简明线性代数

主审　唐向浦
主编　杨海欧　范崇金

哈尔滨工程大学出版社

简明线性代数

主　审　唐向浦
主　编　杨海[illegible]　范崇金
副主编　王[illegible]　童衍[illegible]　[illegible]

哈尔滨工程大学出版社

(黑)新登字第9号

DV73/09

内 容 简 介

本书内容符合国家教委于1987年审定的高等工业学校《线性代数课程基本要求》，内容简明，易教易学．例题全面，习题丰富，解答详尽．

本书内容为n阶行列式、线性方程组、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、相似矩阵、二次型与实对称阵．

本书可供工科院校各专业使用，适合各类备考之用，也可供科技工作者参阅．

简明线性代数
主　　审　唐向浦
主　　编　杨海欧　范崇金
责任编辑　王光霞
*
哈尔滨工程大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
哈尔滨科技大学印刷厂印刷
*
开本　850×1168　1/32　印张 7.312　字数 190 千字
1995年8月第1版　　1995年8月第1次印刷
印数：1～1300册
ISBN 7－81007－582－9
O·39　定价：11.00元

前　言

工科学生在学习线性代数这门课时，总感困难，难以掌握其本质．其一是由于学时较少，而其学习方法又不同于学习微积分；另一个重要原因是缺少优秀教材，多数教材内容处理上偏理，手法偏僻，不够简明；特别是自学考试者更没有合适的教材．我们注意到多数教材在内容上基本一致，但在教、学两方面却有很大的差别．我们总结教学经验，吸取现有教材的优点，克其缺点，补其不足，编写了这本简明的教材，力求其易教易学．

本书内容完全符合国家教委于 1987 年审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》，自学考试者可删去有 * 号的内容．习题分 A、B 两类，后者供本科生选作，但不作为教学要求．

本书在正文上力求简明扼要；由于学生对线性代数证明题感到困难，而目前各类考试中，特别是研究生入学考试中证明题的比例较大，而且有上升趋势，因而我们在例题、习题及习题解答三方面注意了这一点．

我们在教学中注意到，若先讲向量组的线性相关性，后讲线性方程组的理论，则其将是一大难点，处理上也极不方便，本书中我们首先用消元法及矩阵的秩给出了线性方程组解的理论，作为此理论的应用处理向量组的线性相关性，这不仅突出了消元法在线性代数中的应有的主要地位，也消除了教学中的难点．

本书由哈尔滨工程大学数力系代数学专家唐向浦教授主审，在此我们表示衷心感谢．

虽然我们力求本书易教易学，简明扼要，但是否达到了这一目的，我们还期待着大家在使用的过程中不断提出意见和建议，以便今后写出高质量的教材．

编　　者

一九九五年五月

目　　录

第 1 章 n 阶行列式

§1 定义 n 阶行列式的准备

1.1 名词

n 元排列：由 $1,2,\cdots,n$ 构成的不重复全排列称为 n 元排列. 一切 n 元排列的集合记为 $\mathscr{A}_n$，$\mathscr{A}_n$ 含有 $n!$ 个元素.

逆序数：设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 元排列，其中 i 的前面大于 i 的数的个数记为 t_i，则称

$$t(p_1p_2\cdots p_n) \triangleq^{①} t_1+t_2+\cdots+t_n$$

为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 例如，

$$t(2431)=3+0+1+0=4,$$

$$t(4231)=3+1+1+0=5.$$

排列的奇偶性：若 $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇(偶)数，则称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇(偶)排列. 例如，2431 为偶排列，4231 为奇排列.

***对换**：在一个排列中对调两个数，而保持其余的数不变，这种产生新排列的过程称为对换；对换两相邻的数称为相邻对换.

---

① $A\triangleq B$ 的含义是 A 表示 B 或 A 记为 B.

命题 1 若 $t(p_1p_2\cdots p_n)=t$，则经过 t 次相邻对换，$p_1p_2\cdots p_n$ 可调成 $12\cdots n$.

证明 1 经过 t_1 次相邻对换调到首位，而这并不改变 $t_i(i=2,3,\cdots,n)$；2 经过 t_2 次相邻对换调到第 2 位；以此类推，$p_1p_2\cdots p_n$ 经过 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ 次，即 t 次相邻对换可调成 $12\cdots n$.

命题 2 对换改变原来排列的奇偶性.

证明 若对换排列的两个相邻的数，排列的逆序数加 1 或减 1，因而奇偶性改变.

设排列

$$a_1\cdots a_ipb_1\cdots b_jqc_1\cdots c_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1),$$

对换 p,q 两数调为

$$a_1\cdots a_iqb_1\cdots b_jpc_1\cdots c_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2).$$

这个过程可分解为，排列(1)经过 $j+1$ 次相邻对换调为

$$a_1\cdots a_ib_1\cdots b_jqpc_1\cdots c_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3),$$

排列(3)再经 j 次相邻对换调为排列(2). 因而排列(1)经过 $(j+1)+j=2j+1$ 次相邻对换调为(2)，再由证明的前部分知排列(1)和(2)的奇偶性相反.

§2 n 阶行列式的定义

2.1 n 阶行列式的定义

定义 1 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由它们构造出的数

$$\sum_{p_1\cdots p_n\in\mathscr{A}_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\triangleq$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

后者在形式上称为 n 阶行列式，简写为 $\Delta(a_{ij})$；a_{ij}称第 i 行第 j 列的元素.

评注 $\Delta(a_{ij})$是一个数，在定义上它是 $n!$ 项的代数和，其中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的每个因子来自行列式的不同的行和列.

2.2 2阶行列式

2阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{t(21)}a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1.5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} n & n-1 \\ n-1 & n \end{vmatrix} = n^2 - (n-1)^2.$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+kc)d - (b+kd)c$$

$$= ad + kcd - bc - kcd.$$

2.3 3阶行列式

3阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{t(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{t(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+(-1)^{t(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{t(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{t(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{t(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=2\times2\times(-5)+(-3)\times7\times4+3\times1\times0-3\times2\times4-$$
$$(-3)\times1\times(-5)-2\times0\times7$$
$$=-20-84-24-15=-143.$$

例 4

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

例 5

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-ahf$$

$$=-\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

例 6

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$=abf+bcd+cae-cbd-baf-aec=0.$$

例 7

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$=a(e+kb)i+b(f+kc)g+c(d+ka)h$$

$$\quad -c(e+kb)g-b(d+ka)i-ah(f+kc)$$

$$=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-ahf$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

例 8

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$=(a+\alpha)ei+(b+\beta)fg+(c+\gamma)dh-(c+\gamma)eg-(b+\beta)di$$

$$\quad -(a+\alpha)hf-(a+\alpha)hf$$

$$=(aei+bfg+cdh-ceg-bdi-ahf)$$

$$\quad +(\alpha ei+\beta fg+\gamma dh-\gamma eg-\beta di-\alpha hf)$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

命题 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdots a_{nn}.$$

证明 由行列式的定义知，以上两个行列式的展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外必有零因子，故命题成立.

§3 行列式的性质

3.1 行列式的性质

性质 1 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证明 (仅在互换第 1 行与第 2 行时证明这个性质)由定义

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in\mathscr{A}_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{2p_1}a_{1p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

$$\xlongequal{\text{命题 2}}\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in\mathscr{A}_n}(-1)(-1)^{t(p_2p_1\cdots p_n)}a_{1p_2}a_{2p_1}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

评注 以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i,j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 **若行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.**

证明 把两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 2 **用常数 k 乘以行列式等于用 k 乘以行列式的任一行(列)的每个数.**

证明

$$
\begin{aligned}
k\Delta(a_{ij}) &= k(\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}) \\
&= \Sigma(-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

评注 第 i 行(列)乘以 k，记为 $k\times r_i(k\times c_i)$.

推论 **若行列式的两行(列)的元素对应成比例，则行列式等于 0.**

证明 不妨设第 1 行与第 2 行对应成比例，这时

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k0 = 0.
$$

性质 3 将行列式的任意一行(列)的各元素同乘一个数,对应地加到另一行(列)的元素上,行列式的值不变.

评注 以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上,记为 $k\times r_i \xrightarrow{+} r_j$;以数 k 乘第 i 列加到第 j 列上,记为 $k\times c_i \xrightarrow{+} c_j$.

证明 (为明显,设第 1 行乘 k 加到第 2 行上,$k\times r_1 \xrightarrow{+} r_2$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}(a_{2p_2}+ka_{1p_2})\cdots a_{np_n}$$

$$=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}+\Sigma(-1)^t a_{1p_1}(ka_{1p_2})\cdots a_{np_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（读者自证）

性质 5 行列式和它的转置行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*证明　记 $D=\Delta(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 按定义

$$D'=\Sigma(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\Sigma(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

将 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 等值改写为 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 时，前者的行指标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 被调成 $123\cdots n$；同时其列指标排列 $123\cdots n$ 被调成 $q_1q_2\cdots q_n$. 由于两个调换过程用相邻对换的个数一样，再由命题 1 知

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t(q_1q_2\cdots q_n),$$

又 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍一切 n 元排列后，相应的 $q_1q_2\cdots q_n$ 也取遍一切 n 元排列，故

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in\mathscr{A}_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$= \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n \in \mathscr{A}_n} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$$

$$= \Delta(a_{ij}).$$

评注 由这个性质知,行列式的行与列的地位对称,因而性质1到性质4中有关行的性质改为列也成立.

3.2 行列式计算举例

例1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[i=2,3,4]{(-i)\times r_1 \xrightarrow{+} r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(-7)\times r_2 \xrightarrow{+} r_4]{(-2)\times r_2 \xrightarrow{+} r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -37 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \xrightarrow{+} r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -41 \end{vmatrix} = 164.$$

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[(-1)\times r_1 \xrightarrow{+} r_3]{(-1)\times r_1 \xrightarrow{+} r_2} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(-1)\times r_2 \xrightarrow{+} r_3} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b).$$

例 3 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$