性的，这个网络都属于时不变系统，否则就是时变系统。

在自然界中，严格的、绝对的时不变系统是不存在的。这里所指的时不变系统，其实是在一定条件下，近似地可看作时不变的系统。

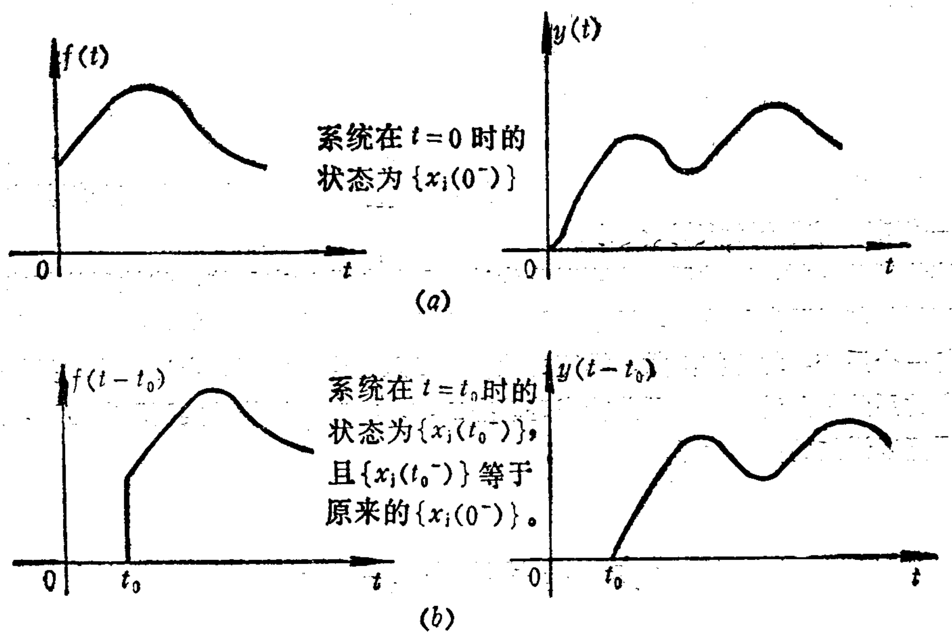


图1.2—1

四、离散系统与连续系统

迄今所讨论的都是连续时间系统（简称连续系统），与之相联系的是连续时间信号（简称连续信号）。此外，还有一种所谓**离散时间系统**（简称离散系统），与之相联系的则是**离散时间信号**（简称离散信号）。数学上，离散信号用按次序排列的数字序列 $f[k]$、$y[k]$ 来表示，宗量 k 是整数。$f(t)$ 与 $f[k]$ 的区别可由图1.2—2看出。

对于一个简单的单输入 $f[k]$、单输出 $y[k]$ 的系统，若只从其外部进行研究，也可以用方框图(1.2—3)来表示。其中 L 也代表转移算子，它把 $f[k]$ 通过一定方式(L)的运算，变换成 $y[k]$，即

$$y[k]=L\{f[k]\}，k\geqslant k_0 \qquad (1.2—4)$$

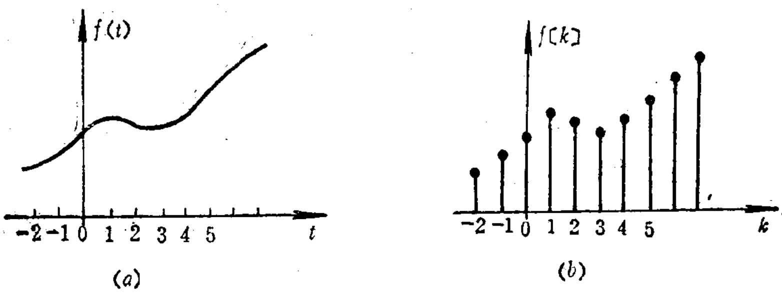


图1.2—2

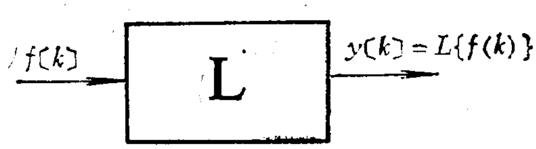


图1.2—3

通常，式（1.2—4）是一个（或一组）差分方程。同样对于给定系统，如果已知 $k\geqslant k_0$ 的

$f[k]$，还必须知道$k=k_0$时系统的初始状态$\{x_j[k_0]\}$，$j=1、2、\cdots、n$，才能算出$k\geqslant k_0$的$y[k]$。有关离散系统及信号的详细讨论，在第五、六章中进行。

离散信号$f[k]$可以通过对连续信号$f(t)$进行均匀采样来得到，即令$t=kT$(T为固定常数，称为采样周期)，就可得到$f(kT)$。也可能它本身就是离散的（如它是一串实测的数据或由离散系统产生的信号，如$f[k]$、$y[k]$），为了书写简单，更为了使分析具有普遍性，以后统一把离散信号记为$f[k]$、$y[k]$。

和连续系统一样，离散系统也可以分为动态系统与非动态系统，线性系统与非线性系统，时变系统与时不变系统等。区分的原理和方法也和连续系统一样，这里不再赘述。

任何一个系统，均可按其数学模型的性质，归入适当的类别。今后，除非另加说明，我们所研究的系统总是动态的，因此就省略动态二字。有时，系统的类别不言自明，就简称系统，不再冠以详细的类别称呼。

1.3 信号的分类与分解

一、信号的分类

和系统一样，信号也有各种各样的分类方法。譬如可以分为雷达信号、通信信号、遥测信号…等等；也可以分为电信号、光信号…等等。此外还可按其内在的对称性质分为奇信号、偶信号；可从功率与能量的观点分为功率信号（功率有限）和能量信号（在$-\infty<t<\infty$内能量有限）；可从信号是否有周期性规律分为周期信号、非周期信号和概周期信号等等。但以其数学特征来分类更为有用，即将其分为：

1. 连续信号与离散信号（这已经在前面说明过了）；

2. 确定信号与随机信号：凡是可以用一确定函数来描述的信号，称为确定信号。我们通常所说的信号，都假定是确定信号，如$\sin\omega_0 t$，$e^{\sigma t}u(t)$，$A\cos k$，$k^2u[k]$等。前两个是连续信号，后两个是离散信号，它们都是确定信号。

还有一类信号，其振幅的变化是不规则的、随机的。这类信号有这样一个特征：在未来的任何时刻t_0，无法预知信号振幅的确值，而只能知道其出现在一定区间（如电压值的某一范围）的**概率**。这种信号称为**随机信号**。由电子器件所产生的噪声，就属于这种随机信号。实际上，严格的确定信号是不存在的，信号一经产生，它就处于噪声的包围之中，更何况在产生信号的过程中，它还必然随时被噪声所污染。因此，我们实际上碰到的往往是确定信号与随机信号的叠加，甚至完全是随机信号（如随机信号的测量）。由于随机信号处处存在，而且对确定信号形成干扰，所以我们需要对随机信号加以研究。

本书作为基础，为了突出最基本的内容，仅限于研究确定信号，随机信号的特性及其通过系统的问题，另有专门的书籍研究。但是，应当指出，本书所要讨论的确定信号通过线性系统所涉及的内容，为研究随机信号提供了理论工具。

二、信号的分解

研究信号的一个重要问题是研究其时间特性，即信号幅度与自变量(t、k等)的关系。在实际应用中，为了使分析简便，常将复杂的信号加以分解，使其成为简单的所谓基本信号之

和，犹如在力学中常将任一方向上的力分解为几个分力，在数学中常将一矢量分解成若干基本矢量一样。

正是由于可以把系统的输入$f(t)$分解成各种基本信号之和，所以产生了线性系统的各种分析方法。例如把$f(t)$分解成无穷多个**单位冲激函数**$\delta(t)$之和，产生了**卷积**分析法(也称时域分析法)，这将在第二章里研究；把$f(t)$分解成无穷多个指数函数$e^{j\omega t}$之和，产生了**付氏变换**分析法，这放在第三章去进行；把$f(t)$分解成无穷多个复指数函数e^{st}之和，产生了**拉氏变换**分析法，这是第四章所研究的内容；把$f[k]$分解成有限个或无穷多个单位数字冲激$\delta[k]$之和或复幂级数z^k之和，这是离散系统的分析方法，将在第五章中讨论。也还有一些信号分解的其它方法，如沃尔什(Walsh)变换、哈尔(Haar)变换…等等，这些内容已经逸出了本书的范围。总之线性系统的分析方法是由信号分解的不同方式所决定。完全可以预期，随着新的变换方法的出现，线性系统分析的理论将不断的丰富与完善。

信号和系统之间的这种互相依存、不可分割的关系，是学习本书所必须注意的。

1.4 线性时不变系统

本书仅限于讨论线性、时不变系统。在系统理论中，线性，时不变系统的理论处于特殊重要的地位，这是因为：

(1)虽然严格说来，这类系统是罕见的，但是在一定条件下，有许多系统可以近似地看作线性、时不变系统。

(2)完全针对非线性系统和时变系统的分析理论，迄今仍不够严谨、完善。而利用线性、时不变系统的理论，却可以用来分析非线性系统和时变系统。譬如利用电子计算机及状态变量分析法(参阅本书第六章)就可以解决此类问题。

(3)近年来，与线性、时不变系统理论密切有关的一些学科发展很快，如数字信号处理、随机信号处理、模式识别、通信理论、正交变换、信息处理、生物电子学、自动控制等。在这些学科中，有些是新兴的，它们正方兴未艾、蓬勃发展，有些已有一定的历史，但却正为大量的新内容所丰富，还有一些则是边缘学科。本书与这些学科彼此交叉、相互渗透，并作为这些学科的基础理论，其重要性是不言自明的。

一个实际的电系统可以由电阻、电容、电感以及其它器件按特定的方式联接而成。当这些元件的几何尺寸远小于在系统中流通的信号的最短波长时，这种系统称为**集中参数系统**。这时系统的能量被认为贮藏或消耗在这些孤立的元件中，因此其数学模型是常微分方程。与之对应，如果信号的波长并不能认为远大于系统的几何尺寸，这种系统称为**分布参数系统**。在这种系统里，不能再把系统的元件看作是分立的，而必须看作分布在整个系统的空间内。这时信号就不仅涉及独立时间变量t，而且还涉及独立的空间变量x。因此分布参数系统的数学模型是偏微分方程式。

本书只讨论集中参数系统。今后不再特别加以说明。

1.5 研究系统的方法

研究系统的方法可分为输入、输出法及状态变量法两大类。

前几节所讨论的实际上都是输入、输出法。这种方法仅研究系统的对外特性，即它只研究输入和输出之间的关系。对于一些较为简单的系统，或者虽然复杂，但只对外特性感兴趣时，用这种方法就很合适，因为它简单、直观。

此外还有一种分析方法称为状态变量法。这种方法把系统内部所有的响应变量都作为分析研究的对象。一个n阶系统，其中独立的响应变量共有n个，这种分析方法是把n阶系统看成由n个一阶子系统所构成，所以从数学模型来看，即是把一个n阶微积分方程用n个一阶微分方程来表示。这样，就可以观察和研究信号（即变量）在系统内部流通的情况。这种方法特别适合于以下两方面：

（1）用于自动控制系统的分析和设计；

（2）用于对时变系统和非线性系统的分析研究。

系统的研究方法，还可以按数学模型的求解方式，分为时域法和变换域法两大类。

时域法直接处理系统的数学模型，按已知的激励，计算出所要求的响应。在1.3节已经指出，这种方法实质上是将激励$f(t)$或$f[k]$，分解成$\delta(t)$或$\delta[k]$这种基本信号，再利用线性系统的叠加性求解，由于它是通过卷积及卷和（卷和有时也称为卷积）来完成的，所以又称**卷积法**。

变换法是通过各种正交变换及反变换，利用系统转移函数的概念来研究系统，如付氏变换、拉氏变换、z变换法等。1.3节中已经指出，它们实质上是将激励$f(t)$、$f[k]$分别分解成$e^{j\omega t}$、e^{st}及z^k这些基本信号，再利用系统的叠加性质求解。本书中三、四、五章分别对之进行详细讨论。上述这些内容，都属于输入、输出法的范围。

第六章属于状态分析法范围。同样，在求解数学模型时，时域和变换域法都可运用，分析的对象既包括连续系统也包括离散系统，即前五章中所有的方法都将同时用到。

习　题

1—1　系统的数学模型如下式所示：

(a)　$y(t)=af(t)+bf^2(t)$，$-\infty<t<\infty$

(b)　$y(t)=x(t_0^-)+\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$，$t>t_0$

(c)　$y(t)=x(t_0^-)+3t^3f(t)$，$t>t_0$

其中$x(t_0^-)$、$f(t)$、$y(t)$分别代表系统在t_0时刻的状态、输入及响应。试判别系统所属的类别。

1—2　某系统，已知：

(a)　设输入为$f(t)$，$t>0$，则输出为$y_1(t)$，$t>0$；

(b)　设输入为$2f(t)$，$t>0$，则输出为$y_2(t)$，$t>0$；

(c)　设输入为$3f(t)$，$t>0$，则输出为$y_3(t)$，$t>0$。

试写出判别式，用以判别系统是否为线性。判别式用$y_1(t)$、$y_2(t)$、$y_3(t)$来表示。在以上的(a)、(b)、(c)中系统的初始状态均假设不变。

1—3 某线性时不变系统，已知：

若 $x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$，$f(t)=u(t)$，

则 $y(t)=(3e^{-t}+4e^{-2t})u(t)$；

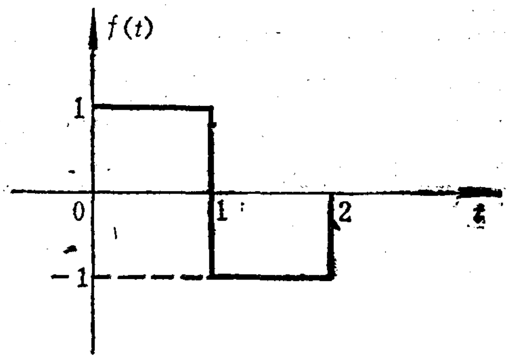
若 $x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$，$f(t)=2u(t)$，

则 $y(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$。

试计算系统的响应$y(t)$，设：

(a) $x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$，$f(t)=0$；

(b) $x_1(0^-)=1$，$x_2(0^-)=2$，$f(t)$如图所示。



题1—3图

题中，$u(t)$为单位阶跃函数，其定义为：

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0。\end{cases}$$

第二章　时 域 分 析

本章将研究线性、时不变系统的一种分析方法，这种方法所涉及的都是时间变量t，所以称为时域法。

时域分析始于用经典法求解系统的微分方程。用经典法所求出的微分方程的解，包括齐次解和特解。而在近代时域分析中，正如第一章所述，基于系统的线性性和时不变性，系统的响应（微分方程的解）可分解为零输入分量$y_x(t)$和零状态分量$y_f(t)$。围绕求解$y_x(t)$和$y_f(t)$，首先用转移算子$H(p)$来表征响应（输出）与激励（输入）之间的联系。在求解$y_x(t)$时，只需由$H(p)$的极点写出相应的解，并利用初始状态确定解中的系数。在引出单位冲激函数之后，以冲激函数为基本信号，任意输入信号都可表示为冲激分量的连续和，$y_f(t)$则是输入信号中各冲激分量响应的迭加（即卷积积分）。在线性系统分析中，卷积积分作为一种重要的概念，应当给予高度的重视，做到熟练掌握，灵活运用。

2.1 系统方程的算子表示法

用时域法分析连续时间系统，首先要建立该系统的数学模型。描述连续时间系统的数学模型是一组联立微分方程（除特别指明以外，这一名称也包括微积分方程在内）。对于给定的激励，要求解指定的响应，还必须用消元法对联立微分方程进行处理，从而得到仅仅是联系指定响应变量与激励变量的微分方程。如果用所谓的**算子**来表示系统方程，那么，联立微分方程的处理和求解将会变得比较方便。

一、算子的定义

为了方便起见，用p来代表微分符号，即令

$$\frac{d}{dt}=p,\qquad \frac{d^n}{dt^n}=p^n \tag{2.1-1a}$$

又用$\frac{1}{p}$来代表积分符号，即令

$$\int_{-\infty}^{t}(\qquad)d\tau=\frac{1}{p} \tag{2.1-1b}$$

于是有

$$\frac{dx(t)}{dt}=px(t)；\quad \frac{d^nx(t)}{dt^n}=p^nx(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\frac{1}{p}x(t)$$

p及$\frac{1}{p}$分别称为**微分算子**和**积分算子**，τ为积分变量。利用算子符号，微分方程可以写成较为简便的形式。例如，图2.1—1所示的RLC串联电路，其回路方程为

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=f(t) \qquad (2.1\text{—}2a)$$

或

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{df(t)}{dt} \qquad (2.1\text{—}2b)$$

将它们写成算子形式，则为

$$Lpi(t)+Ri(t)+\frac{1}{Cp}i(t)=f(t) \qquad (2.1\text{—}3a)$$

或

$$Lp^2i(t)+Rpi(t)+\frac{1}{C}i(t)=pf(t) \qquad (2.1\text{—}3b)$$

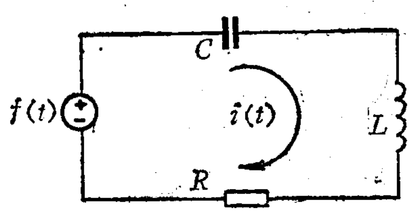


图2.1—1

由于式（2.1—2b）的左端可以提出公共的$i(t)$，所以式（2.1—3b）又可写成

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)i(t)=pf(t) \qquad (2.1\text{—}4)$$

同理，式（2.1—3a）也可写成

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)i(t)=f(t) \qquad (2.1\text{—}5)$$

在这里，虽然算子象代数量那样处理，但不要忘记它并不是代数量，由算子p所组成的多项式也不是代数式。例如，象（p^2+3p+2）$x(t)$这样的式子，（p^2+3p+2）并不是与函数$x(t)$相乘的代数式，而是作为一个整体作用于$x(t)$的运算符号，即

$$(p^2+3p+2)x(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

总之，象式（2.1—4）和（2.1—5）那样的方程不是代数方程，而是微分方程。引用算子符号只是把微分方程用代数形式的算子方程来表示而已。

由式（2.1—4）又可引出关于**转移算子**的概念。若把该式左、右两端p的多项式分别记为$D(p)$和$N(p)$，其响应$i(t)$用更常用的符号$y(t)$来表示，则有

$$D(p)y(t)=N(p)f(t) \qquad (2.1\text{—}6a)$$

这一微分方程可进一步写为

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t) \qquad (2.1\text{—}6b)$$

注意，等式右边分母中的多项式$D(p)$并不表示与$N(p)$相除。式(2.1—6b)仅仅是微分方程

(2.1—6a)的另一种表达形式而已。

现在规定，一个联系输入$f(t)$及其响应$y(t)$的转移算子(又称系统算子)$H(p)$为

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)} \tag{2.1—7}$$

同样，转移算子$H(p)$也不是代数式，而是一个把$f(t)$变换成$y(t)$的运算符号。有了转移算子，时域中响应函数与激励函数之间的关系，就可表示成简明的一般形式

$$y(t)=H(p)f(t) \tag{2.1—8}$$

于是，输入为$f(t)$，响应为$y(t)$的系统可用图2.1—2所示的方框图来表示。应当指出，本章所要求解的零输入响应和零状态响应都是从转移算子$H(p)$着手。

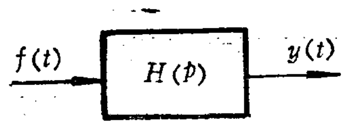


图2.1—2

二、算子的运算规则

微分方程用代数形式的算子方程来表示以后，自然地产生这样一个问题，即代数方程中的运算规则能否用于算子方程，为了回答这个问题，先检验以下关系。因为

$$\begin{aligned}(p+1)(p+2)x(t)&=\left(\frac{d}{dt}+1\right)\left[\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]\\&=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]+\left[\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]\\&=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\\&=(p^2+3p+2)x(t)\end{aligned}$$

所以，下式成立：

$$p^2+3p+2=(p+1)(p+2) \tag{2.1—9}$$

这说明：由算子p组成的多项式可以象代数多项式那样相加、相减、相乘和因式分解。但是，代数方程中的除法(相约)运用于算子方程时，有时可用，有时则不能用。例如在$p\frac{1}{p}$这样的运算中，由于

$$p\frac{1}{p}x(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t) \tag{2.1—10}$$

所以$p\frac{1}{p}$也象代数式一样，分子和分母中的p可以相约。但是在$\frac{1}{p}p$这样的运算中，由于

$$\frac{1}{p}px(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{dx(\tau)}{d\tau}d\tau=x(t)-x(-\infty)\neq x(t) \tag{2.1—11}$$

这时，分子分母中的p一般不能相约。这表明

$$p\frac{1}{p}x(t)\neq\frac{1}{p}px(t)$$

即微分和积分的运算次序不能任意颠倒，先积后微可抵消，反之则不能。所以，当分子分母具有公因子p且不知道运算次序时，约去公因子p是不妥当的。

再研究方程

$$py(t)=pf(t)$$