

结构的动力性态

〔英〕G.B.沃伯顿 著

地震出版社

结构的动力性态

[英] G. B. 沃伯顿 著

金咸定 戴宗信 译

地震出版社

1983

**THE DYNAMICAL BEHAVIOUR
OF STRUCTURES**

G. B. Warburton

结构的动力性态

[英] G. B. 沃伯顿 著

金咸定 戴宗信 译

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京朝阳区展览厂印刷

北京新华书店发行所发行

各地新华书店经售

850×1168 1/32 10.375 印张 272 千字

1983年4月第一版 1983年4月第一次印刷

印数: 0000-5,000

统一书号: 13180·176 定价: 2.00元

第二版前言

自第一版编写以来的十二年间，人们对结构动力学的兴趣日益增长，有关知识有了很大进展。其主要原因是：现今各类结构尺寸的增大及随之而来的动荷力的增大；需要预计结构对可能发生地震的响应及对离岸结构的兴趣的增长等。计算程序的发展对于解决结构动力学实际问题是极其重要的贡献，而作为这些程序基础的数值法对结构动力学更显重要。

由于上述几方面的考虑，本书主要包括以下内容及变动：单自由度系统和多自由度系统随机振动概论；因 Ragleigh-Ritz 法其概念简单而作为保留内容，但由于它的使用范围狭窄，故用有限元法作为基本近似法来确定各种结构的固有频率和响应；引用精选的确定响应的数值积分法；更突出了计及阻尼时求响应的方法以及用近似法求响应时 Lagrange 方程的应用（Lagrange 方程作为研究本学科的统一方法所起的作用和贡献超过了一版前言中所述的不利因素）。应用选定的近似法使得真实弹性结构有效地由一个多自由度系统来代替，并在第二章中阐述了用矩阵分析求这种系统的固有频率和响应的具体做法。本书论述的先后仍按单自由度系统、多自由度系统到复杂弹性体的顺序，这是由动力学概念的难易程度所决定的。因此，后几章中提出了对弹性结构形成近似多自由度模型的方法，而不是解这种系统动力学问题的基本方法。

对于动力学问题来说，国际单位制比任何一种重力单位制有更优越的地方，因此该版使用 SI 单位制。尽管它仅用于某些数值例题中。

书稿中某些部分的内容在诺丁汉大学的学生和研究生教学中已用过。全部书稿作为声学研究生教材使用。

用。本人对这些单位对本书的评论，特别是 J. C. Snowdon 教授和 J. J. Webster 博士对结构动力学各方面起促进作用的讨论表示深切感谢。并对 L. Mlejnecky 女士和 E. O. Wigginton 女士打印了全部书稿表示感谢。

目 录

第一章 单自由度系统	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 运动的一般方程	(3)
§ 1.3 自由振动	(4)
§ 1.4 对简谐激励的响应	(9)
§ 1.5 能量表达式	(13)
§ 1.6 迟滞阻尼	(15)
§ 1.7 瞬态响应	(16)
§ 1.8 随机过程	(22)
§ 1.9 随机振动	(24)
习题	(30)
第二章 多自由度系统	(32)
§ 2.1 自由振动 (两个自由度的系统).....	(32)
§ 2.2 对简谐激励的响应 (两个自由度的系统).....	(39)
§ 2.3 瞬态响应 (两个自由度的系统).....	(44)
§ 2.4 一般方程	(47)
§ 2.5 无阻尼自由振动	(51)
§ 2.6 用固有模态法求响应	(55)
§ 2.7 对简谐激励的响应	(68)
§ 2.8 数值积分法	(78)
§ 2.9 随机振动	(88)
习题	(94)
第三章 杆的振动——I	(98)
§ 3.1 拉伸振动	(98)

§ 3.2	扭转振动	(102)
§ 3.3	弯曲振动: 等截面梁的固有频率	(103)
§ 3.4	梁对于作用力的响应: 一般原理	(110)
§ 3.5	等截面梁对于简谐作用力的响应	(114)
§ 3.6	梁对于瞬时力的响应	(119)
§ 3.7	用 Rayleigh-Ritz 法求变截面梁的固有 频率	(129)
§ 3.8	用 Rayleigh-Ritz 法求变截面梁的响应	(135)
§ 3.9	用于梁振动的有限元法	(140)
	习题	(151)
第四章	杆的振动——I	(155)
§ 4.1	对移动载荷的响应	(155)
§ 4.2	等截面梁对于与时间有关的边界条件的 响应	(162)
§ 4.3	轴向力对弯曲振动的影响	(167)
§ 4.4	弹性基础梁	(170)
§ 4.5	杆系的振动	(171)
§ 4.6	剪切变形与转动惯量	(185)
§ 4.7	刚塑性梁的动力响应	(189)
	习题	(198)
第五章	板与壳的振动	(202)
§ 5.1	一般原理	(202)
§ 5.2	矩形板的横向振动	(207)
§ 5.3	圆板的横向振动	(219)
§ 5.4	板的平面内振动的有限元法	(222)
§ 5.5	板的横向振动的有限元法	(231)
§ 5.6	壳的振动: 一般评述	(238)
§ 5.7	圆筒形壳	(239)
§ 5.8	扁壳	(249)

§ 5.9 壳体振动的有限元法	(253)
习题	(257)
第六章 动力相互作用问题	(260)
§ 6.1 地面—结构的动力相互作用	(260)
§ 6.2 流体—结构的动力相互作用	(269)
§ 6.3 风诱发的结构振动	(275)
附录一 Fourier 变换	(279)
附录二 矩阵的某些性质	(283)
附录三 梁的正交条件	(290)
附录四 Lagrange 方程	(293)
附录五 特征值的约化	(298)
参考文献	(307)
主要符号	(314)
习题答案	(320)

第一章 单自由度系统

§ 1.1 引言

虽然实际结构的动力响应是复杂的，但在着手研究结构的动力性态时，必定要考虑简单系统振动的基本原理。系统所具有的自由度数是该动力系统复杂性的一个大致标志。这个自由度数即等于完全规定该系统位移所需要的独立坐标的数目。例如，一个被约束在 XY 平面内运动的刚体，需要三个坐标才能完全确定它的位置，这就是在 X 方向和 Y 方向的线位移和绕 Z 轴（垂直于 XY 平面）的转角。因此，这个刚体有三个自由度。而一个弹性体（例如一根杆）在每点的位移必须用一个连续方程来加以规定。所以，一个弹性体具有无限个自由度。在动力问题中，结构能够响应的振动模态数等于自由度数。因此，最简单的结构就只有一个自由度。

图 1.1 是一个单自由度系统的习惯表示法。这种系统由一个受无摩擦的导向装置所约束而在 X 方向移动的质量 m 和刚度为 k 的弹簧所组成。假设弹簧的质量与 m 相比可以忽略，这样系统的位移完全可由质量的位移 x 加以确定，因此，这是一个单自由度的系统。为了达到分析动力响应的目的，可以将某些简单的结构作为单自由度的系统来处理。在图 1.2 的简单框架结构中，假设水平构件 BC 是刚性的，和 BC 相比，垂直构件 AB 和 CD 的质量可略去不计，而且在任一种摇摆运动中， BC 保持水平。这样，系统的运动可由 BC 的水平位移 x 来给出，而框架结构可以当作具有单自由度的系统来处理。那末，对图 1.1 所示系统所获得的方程及其解也可用于图 1.2 系统。

结构可能受到的激励有几类。在图 1.1 中，力 $P(t)$ 是加于质

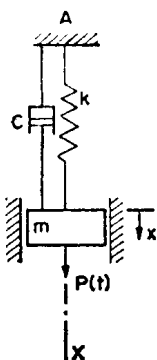


图 1.1 单自由度系统

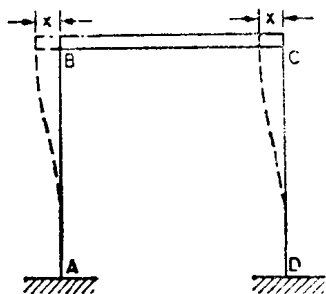


图 1.2 单自由度的简单框架

量上的,该力是时间的函数。有三种主要类型的激励力 $P(t)$: (i) 简谐力。如 $P = P_0 \sin \omega t$ 或 $P(t) = C\omega^2 \sin \omega t$ (后者是由转动机械的不平衡而引起的典型分力)。一个周期性的非简谐力可用 Fourier 级数表示为一些简谐项的和,对于线性系统,总响应可由这种力的每一个简谐分量各自的响应叠加而得到。因此,这里就不再进一步考虑周期性的非简谐力。(ii) 瞬变力或非周期性的力。通常这些力是突然地或在一个短时间内施加的。说明这两种类型力的两个简单例子表示在图 1.3 a 和 b 中。(iii) 随机力。这表示力 $P(t)$ 不能规定为时间的已知函数,而只能用统计的方式来描述。

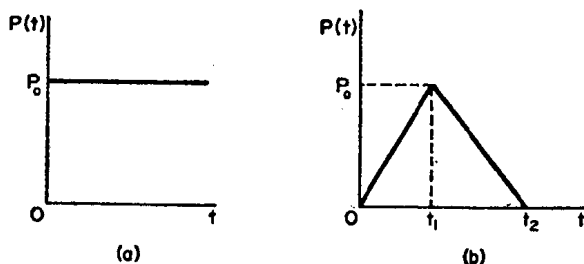


图 1.3 瞬变力激励的例子

阵风力即是这类激励的一例。

对(i) 需要的是质量对于简谐力的稳态响应。对(ii) 则需

要求瞬态响应。通常,最感兴趣的是在力的作用时间内或紧接此期间后的运动中所发生的质量的最大位移或弹簧的最大拉伸(在系统的弹性构件中之应力正比于此拉伸)。对(iii),其响应只能统计地确定。本章后面部分将对上述各类激励力给出确定响应的方法。

振动也可能由支座的强迫运动即图 1.1 中支座 A 的垂向运动或图 1.2 中基座 AD 的水平运动所激发。象激励力作用于质量时那样,支座的强迫运动可以是简谐的、瞬变的或随机的。由地震、车辆、打桩机、落锤和爆炸等通过地基传输振动的结构响应是一个重要的实际课题。对于地基的运动(位移、速度或加速度),如果是记录下来的过去的偶然事件,则可作为瞬态响应问题来处理。但是,对将来的偶然事件,地基的运动只能用统计的方法来描述,则是随机振动问题。虽然这些不同的激励形式已由单自由度的简单系统所阐述,但一些更复杂的结构对这类激励的响应将在后面研究。

§ 1.2 运动的一般方程

可由考虑作用于图 1.1 中质量 m 上的力来得出任意时间 t 运动的一般方程。如果质量的位移 x 从静平衡位置量起,那末因为重力 mg 和弹簧恢复力 $k\delta_s$ 平衡(此处 δ_s 是 m 的静变位,而 k 是弹簧刚度或者说弹簧产生单位变位所需要的力),故不需要包含在方程中。这里,假设弹簧是线性的,即 k 是常数。

在任一实际系统中,会有某种阻尼。阻尼可有各种形式,但此处假设为粘性阻尼。因此,阻尼力和速度 $\dot{x}$ 成正比并与运动反向(在符号上加“ $\cdot$ ”号表示对于时间的微商。因此,速度 $dx/dt \equiv \dot{x}$, 加速度 $d^2x/dt^2 \equiv \ddot{x}$)。通常,粘性阻尼用一个如图 1.1 中那样的与弹簧相平行的阻尼器来表示。实际上,阻尼力是由弹簧中的内摩擦等引起的,因而是与弹簧力共线的。

若将牛顿第二定律用到该系统,则可用质量和 x 方向所得到

的加速度的乘积等于 X 方向所加的净作用力来表示。对该系统来说, 作用力有三个部分, 也就是作用力 $P(t)$ 、恢复力或弹簧力 $(-kx)$ 及阻尼力 $(-c\dot{x})$ 。

因此, 运动方程为:

$$m\ddot{x} = P(t) - kx - c\dot{x}$$

或
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t). \quad (1.1)$$

式(1.1)的解给出质量对作用力 $P(t)$ 的响应。

对数值问题而言, 全书通篇采用国际单位制。因此相应的基本单位是: 质量用千克; 位移用米; 时间用秒。因为式(1.1)中的每一项表示一个力, 所以方程式的单位是牛顿 (加在 1 千克质量上, 并且使之产生 1 米/秒^2 加速度的力为 1 牛顿)。

§ 1.3 自由振动

式(1.1) 为受到一个干扰力的单自由度系统的运动方程。如果系统并没有施加扰动力, 但假定质量有一初始位移或初始速度, 则系统将发生自由振动。这种振动由于系统中的阻尼而逐渐消逝。

因此, 自由振动方程为:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (1.2)$$

可以看到, 下列形式的解

$$x = A \exp(\lambda t) \quad (1.3)$$

在代入式(1.2)后, 假如

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

成立, 也就是

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \left[\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2}, \quad (1.4)$$

则式(1.3)是满足式(1.2)的解。

情况(i): 如果 $(c/2m)^2 > k/m$, 式(1.4)的两个根为负实数, 因此, 式(1.2)的全解为:

$$x = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t).$$

由于 λ_1 与 λ_2 是负实数, 这个解表示质量 m 向平衡位置逐渐蠕动趋近。为了得到这种情况, 阻尼必定要比实际存在的阻尼大得多(除少数特殊应用外, 我们对此并不感兴趣)。所以, 这种情况没有必要去进一步考虑。

情况(ii): 如果 $(c/2m)^2 < (k/m)$, 式(1.4)的两个根都是复数。它们可以写为:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm i \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2},$$

此处

$$i = (-1)^{1/2}.$$

因为

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta,$$

及

$$\exp(-i\theta) = \cos\theta - i\sin\theta.$$

在作某些处理后, 式(1.2)的解可写为

$$x = \exp\left(-\frac{c}{2m} t\right) (A_1 \sin\omega^1 t + A_2 \cos\omega^1 t). \quad (1.5)$$

此处

$$\omega^1 = \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2},$$

常数 A_1 与 A_2 由初始条件来确定, 通常是用 $t=0$ 时 x 与 $\dot{x}$ 的值来决定。在更详细地研究式(1.5)之前, 我们将讨论两种特殊情况。

特殊情况(a): 无阻尼自由振动, 亦即 $c=0$ 的情况。当阻尼忽略时, 由式(1.5), 解变成:

$$x = A_1 \sin\omega_n t + A_2 \cos\omega_n t. \quad (1.6)$$

其中,

$$\omega_n^2 = k/m. \quad (1.7)$$

式(1.6)可改写为:

$$x = A \sin(\omega_n t + \alpha).$$

此处,

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} \quad \text{及} \quad \tan\alpha = A_2/A_1. \quad (1.8)$$

式(1.8)所示的无阻尼自由振动画于图 1.4。由图可见，振幅 A 定义为偏离平衡位置的最大位移。周期 T 为一个完全的振动循环所需要的时间，而频率 f 是单位时间内的振动数。由式(1.8)及上述定义，可以得出：

$$\omega_n T = 2\pi \quad \text{及} \quad f = 1/T.$$

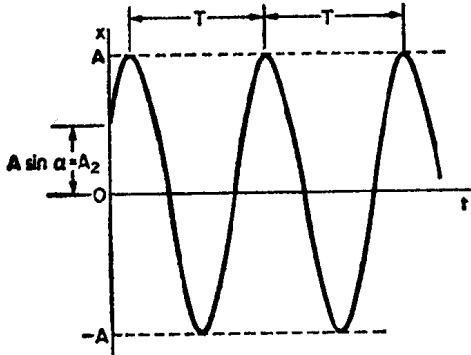


图 1.4 无阻尼自由振动

也即是

$$f = \omega_n / 2\pi = 1/T. \quad (1.9)$$

如此， ω_n 就是系统的圆固有频率。假如固有频率 f 用赫兹来表示，则 ω_n 用每秒弧度数来度量。式(1.8)中的角度 α 是相位角。

在式(1.8)中的 A 与 α [或者式(1.6)中的 A_1 与 A_2] 是由初始条件决定的。例如，假设在时间 $t=0$ ，质量 m 给定某初始位移 x_0 与初始速度 V ，那末，代入式(1.6)可有：

$$x_0 = A_2.$$

将式(1.6)对时间 t 求导，可得

$$\dot{x} = A_1 \omega_n \cos \omega_n t - A_2 \omega_n \sin \omega_n t,$$

并用当 $t=0$ 时

$$\dot{x}_0 = V$$

代入，则有

$$V = A_1 \omega_n.$$

故

$$x = \frac{V}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t,$$

或

$$x = \left[\left(\frac{V}{\omega_n} \right)^2 + x_0^2 \right]^{1/2} \sin(\omega_n t + \alpha)$$

及

$$\tan \alpha = \omega_n x_0 / V.$$

特殊情况(b): 临界阻尼 c_c 。临界阻尼是从(i)的蠕滑运动过渡到(ii)的阻尼振动的阻尼系数值(在定义无因次参数时将要用到它)。

因此

$$(c_c/2m)^2 = k/m$$

或

$$c_c^2 = 4km.$$

在用式(1.7)后, 这个关于 λ 的二次方程的等根条件也可化为:

$$c_c = 2(km)^{1/2} = 2k/\omega_n = 2m\omega_n. \quad (1.10)$$

情况(ii)的继续: 自由阻尼振动。阻尼比定义为 $\gamma = c/c_c$, 即真实阻尼常数与临界阻尼值之比。这样, 由式(1.10)得 $c/2m = \gamma\omega_n$, 而自由阻尼振动的解[式(1.5)]可以写为:

$$x = A \exp(-\gamma\omega_n t) \sin(\omega^1 t + \alpha). \quad (1.11)$$

式(1.11)示于图 1.5。图上位移用实线来表示, 这种位移介于两根包络线 $\pm A \exp(-\gamma\omega_n t)$ 之间。现

$$\begin{aligned} \omega^1 &= [k/m - (c/2m)^2]^{1/2} \\ &= \omega_n(1 - \gamma^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

除对系统引入大阻尼的特殊情况外, γ 是一个小量 (< 0.2)。故在实际上, $\omega^1 \approx \omega_n$ 。在结构中, γ 的值依赖于材料及结点的连接形式(任一类松动, 将会使阻尼增加)。钢结构的标准值是 $\gamma = 0.03$ 。这样, 对实际的阻尼数值, 自由阻尼振动的频率近似地等于系统的自由振动固有频率。在图 1.5 中, 点 P, Q, R, S 依次为正方向的最大位移, 在这些点上, $dx/dt = 0$, 而 x 为正。

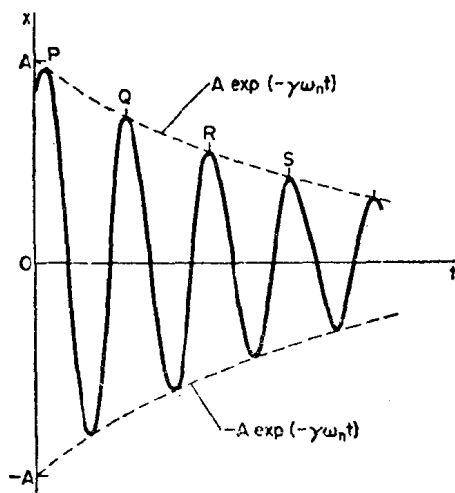


图 1.5 阻尼自由振动

由式(1.11), 这些条件导致 $\sin(\omega^1 t + \alpha) = (1 - \gamma^2)^{1/2}$, 这些点在一个阻尼自由振动的记录上是很容易识别的。[此外, 由 $\sin(\omega^1 t + \alpha) = 1$ 给定了位移曲线与包络线 $A \exp(-\gamma \omega_n t)$ 的交点。对于小阻尼, 这些交点中的各点都邻近 P, Q, R, S , 但并不与此相重合。]对 P, Q, R, S 点, 相邻两点之间的时间间隔为 $t^1 = 2\pi/\omega^1$ 。故应用式(1.12), 而有:

$$\begin{aligned} \frac{x_P}{x_Q} = \frac{x_Q}{x_R} = \frac{x_R}{x_S} = \dots &= \exp(\gamma \omega_n t^1) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi\gamma\omega_n}{\omega^1}\right) \\ &= \exp[2\pi\gamma(1-\gamma^2)^{-1/2}]. \end{aligned}$$

如将对数衰减率 δ 定义为 $\ln(x_P/x_Q)$, 则

$$\delta = 2\pi\gamma(1-\gamma^2)^{-1/2}. \quad (1.13)$$

实际上, 由上述理由, $\delta \approx 2\pi\gamma$ 。式(1.13)给出对数衰减率(由自由振动的试验记录可以很容易地决定)和阻尼系数之间的关系。正如将指出的那样, 阻尼系数在简谐激励响应中是一个重要的参

数。

§ 1.4 对简谐激励的响应

现讨论单自由度系统(图 1.1)对于简谐作用力的响应,也就是在图 1.1 中, $P(t) = P_0 \cos \omega t$, P_0 是常数, $\omega/2\pi$ 是作用力的频率。从式(1.1)可得相应的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos \omega t. \quad (1.14)$$

式(1.14)的全解由余函数和特殊积分两部分组成,前者就是式(1.2)的解并已于 § 1.3 中得出。确定特殊积分有几种方法。下面提出的这种方法,因为适用于第二章多自由度系统,故被选用。式(1.14)右边的 $\cos \omega t$ 由 $\exp(i\omega t)$ 来代替,其中 $i = (-1)^{1/2}$ 。由这个改变后的方程解出 x 的复数表达式,而该表达式的实数部分即为所要求的解。因为

$$\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (1.15)$$

这个方法是以 $\cos \omega t$ 为 $\exp(i\omega t)$ 的实部为基础的。[如果式(1.14)中的作用力是 $P_0 \sin \omega t$, 方法也是类似的,唯 x 复数表达式之虚部是所需的解。] 因此,改变后的方程为:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \exp(i\omega t). \quad (1.16)$$

此式的特殊积分形式是 $x = X \exp(i\omega t)$ 。因此, $\dot{x} = i\omega x$ 及 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 。将这些关系代入式(1.16),可以得出:

$$(k - m\omega^2 + i c \omega) x = P_0 \exp(i\omega t)$$

即

$$x = \frac{P_0(k - m\omega^2 - i c \omega) \exp(i\omega t)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}. \quad (1.17)$$

这也可表示成

$$x = H(\omega) P_0 \exp(i\omega t).$$

此处复频率响应或复数敏感性为

$$H(\omega) = \frac{(k - m\omega^2 - i c \omega)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}, \quad (1.18)$$

[式(1.18)将在 § 1.9 中用到]。取式(1.17)右边之实数部分,可